1.

本题分数	21
得　分	

一、填空题 （每题 3 分）

1.设 A,B 相互独立，且 $P(A)=2/5, P(A\cup B)=4/5$,则 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=$ ____________.

2. 随机变量 X 的密度为 $f(x)=\begin{cases}2x,0<x<1\\0,\text{其它}\end{cases}$,Y 表示对 X 的 3 次独立重复观察中事件 $\{X\le 1/2\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$ ____________.

3.设随机变量 $(X,Y)\sim N(1,1,4,9,0)$ ，则 $D(|X-Y|)=$ ____________.

4.已知随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，Y 服从期望为 2 的指数分布，X,Y 的相关系数为 0.25，则 $D(3X-2Y+1)=$ ____________.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 是取自正态总体 $N(0,2)$ 的简单随机样本，设 $Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$,则当常数 $C=$ _____ 时，CY 服从 χ^2 分布。

6. 设总体 X 的分布律为： $P\{X=1\}=\theta, P\{X=2\}=3\theta, P\{X=3\}=1-4\theta$ ，
其中 θ 为未知参数， X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，对于假设检验问题， $H_0:\theta=0.1$ ， $H_1:\theta=0.2$ ，若拒绝域为 $C=\{X_1=1,X_2=2,X_3=3\}$ ，则犯第二类错误的概率 $\beta=$ _______.

7. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，$Y_i=X_i-\bar{X}, i=1,2,\ldots,n$ ，若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，则 $c=$ _______.

2.

本题分数	9
得　分	

二. 选择题(每题 3 分)

1. 设 A,B 是任意两个概率不为零的不相容事件，则下列结论中肯定正确的是(　　)

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容 (B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容 (C) $P(AB)=P(A)P(B)$ (D) $P(A-B)=P(A)$

2. 设随机变量 X 具有对称的概率密度，即 $f(x)=f(-x)$，$F(x)$ 是其分布函数，则对 $\forall a>0$， $P\{|X|>a\}=$(　　)

(A) $2[1-F(a)]$　(B) $2F(a)-1$　(C) $2-F(a)$　(D) $1-2F(a)$

3. 假设检验中若在显著性水平 $\alpha=0.05$ 情况下接受原假设 H_0，那么在显著性水平 $\alpha=0.02$ 情况下对 H_0 的检验，有(　　)

(A)拒绝 H_0　(B)接受 H_0

(C)可能接受 H_0，也可能拒绝 H_0　(D)犯第一类错误概率更大

3.

本题分数	30
得　　分	

三．计算题(每题 6 分)

1.袋中有 10 枚正品硬币，4 枚次品硬币(次品两面均为国徽)，在袋子中任取一枚，投掷 3 次，已知每次都得到国徽，求这枚硬币是正品的概率。

2.设二维随机变量(X,Y)在以(-1, 0)、(0,1)、(1,0)为顶点的三角形区域上服从均匀分布，求其联合概率密度及$Z=X+Y$的概率密度。

3.某人进行独立射击，命中目标的概率为1/3，如果击中目标一次就停止射击，以X表示所需的射击次数，求X的分布律及其数学期望$E(X)$。

4. 设 X_1,X_2,X_3 为来自总体 $N(0,1)$ 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，随机变量 Y 服从方差为 1 的指数分布，Z 服从区间 $(0,6)$ 上的均匀分布，且 Y、Z 相互独立，求 $P\{\max(Y,Z) > D(\sum_{i=1}^{3}(X_i-\overline{X})^2)\}$。

5. 加法器在进行加法时，将每个加数舍入最靠近它的整数，设所有误差是独立的且在 $(-0.5,0.5)$ 上服从均匀分布，问最多可有几个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.9？

四. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x, 0\le x<1 \\ 2-x, 1\le x<2 \\ 0, 其他 \end{cases}$；

(1)求 X 的分布函数 $F(x)$;(2)求 $Y=F(X)$ 的概率密度。

5.

本题分数	10
得　分	

五．某元件使用寿命服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2均未知，要求使用寿命不得低于1000小时，抽样检测得到20个数据,得到样本均值为$\bar{x}=950$(小时),样本标准差$s=120$(小时).

(1)问对于显著性水平$\alpha=0.05$,能否认为这批元件合格?

(2)求总体方差的置信水平为0.95的置信区间.（写出具体推导过程）

本题分数	10
得　分	

六．设总体X具有概率密度$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^2}xe^{-x/\theta}, x>0\\0, x\le 0\end{cases}$，其中$\theta>0$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自$X$的样本，求$\theta$的矩估计量和最大似然估计量。

本题分数	12
得　分	

七．设随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}kxye^{-(x^2+y^2)}, x\ge 0, y\ge 0\\ 0.其他,\end{cases}$$

(1)求k；(2)求X的边缘概率密度$f_X(x)$；(3)求条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$；(4)X,Y是否相互独立？为什么？(5)求$P\{X+Y\le 1\}$(结果用Φ函数表示)。

附表：$z_{0.05}=1.645, z_{0.025}=1.96, t_{0.05}(20)=1.725, t_{0.025}(20)=2.086, t_{0.05}(19)=1.729$，$t_{0.025}(19)=2.093$, $\chi^2_{0.025}(20)=34.17, \chi^2_{0.975}(20)=9.591, \chi^2_{0.025}(19)=32.852$, $\chi^2_{0.975}(19)=8.906, \Phi(1.64)=0.9495, \Phi(1.65)=0.9505$。

一、1. $\frac{11}{15}$

2. $\frac{9}{64}$

3. 13

4. $\frac{39}{4}$

5. $\frac{1}{6}$.

6. $\frac{491}{500}$

7. $\frac{n}{2(n-2)}$

二、1. D

2. A

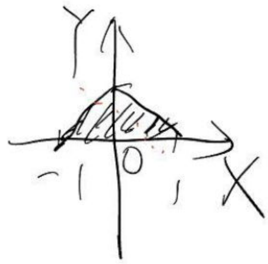
3. C

三 1. 设"每次都得国徽"为事件 A.

"这枚硬币为正品"……B.

$$P(A)=\frac{4}{14}\times 1^3+\frac{10}{14}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{10}{14}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)}=\frac{5}{21}$$

2. 

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}$

当 $z\le -1$, $F_Z(z)=0$.

当 $z\ge 1$, $F_Z(z)=1$.

当 $-1<z<1$, $F_Z(z)=\int_0^{\frac{z+1}{2}}\int_{y-1}^{z-y} x+y\,dx\,dy$

$$=\int_0^{\frac{z+1}{2}}\frac{(z-y)^2}{2}+(z-y)\cdot y-\frac{(y-1)^2}{2}-(y-1)\cdot y\,dy$$

$$=-\frac{2}{3}y^3+y^2+\left(\frac{z^2-1}{2}\right)y\Big|_0^{\frac{z+1}{2}}$$

$$=\frac{2z^3+3z^2-1}{12}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z^2}{2}+\frac{z}{2}, & -1<z<1\\ 0,\end{cases}$$

3.

X	1	2	3	$\cdots$	k
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$		$\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{3}$

$$P\{X=k\}=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{3}.\quad k\geq 1$$

$$E(X)=\frac{1}{p}=3.$$

4. $X_i-\overline{X}\sim\left(0,\frac{2}{3}\right)$

$$\frac{X_i-\overline{X}}{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}\sim(0,1)$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{(X_i-\overline{X})}{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}\right]^2=\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{3}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(3).$$

$$D\left(\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{3}(X_i-\overline{X})^2\right)=\frac{9}{4}D\left(\sum_{i=1}^{3}(X_i-\overline{X})^2\right)=6$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{3}(X_i-\overline{X})^2\right)=\frac{8}{3}$$

$$P\left\{\max(Y,Z)>\frac{8}{3}\right\}=1-P\left\{\max(Y,Z)\leq\frac{8}{3}\right\}$$

$$=1-P\left\{Y\leq\frac{8}{3}\right\}\cdot P\left\{Z\leq\frac{8}{3}\right\}.$$

$$=1-\left(1-e^{-\frac{8}{3}}\right)\cdot\frac{\left(\frac{8}{3}\right)}{6}$$

$$=\frac{5}{9}+\frac{4}{9}\cdot e^{-\frac{8}{3}}$$

、设误差为X_i，概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1, & -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\\ 0, & 其他.\end{cases}$
$(i=1,2,\cdots)$

由题：$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right|<10\right\}=P\left\{-10<\sum_{i=1}^{n}X_i<10\right\}$

由中心极限定理，
$$=P\left\{\frac{-10}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{12}}}<\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{12}}}<\frac{10}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{12}}}\right\}$$
$$=2\phi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right)-1\geq 0.9$$
$$\phi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right)\geq 0.95$$

查表，得 $\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\geq 1.6$

$n\leq 468$

四 (1) 当 $x<0$, $F(x)=0$

当 $0\le x<1$, $F(x)=\int_0^x x\,dx=\frac{x^2}{2}$.

当 $1\le x<2$, $F(x)=\int_0^1 x\,dx+\int_1^x 2-x\,dx=-\frac{x^2}{2}+2x-1$

当 $x\geq 2$, $F(x)=1$

$$F(x)=\begin{cases}1, & x\ge 2\\ -\frac{x^2}{2}+2x-1, & 1\le x<2\\ \frac{x^2}{2}, & 0\le x<1\\ 0, & x<0\end{cases}$$

(2) $F_Y(y)=P\{F(X)\le y\}$.

当 $y\le 0$, $F_Y(y)=0$

当 $y\ge 1$, $F_Y(y)=1$.

当 $0<y<1$时, $F(x)$单调递增存在 $F^{-1}(x)$.

$\therefore P\{F^{-1}F(x)<F^{-1}(y)\}$

$=F(F^{-1}(y))$

$=y$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

五 (1) $H_0: \mu \geq 1000$, $H_1: \mu < 1000$

$$t = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{950-1000}{\left(\frac{\sqrt{120}}{\sqrt{20}}\right)} = -20.4124$$

$$W = \{t < t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0.95}(19) = -t_{0.05}(19) = -1.7291\}$$

∴ 拒绝 H_0，即在 $\alpha = 0.05$ 下 不合格，

(2) 置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right] = \left[\frac{19\times 120}{\chi^2_{0.025}(19)}, \frac{19\times 120}{\chi^2_{0.975}(19)}\right]$$

$$= [69.4022, 256.0072]$$

与21春的最后一大题几乎完全相同，图形是对称的，因而第2、3小题计算过程和结果一样，x与y互换即可。
第5小题P(X+Y<=1)=1-P(X+Y>1)

七.

(1) 由性质知

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} kxye^{-x^2-y^2} dy = 1$$

$$k\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} ye^{-y^2} dy = 1$$

$$k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad k = 4$$

(2)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} 4xye^{-x^2-y^2} dx, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2ye^{-y^2}, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

七

(3)

当 $y>0$ 时

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}2xe^{-x^2}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

(4)

由(2)知

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{+\infty}4xye^{-x^2-y^2}dy, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2xe^{-x^2}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)\Rightarrow X$ 与 Y 独立

七

(5)

$$E(X+Y)=EX+EY=\sqrt{\pi}$$

$$EX=\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}\cdot x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$EY=\int_0^{+\infty}2ye^{-x^2}\cdot y\,dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$EX^2=\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}\cdot x^2dx=1$$

$$EY^2=1 \quad \Rightarrow DX=EX^2-(EX)^2=1-\frac{\pi}{4}$$

$$D(X+Y)=DX+DY=2-\frac{\pi}{2}$$

见第14页顶部的说明！

从而 $P(X+Y>1)=1-P(X+Y\leq 1)$

$$=1-P\left(\frac{X+Y-\sqrt{\pi}}{\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}}\leq\frac{1-\sqrt{\pi}}{\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}}\right)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{1-\sqrt{\pi}}{\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}}\right)$$