北大燕园

·高等学校辅导教材·

高等数学习题全解

同济·第七版

（上下合订本）

主编 陶 伟

- 讲解基本内容
- 解惑易错易混淆点
- 提炼典型题型
- 诠释重难点
- 归纳重要结论
- 总结解题方法与技巧

中国政法大学出版社

·高等学校辅导教材系列丛书·

高等数学辅导（同济·第七版）上下合订本	编著　李正元
概率论与数理统计辅导（浙大·第四版）	编著　龚兆仁
微积分辅导（同济·第七版）	主编　陶　伟
▶ 高等数学习题全解（同济·第七版）上下合订本	主编　陶　伟
线性代数习题全解（同济·第六版）	主编　陶　伟
概率论与数理统计习题全解（浙大·第四版）	主编　陶　伟

ISBN 978-7-5620-5611-9

定价：32.00元

封面设计 晓禾

高等数学习题全解

同济·第七版

（上下合订本）

主编 陶 伟

中国政法大学出版社

2014·北京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解/陶伟主编．—北京：中国政法大学出版社，2014. 8
ISBN 978-7-5620-5611-9

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①陶…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-题解　Ⅳ．①O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 205804 号

出 版 者	中国政法大学出版社
地　　址	北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址	北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　　址	http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　　话	010－58908285(总编室)　58908433(编辑部)　58908334(邮购部)
承　　印	北京旺都印务有限公司
开　　本	787mm×960mm　1/16
印　　张	34. 75
字　　数	795 千字
版　　次	2014 年 8 月第 1 版
印　　次	2014 年 8 月第 1 次印刷
定　　价	32. 00 元

前　言

高等数学是近代数学的基础，也是当代大学生的重要基础课和硕士研究生入学考试的重要科目。为了帮助广大读者全面系统地学习、掌握高等数学的基本概念、基本理论、基本方法和技巧，我们组织**清华大学、北京大学、中国人民大学、北京航空航天大学、北京理工大学、北京交通大学**等院校一批具有丰富教学经验的青年教师编写了这本习题集。

本书是教材《高等数学》(**同济·第七版**)的习题全解。

本书旨在帮助读者提高分析问题的能力和掌握解题方法和技巧，加深对教材基本内容的理解和掌握，提高学习效率。

我们希望读者先自行思考，自己亲自动手解题，然后与本书题解进行对照。如果自己不动手去做题，而只是为了完成老师布置的作业照抄本书题解，是有害无益的。

本书编写结构：

本书严格按教材各章节习题顺序编排，与教材的题号一致，部分题目有一题多解。在有些题解中给出了评注，旨在指出读者易犯的错误和应当注意的事项。

本书各章按以下两项进行编写：

一、教材《高等数学》(**同济·第七版**)的试题及题解。

二、考研试题选解。我们按考研试题所考查的知识点，将其编排在教材相应的章节，以便读者了解硕士研究生入学考试命题方向和难易程度。

本书具有以下特点：

1. 题材丰富，题量大，可读性强。本书不仅包含了**同济·第七版**中所有习题，而且还选编了历年全国硕士研究生入学考试试题（含解答）。

2. 题型多样，方法典型、新颖，解答简捷，论证严谨，富有启发性。对备考硕士研究生的考生和正在学习《高等数学》的广大在校学生，把握课程重点，扩大视野，启迪思维，提高分析问题和解决问题的能力，都会有指导作用。

本书不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

编者

目　　录

第一章　函数与极限

习题 1－1　映射与函数

1 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(5) $y=\sin\sqrt{x}$；　　(6) $y=\tan(x+1)$；

(7) $y=\arcsin(x-3)$；　　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y=\ln(x+1)$；　　(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

【解】 (1) 因 $3x+2\geqslant 0$，即 $x\geqslant -\dfrac{2}{3}$，故函数的定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) 因 $1-x^2\neq 0$，即 $x\neq\pm 1$，故函数的定义域为

$$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

(3) 因 $\begin{cases}1-x^2\geqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$ 即 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$，故函数的定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

(4) 由 $4-x^2>0$，得 $-2<x<2$，故函数的定义域为 $(-2,2)$.

(5) 要使函数有意义，必须 $x\geqslant 0$，故定义域为 $[0,+\infty)$.

(6) 要使函数有意义，必须 $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

(7) 要使函数有意义，必须 $|x-3|\leqslant 1$，即 $-1\leqslant x-3\leqslant 1$，亦即 $2\leqslant x\leqslant 4$，故定义域为 $[2,4]$.

(8) 由 $\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\ x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant 3,\\ x\neq 0,\end{cases}$ 故定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,3)$.

(9) 由 $x+1>0\Rightarrow x>-1$，故定义域为 $(-1,+\infty)$.

(10) 由 $x\neq 0\Rightarrow$ 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，　$g(x)=2\lg x$；　　(2) $f(x)=x$，　$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，　$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；　(4) $f(x)=1$，　$g(x)=\sec^2x-\tan^2x$.

【解】 两函数相同，必须定义域相同，对应法则也相同.

(1) 不同. 因为定义域不同，$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

(2) 不同．因为对应法则不同，$f(x)=x$，而 $g(x)=-x$（当 $x<0$ 时）．

(3) 相同．因为定义域、对应法则均相同．

(4) 不同．因为 $g(x)=\sec^2x-\tan^2x=\dfrac{1-\sin^2x}{\cos^2x}$，分母不能为零，即 $x\neq k\pi+\dfrac{1}{2}\pi$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同．

3 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作函数 $y=\varphi(x)$ 的图形．

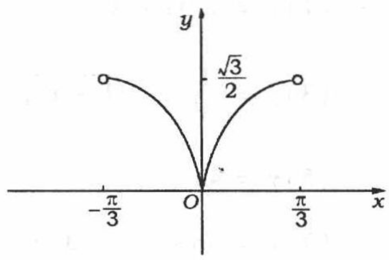
【解】 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$，

$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\varphi(-2)=0$．

$y=\varphi(x)$ 图像如右．



第 3 题图

4 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$，$(-\infty,1)$；　　(2) $y=x+\ln x$，$(0,+\infty)$．

【证】 (1) 设 $x_1<x_2$，且 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$，由于

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_1x_2-x_2+x_1x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

$$=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $y=\dfrac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 单调增加．

(2) 设 $x_1<x_2$，且 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，则有

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\ln x_1)-(x_2+\ln x_2)=(x_1-x_2)+(\ln x_1-\ln x_2).$$

由于 $y=\ln x$ 为单调增加函数，所以 $(\ln x_1-\ln x_2)<0$.

又　$(x_1-x_2)<0$，所以 $(x_1-x_2)+(\ln x_1-\ln x_2)<0$.

故　$f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

5 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明：$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加．

【证】 因 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上为奇函数，所以对任意 $x\in(-l,l)$，有 $f(-x)=-f(x)$．

对任意 $x_1,x_2\in(-l,0)$，当 $x_1<x_2$ 时，即 $-x_1>-x_2$，且 $-x_1,-x_2\in(0,l)$，由于 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，所以 $f(-x_1)>f(-x_2)$，即 $-f(x_1)>-f(x_2)$，亦即 $f(x_1)<f(x_2)$．故 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内单调增加．

6 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$上的,证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

【证】 (1) 设$f_1(x)$, $f_2(x)$ 均为偶函数,令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$,因

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x)$,$g_2(x)$ 均为奇函数,令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$,因

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x),$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设$f_1(x)$, $f_2(x)$ 均为偶函数,令 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$,因

$$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x)$,$g_2(x)$ 均为奇函数,令 $G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$,因

$$\begin{aligned}G(-x)&=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)]\cdot[-g_2(x)]\\&=g_1(x)\cdot g_2(x)=G(x),\end{aligned}$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设$f(x)$ 为偶函数,$g(x)$ 为奇函数,令 $H(x)=f(x)\cdot g(x)$,因

$$H(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot[-g(x)]=-f(x)g(x)=-H(x),$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

7 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非奇函数又非偶函数?

(1)$y=x^2(1-x^2)$;　　(2)$y=3x^2-x^3$;

(3)$y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(4)$y=x(x-1)(x+1)$;

(5)$y=\sin x-\cos x+1$;　　(6)$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

【解】 由奇、偶函数的定义来判断.

(1)$f(-x)=(-x)^2[1-(-x^2)]=x^2(1-x^2)=f(x)$,故$f(x)$ 为偶函数;

(2)$f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$,故$f(x)$ 既非奇函数又非偶函数;

(3)$f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$,故$f(x)$ 为偶函数;

(4)$f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$,故$f(x)$ 为奇函数;

(5)$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$,故$f(x)$ 即非奇函数又非偶函数;

(6)$f(-x)=\dfrac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$,故$f(x)$ 为偶函数.

8 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期:

(1) $y = \cos(x-2)$; (2) $y = \cos 4x$; (3) $y = 1 + \sin \pi x$;

(4) $y = x\cos x$; (5) $y = \sin^2 x$.

【解】 (1) $y = \cos(x-2)$ 是周期函数,周期 $l = 2\pi$;

(2) $y = \cos 4x$ 是周期函数,周期 $l = \dfrac{\pi}{2}$;

(3) $y = 1 + \sin \pi x$ 是周期函数,周期 $l = 2$;

(4) $y = x\cos x$ 不是周期函数;

(5) $y = \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ 是周期函数,周期 $l = \pi$.

9 求下列函数的反函数:

(1) $y = \sqrt[3]{x+1}$; (2) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$;

(3) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\ (ad - bc \neq 0)$; (4) $y = 2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6}\right)$;

(5) $y = 1 + \ln(x+2)$; (6) $y = \dfrac{2^x}{2^x+1}$.

【解】 (1) 由 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 解出 $x = y^3 - 1$,故所求反函数为 $y = x^3 - 1$.

(2) 由 $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ 解出 $x = \dfrac{1-y}{1+y}$,故所求反函数为 $y = \dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 解出 $x = \dfrac{b-dy}{cy-a}$,故所求反函数为 $y = \dfrac{b-dx}{cx-a}\ \left(x \neq \dfrac{a}{c}\right)$.

(4) 由 $y = 2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6}\right)$解得 $x = \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$,即反函数为 $y = \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$;

(5) 由 $y = 1 + \ln(x+2)$ 解得 $x = e^{y-1} - 2$,即反函数为 $y = e^{x-1} - 2$;

(6) 由 $y = \dfrac{2^x}{2^x+1}$ 解得 $x = \log_2\dfrac{y}{1-y}$,即反函数 $y = \log_2\dfrac{x}{1-x}$.

10 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

【证】 充分性. 已知 $M_1 \leqslant f(x) \leqslant M_2$,对任意 $x \in X$,取 $M = \max\{|M_1|, |M_2|\}$,则 $|f(x)| \leqslant M$,对任意 $x \in X$,有界.

必要性. 已知 $f(x)$ 有界,即对任意 $x \in X$,有 $|f(x)| \leqslant M$,则 $-M \leqslant f(x) \leqslant M$,故既有上界 $M_1 = -M$,也有下界 $M_2 = M$,得证.

11 在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y = u^2$, $u = \sin x$, $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{3}$;

(2) $y = \sin u$, $u = 2x$, $x_1 = \dfrac{\pi}{8}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{4}$;

(3) $y = \sqrt{u}$, $u = 1 + x^2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;

(4) $y = e^u$,　　$u = x^2$,　　$x_1 = 0$,　　$x_2 = 1$;

(5) $y = u^2$,　　$u = e^x$,　　$x_1 = 1$,　　$x_2 = -1$.

【解】 (1) 复合函数为 $y = \sin^2 x$. 当 $x_1 = \frac{\pi}{6}$ 时, $y = \frac{1}{4}$;　当 $x_2 = \frac{\pi}{3}$ 时, $y = \frac{3}{4}$.

(2) 复合函数为 $y = \sin 2x$. 当 $x_1 = \frac{\pi}{8}$ 时, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$;　当 $x_2 = \frac{\pi}{4}$ 时, $y = 1$.

(3) 复合函数为 $y = \sqrt{1 + x^2}$. 当 $x_1 = 1$ 时, $y = \sqrt{2}$;　当 $x_2 = 2$ 时, $y = \sqrt{5}$.

(4) 复合函数为 $y = e^{x^2}$. 当 $x_1 = 0$ 时, $y = 1$;　当 $x_2 = 1$ 时, $y = e$.

(5) 复合函数为 $y = e^{2x}$. 当 $x_1 = 1$ 时, $y = e^2$;　当 $x_2 = -1$ 时, $y = e^{-2}$.

12 设 $f(x)$ 的定义域 $D = [0,1]$, 求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;　　(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x + a)\ (a > 0)$;　　(4) $f(x + a) + f(x - a)\ (a > 0)$.

【解】 (1) 由 $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, 得 $-1 \leqslant x \leqslant 1$, 故 $f(x^2)$ 的定义域是 $[-1,1]$.

(2) 由 $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, 得 $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k + 1)\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 故 $f(\sin x)$ 的定义域是 $[2k\pi, (2k + 1)\pi]$ (k 为整数).

(3) 由 $0 \leqslant x + a \leqslant 1$, 得 $-a \leqslant x \leqslant 1 - a$,　故 $f(x + a)$ 的定义域是 $[-a, 1 - a]$.

(4) 由 $\begin{cases} 0 \leqslant x + a \leqslant 1, \\ 0 \leqslant x - a \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a \leqslant x \leqslant 1 - a, \\ a \leqslant x \leqslant 1 + a, \end{cases}$ 注意到 $a > 0$, 只可能有两种情形:

当 $1 - a < a$ 时, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 上面不等式组无解;

当 $1 - a \geqslant a$ 时, 即 $a \leqslant \frac{1}{2}$ 时, 上面不等式组的解为 $a \leqslant x \leqslant 1 - a$.

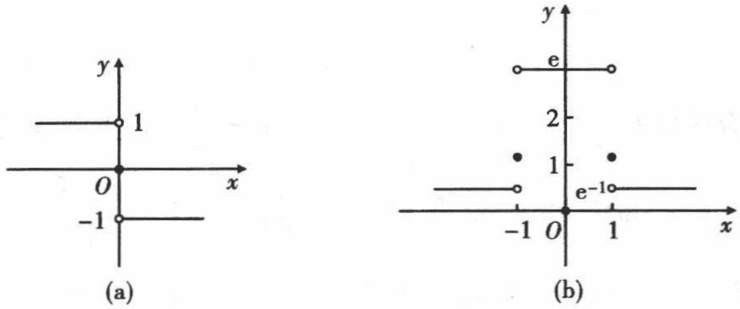
故 $f(x + a) + f(x - a)$ 的定义域是 $[a, 1 - a]\left(0 < a \leqslant \frac{1}{2}\right)$.

13 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = e^x$, 求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形.

【解】 $f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1, \\ 0, & |e^x| = 1, \\ -1, & |e^x| > 1, \end{cases}$

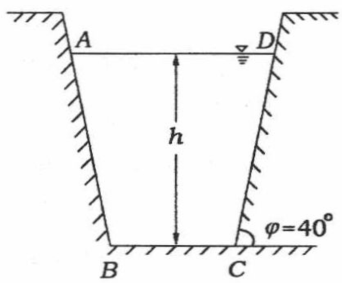
即　$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$　$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1 = e, & |x| < 1, \\ e^0 = 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$

$f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的图形依次如图 (a) 与 (b) 所示.



第 13 题图

14 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi = 40°$. 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求湿周 $l(l = AB + BC + CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式,并说明定义域.



第 14 题图

【解】 $AB = DC = \dfrac{h}{\sin 40°}$,由 $S_0 = \dfrac{1}{2}h(2BC + 2\cot 40° \cdot h)$,得

$$BC = \frac{S_0}{h} - \cot 40° \cdot h.$$

故 $$l = \frac{S_0}{h} + \frac{2 - \cos 40°}{\sin 40°} \cdot h.$$

由于自变量 h 的取值由不等式组 $\begin{cases} h > 0, \\ \dfrac{S_0}{h} - \cot 40° \cdot h > 0 \end{cases}$ 确定,

故湿周函数的定义域 $D = \{h \mid 0 < h < \sqrt{S_0 \tan 40°}\}$,即$(0, \sqrt{S_0 \tan 40°})$.

15 设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 及直线 $l: x + y = t(t \geqslant 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积,试求 $S(t)$ 与 t 之间的函数关系.

【解】 当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时,$S(t) = \dfrac{1}{2}t^2$,

当 $1 < t \leqslant 2$ 时,$S(t) = 1 - \dfrac{1}{2}(2 - t)^2 = -\dfrac{1}{2}t^2 + 2t - 1$,

当 $t > 2$ 时,$S(t) = 1$.

故

$$S(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ -\dfrac{1}{2}t^2 + 2t - 1, & 1 < t \leqslant 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$

16 求联系华氏温度(用 F 表示)和摄氏温度(用 C 表示)的转换公式,并求

(1)90℉ 的等价摄氏温度和 -5℃ 的等价华氏温度;

(2)是否存在一个温度值,使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的?如果存在,那么该温度值是多少?

【解】 设 $F = mC + b$,其中 m, b 均为常数.

因为 $F = 32°$ 相当于 $C = 0°$,$F = 212°$ 相当于 $C = 100°$,所以

$$b = 32, m = \frac{212 - 32}{100} = 1.8.$$

故　$F = 1.8C + 32$　或　$C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

(1) $F = 90°, C = \frac{5}{9}(90 - 32) \approx 32.2°; C = -5°, F = 1.8 \times (-5) + 32 = 23°$.

(2) 设温度值 t 符合题意，则有 $t = 1.8t + 32, t = -40$. 即华氏 $-40°$ 恰好也是摄氏 $-40°$.

17 已知 $Rt\triangle ABC$ 中，直角边 AC、BC 的长度分别为 20、15，动点 P 从 C 出发，沿三角形边界按 $C \to B \to A$ 方向移动；动点 Q 从 C 出发，沿三角形边界按 $C \to A \to B$ 方向移动，移动到两动点相遇时为止，且点 Q 移动的速度是点 P 移动的速度的 2 倍. 设动点 P 移动的距离为 x，$\triangle CPQ$ 的面积为 y，试求 y 与 x 之间的函数关系.

【解】　因为 $AC = 20, BC = 15$，所以 $AB = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$.

由 $20 < 2 \cdot 15 < 20 + 25$ 可知，点 P、Q 在斜边 AB 上相遇.

令 $x + 2x = 15 + 20 + 25$，得 $x = 20$. 即当 $x = 20$ 时，点 P、Q 相遇. 因此，所求函数的定义域为 $(0, 20)$.

(1) 当 $0 < x < 10$ 时，点 P 在 CB 上，点 Q 在 CA 上（图 17－1）.

由 $|CP| = x, |CQ| = 2x$，得

$$y = x^2.$$

(2) 当 $10 \leqslant x \leqslant 15$ 时，点 P 在 CB 上，点 Q 在 AB 上（图 17－2）.

$$|CP| = x, \quad |AQ| = 2x - 20.$$

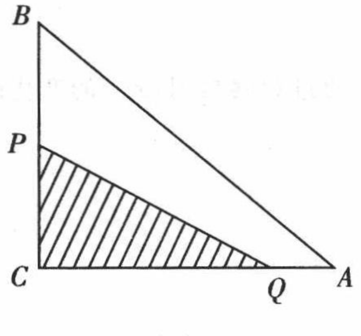
设点 Q 到 BC 的距离为 h，则

$$\frac{h}{20} = \frac{|BQ|}{25} = \frac{45 - 2x}{25},$$

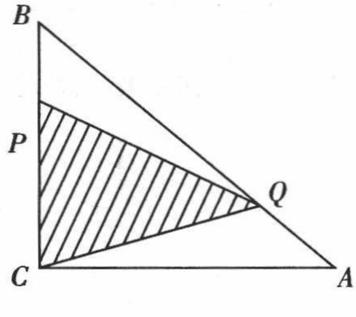
得 $h = \frac{4}{5}(45 - 2x)$. 故

$$y = \frac{1}{2}xh = \frac{2}{5}x(45 - 2x) = -\frac{4}{5}x^2 + 18x.$$

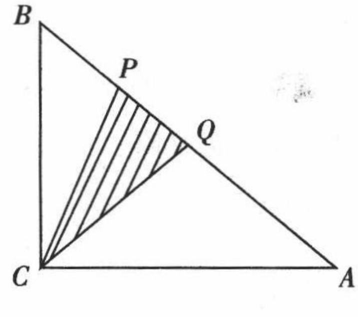
(3) 当 $15 < x < 20$ 时，点 P、Q 都在 AB 上（图 3）.



(1)



(2)



(3)

第 17 题图

$$|BP| = x - 15, \quad |AQ| = 2x - 20, \quad |PQ| = 60 - 3x.$$

设点 C 到 AB 的距离为 h'，则

$$h' = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12,$$

得

$$y = \frac{1}{2}\left|PQ\right| \cdot h' = -18x + 360.$$

综上可得

$$y = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 10, \\ -\frac{4}{5}x^2 + 18x, & 10 \leqslant x \leqslant 13 \\ -18x + 360, & 15 < x < 20. \end{cases}$$

18 利用以下美国人口普查局提供的世界人口数据①以及指数模型来推测2020年的世界人口.

年　份	人口数(百万)	年增长率(%)
2008	6708.2	1.166
2009	6786.4	1.140
2010	6863.8	1.121
2011	6940.7	1.107
2012	7017.5	1.107
2013	7095.2	

【解】 由表中第3列,猜想2008年后世界人口的年增长率是1.1%.于是,在2008年后的第t年,世界人口将是

$$p(t) = 6708.2 \times (1.011)^t(\text{百万}).$$

2020年对应$t = 12$,于是

$$p(12) = 6708.2 \times (1.011)^{12} \approx 7649.3(\text{百万}) \approx 76(\text{亿}).$$

即推测2020年的世界人口约为76亿.

习题1-2　数列的极限

1 下列各题中,哪些数列收敛,哪些数列发散?对收敛数列,通过观察数列$\{x_n\}$的变化趋势,写出它们的极限:

(1)$x_n = \frac{1}{2^n}$;　　(2)$x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$;

(3)$x_n = 2 + \frac{1}{n^2}$;　　(4)$x_n = \frac{n-1}{n+1}$;

(5)$x_n = n(-1)^n$;　　(6)$x_n = \frac{2^n - 1}{3^n}$;

① 这里世界人口数据是指每年年中的人口数.

(7) $x_n = n - \frac{1}{n}$；　　(8) $x_n = [(-1)^n + 1]\frac{n+1}{n}$.

【解】 (1) 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$.　　(2) 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n} = 0$.

(3) 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = 2$.　　(4) 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1} = 1$.

(5) $\{n(-1)^n\}$ 发散.　　(6) 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{3^n} = 0$.

(7) $\{n - \frac{1}{n}\}$ 发散.　　(8) $\{[(-1)^n + 1]\frac{n+1}{n}\}$ 发散.

2 (1) 数列的有界性是数列收敛的什么条件？

(2) 无界数列是否一定发散？

(3) 有界数列是否一定收敛？

【解】 (1) 必要条件.

(2) 一定发散.

(3) 未必一定收敛，如数列 $\{(-1)^n\}$ 有界，但它是发散的.

3 下列关于数列 $\{x_n\}$ 的极限是 a 的定义，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，试说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}_+$，当 $n > N$ 时，不等式 $x_n - a < \varepsilon$ 成立；

(2) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}_+$，当 $n > N$ 时，有无穷多项 x_n，使不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立；

(3) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}_+$，当 $n > N$ 时，不等式 $|x_n - a| < c\varepsilon$ 成立，其中 c 为某个正常数；

(4) 对于任意给定的 $m \in \mathbf{N}_+$，存在 $N \in \mathbf{N}_+$，当 $n > N$ 时，不等式 $|x_n - a| < \frac{1}{m}$ 成立.

【解】 (1) 错误. 如对数列 $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}$，$a = 1$. 对任给的 $\varepsilon > 0$（设 $\varepsilon < 1$）. 存在 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n > N$ 时，$(-1)^n + \frac{1}{n} - 1 \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon$，但 $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}$ 的极限不存在.

(2) 错误. 如对数列

$$x_n = \begin{cases} n, & n = 2k-1, \\ 1 - \frac{1}{n}, & n = 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbf{N}_+, a = 1.$$

对任给的 $\varepsilon > 0$（设 $\varepsilon > 1$），存在 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n > N$ 且 n 为偶数时，$|x_n - a| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ 成立，但 $\{x_n\}$ 的极限不存在.

(3) 正确. 对任给的 $\varepsilon > 0$，取 $\frac{1}{c}\varepsilon > 0$，按假设，存在 $N \in \mathbf{N}_+$，当 $n > N$ 时，不等式 $|x_n - a| < c \cdot \frac{1}{c}\varepsilon = \varepsilon$ 成立.

(4) 正确. 对任给的 $\varepsilon>0$,取 $m\in\mathbf{N}_+$,使 $\frac{1}{m}<\varepsilon$. 按假设,存在 $N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<\frac{1}{m}<\varepsilon$ 成立.

4 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n=\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$,问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$?求出 N,使当 $n>N$ 时 x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε. 当 $\varepsilon=0.001$ 时,求出数 N.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 证明如下:因为

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant\left|\frac{1}{n}\right|\cdot\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant\frac{1}{n},$$

$\forall\varepsilon>0$,要使 $|x_n-0|<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 即可. 得证.

当 $\varepsilon=0.001$ 时,$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=1000$,即若取 $\varepsilon=0.001$,只要 $n>1000$,就有

$$|x_n-0|<0.0001.$$

5 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}=1$.

【证】 (1) $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,则当 $n>N$ 时,有 $\frac{1}{n}<\varepsilon$,就有 $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

(2) $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,则当 $n>N$ 时,就有 $\frac{1}{n}<\varepsilon$,从而有

$$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{n}<\varepsilon,\text{即}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}.$$

(3) $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{a^2}{\varepsilon}\right]+1$,则当 $n>N$ 时,有 $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{a^2}$,即 $\frac{a^2}{n}<\varepsilon$. 那么有

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n}<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$$

(4) 因为 $|a_n-1|=\left|0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}-1\right|=\frac{1}{10^n}$, 故对任意的 $\varepsilon>0$, 要使 $|a_n-1|=|0.999\cdots9-1|<\varepsilon$,只须 $10^n>\frac{1}{\varepsilon}$,即 $n>\lg\frac{1}{\varepsilon}$,于是对任意的 $\varepsilon>0$,取 $N=\max\left\{\lg\frac{1}{\varepsilon},0\right\}$,当 $n>N$ 均有: $|a_n-1|=\left|0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}-1\right|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}=1$.

❻ 若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.并举例说明:如果数列$\{|x_n|\}$有极限,但数列$\{x_n\}$未必有极限.

【证】 因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,即$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$.当$n>N$时,有$|u_n-a|<\varepsilon$.又因为$||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|$,所以$||u_n|-|a||<\varepsilon$,故$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

但是反过来未必成立.例如,$x_n=(-1)^n$,$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1$,但$\{x_n\}$的极限不存在.

❼ 设数列$\{x_n\}$有界,又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

【证】 因为数列$\{x_n\}$有界,即$\exists M>0,\forall n$,有$|x_n|\leqslant M$.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,即$\forall\varepsilon>0$,令$\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}$,$\exists N>0$,当$n>N$时,有$|y_n|<\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}$,

所以 $|x_ny_n-0|=|x_n||y_n|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

❽ 对于数列$\{x_n\}$,若$x_{2k-1}\to a\ (k\to\infty)$,$x_{2k}\to a\ (k\to\infty)$,证明:$x_n\to a(n\to\infty)$.

【证】 因为$x_{2k-1}\to a,x_{2k}\to a(k\to\infty)$,所以$\forall\varepsilon>0$,存在正整数$k_1,k_2$,当$k>k_1$时,有$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$;当$k>k_2$时,有$|x_{2k}-a|<\varepsilon$.于是取$N=\max\{2k_1-1,2k_2\}$,则当$n>N$时,有$|x_n-a|<\varepsilon$.故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,即$x_n\to a(n\to\infty)$.

习题1-3 函数的极限

❶ 对图1.3-1所示的函数$f(x)$,求下列极限,如极限不存在,说明理由.

(1) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$; (2) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$; (3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=0$. (2) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-1$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在,因为$f(0^+)\neq f(0^-)$.

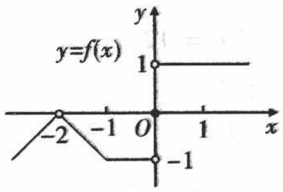


图1.3-1

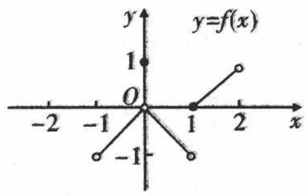


图1.3-2

❷ 对图1.3-2所示的函数$f(x)$,下列陈述中哪些是对的,哪些是错的?

(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在; (2) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$; (4) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$;

(5) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在; (6) 对每个$x_0\in(-1,1)$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在.

【解】 (1) 错,$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在与否,与$f(0)$的值无关.

(2) 对,因为$f(0^+)=f(0^-)=0$.

(3) 错，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 的值与 $f(0)$ 的值无关.

(4) 错，$f(1^+)=0$，但 $f(1^-)=-1$，故 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在.

(5) 对，因为 $f(1^-)\neq f(1^+)$.　　(6) 对.

3 对图 1.3－3 所示的函数，下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？

(1) $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=1$；　　(2) $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$ 不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$；　　(4) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$；

(5) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$；　　(6) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$；

(7) $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=0$；　　(8) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$.

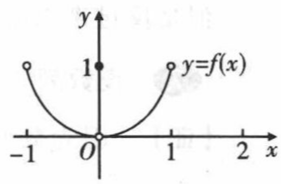


图 1.3－3

【解】 (1) 对.

(2) 对，因为当 $x<-1$ 时，$f(x)$ 无定义.

(3) 对，因为 $f(0^+)=f(0^-)=0$.

(4) 错，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 的值与 $f(0)$ 的值无关.

(5) 对.　　(6) 对.　　(7) 对.

(8) 错，因为当 $x>2$ 时，$f(x)$ 无定义，$f(2^+)$ 不存在.

4 求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to0$ 时的极限是否存在.

【解】 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}1=1$，　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}1=1$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$. 又

$$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}\varphi(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)$ 不存在.

5 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$；　　(2) $\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$；

(3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$；　　(4) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

【证】 (1) 因为 $|(3x-1)-8|=3|x-3|$，因此，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$，只须 $0<|x-3|<\delta$ 时，恒有　$|(3x-1)-8|=3|x-3|<3\delta=\varepsilon$，所以　$\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$.

(2) 因为 $|(5x+2)-12|=5|x-2|$，因此，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有

$$|(5x+2)-12|=5|x-2|<5\delta=\varepsilon,$$

所以　$\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$.

(3) 因为 $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=|x-2+4|=|x+2|$，因此，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-(-2)|=|x+2|<\delta$ 时，恒有　$\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=|x+2|<\delta=\varepsilon$，

所以 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$.

(4) 因为 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|(1-2x)-2|=2\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$,因此,$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,则当 $0<\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|=\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\delta$ 时,恒有 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=2\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<2\delta=\varepsilon$.

所以 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

6 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$;　　　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

【证】 (1) 因为 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2|x|^3}$,因此 $\forall\varepsilon>0$,令 $\dfrac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$,解得 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$,若取 $M=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$,则当 $|x|>M$ 时,恒有 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,因此,$\forall\varepsilon>0$,令 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$,解得 $x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$. 取 $M=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,则当 $x>M$ 时,就有 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$,此即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

7 当 $x\to2$ 时,$y=x^2\to4$,问 δ 等于多少,使当 $|x-2|<\delta$ 时,$|y-4|<0.001$?

【解】 因为 $x\to2$,$|x-2|\to0$,所以不妨设 $|x-2|<1$,即 $1<x<3$. 要使

$$|x^2-4|=|x+2||x-2|<5|x-2|<0.001,\text{只要}$$

$$|x-2|<\frac{0.001}{5}=0.0002,$$

取 $\delta=0.0002$,则当 $0<|x-2|<\delta$ 时,就有 $|x^2-4|<0.001$.

【评注】 本题证明中,先限定 $|x-2|<1$,其目的是在 $|x^2-4|=|x+2||x-2|$ 中,将 $|x+2|$ 放大为 5,从而去掉因子 $|x+2|$,再令 $5|x-2|<\varepsilon$,由此可以求出 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$,继而找到 δ. 这在按定义证明极限时,也是经常采用的一种方法.

8 当 $x\to\infty$ 时,$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to1$. 问 X 等于多少,使当 $|x|>X$ 时,$|y-1|<0.01$?

【解】 因为 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\dfrac{4}{x^2+3}<\dfrac{4}{x^2}$,要使 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|<0.01$,只要 $\dfrac{4}{x^2}<0.01$,即 $|x|>20$,取 $X=20$,则当 $|x|>X$ 时,就有 $|y-1|<0.01$.

9 证明:函数 $f(x)=|x|$ 当 $x\to0$ 时极限为零.

【证】 $\forall\varepsilon>0$,令 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x-0|=|x|<\delta$ 时,恒有 $||x|-0|=|x|<\varepsilon$,此即 $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$.

10 证明:若 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限都存在且等于 A,则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

【证】 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$,则 $\forall \varepsilon > 0, \exists X_1 > 0$,当 $x > X_1$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$;对上面的 $\varepsilon > 0$,由 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$,则 $\exists X_2 > 0$,当 $x < -X_2$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$,取 $X = \max\{X_1, X_2\}$,则当 $|x| > X$ 时,有 $x > X$ 或 $x < -X$,因而有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,得证.

11 根据函数极限定义证明:函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在且相等.

【证】 先证必要性. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \forall \varepsilon > 0$,则 $\exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \qquad ①$$

因而当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时 $\Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta$,有 ① 式成立,从而有

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A.$$

当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时 $\Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta$,也有 ① 式成立. 此即 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$.

再证充分性. 设 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$,那么 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$,当 $0 < x - x_0 < \delta_1$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. $\exists \delta_2 > 0$,当 $0 < x_0 - x < \delta_2$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

如果令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

12 试给出 $x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性的定理,并加以证明.

【解】 $x\to\infty$ 时,函数极限的局部有界性定理:如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$,那么存在常数 $M > 0$ 和 $X > 0$,当 $|x| > X$ 时,有 $|f(x)| < M$.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$,所以取 $\varepsilon = 1$,则 $\exists X > 0$,当 $|x| > X$ 时,有

$$|f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| = |f(x) - A + A| \leqslant |f(x) - A| + |A| \leqslant |A| + 1.$$

记 $M = |A| + 1$,上述定理得证.

习题 1 - 4 无穷小与无穷大

1 两个无穷小的商是否一定是无穷小?举例说明之.

【解】 不一定. 例如当 $x\to 0$ 时,$|x|$ 与 x 均为无穷小,但 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

2 根据定义证明:

(1) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ 为当 $x\to 3$ 时的无穷小; (2) $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷小.

【证】 (1) 设 $\varepsilon > 0$ 为任意给定正数,要使 $|f(x) - 0| = \left|\dfrac{x^2 - 9}{x + 3} - 0\right| = |x - 3| < \varepsilon, x \neq -3$,须且只须 $0 < |x - 3| < \varepsilon$ 且 $x \neq -3$,因此令 $\delta = \min(\varepsilon, 3)$,则当 $0 < |x - 3| < \delta$ 时,恒有

$$|f(x) - 0| = \left|\frac{x^2 - 9}{x + 3} - 0\right| < \varepsilon.$$ 由定义知,当 $x\to 3$ 时,$y = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ 为无穷小.

(2) $\forall \varepsilon > 0$,取 $\delta = \varepsilon$,那么,当 $0 < |x| < \delta$ 时,有 $|y - 0| = \left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant |x| < \varepsilon$,此即

$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$．故当 $x\to 0$ 时，$y=x\sin\frac{1}{x}$ 为无穷小．

3 根据定义证明：函数 $y=\frac{1+2x}{x}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷大．问 x 应满足什么条件，能使 $|y|>10^4$？

【证】 因为 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|2+\frac{1}{x}\right|\geqslant\left|\frac{1}{x}\right|-2$，$\forall M>0$，只要取 $\delta=\frac{1}{M+2}$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，就有 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|>M$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2x}{x}=\infty$．即当 $x\to 0$ 时，$y=\frac{1+2x}{x}$ 为无穷大．

当 $M=10^4$ 时，取 $\delta=\frac{1}{10^4+2}$，则当 $0<|x|<\frac{1}{10^4+2}$ 时，能使 $|y|>10^4$．

4 求下列极限并说明理由：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x}$．

【解】 (1) 因为 $\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}$，而当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 为无穷小量，故由【定理1】(在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）中，函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 是无穷小．) 知 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=2$；

(2) 由于 $\frac{1-x^2}{1-x}=1+x\left(|x|<\frac{1}{2}\text{ 时}\right)$，而当 $x\to 0$ 时，x 为无穷小量，故由【定理1】知

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x}=1.$$

5 根据函数极限或无穷大定义，填写下表：

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.			
$x\to x_0^+$				
$x\to x_0^-$				
$x\to\infty$		$\forall M>0$，$\exists X>0$，使当 $\|x\|>X$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$.		
$x\to+\infty$				
$x\to-\infty$				

【解】

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，即有 $f(x)<-M$.
$x\to x_0+0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，即有 $f(x)<-M$.
$x\to x_0-0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当 $0>x-x_0>\delta$ 时，即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当 $0>x-x_0>-\delta$ 时即有 $f(x)<-M$.
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使当 $\lvert x\rvert>X$ 时，即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当 $\lvert x\rvert>X$ 时，即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当 $\lvert x\rvert>X$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当 $\lvert x\rvert>X$ 时，即有 $f(x)<-M$.
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使当 $x>X$ 时，即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当 $x>X$ 时，即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当 $x>X$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当 $x>X$ 时，即有 $f(x)<-M$.
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使当 $x<-X$ 时，即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当 $x<-X$ 时，即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当 $x<-X$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当 $x<-X$ 时，即有 $f(x)<-M$.

6 函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界？这个函数是否为 $x\to+\infty$ 时的无穷大？为什么？

【解】 取 $x_n=2n\pi$，则 $y_n=x_n\cos x_n=2n\pi\to+\infty$.（当 $n\to+\infty$）. 即证 $y=x\cos x$ 是无界量.

再取 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，则 $y_n=\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，因此该函数当 $x\to+\infty$ 时，不是无穷大.

7 证明:函数 $y = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界,但这个函数不是 $x \to 0^+$ 时的无穷大.

【证】 $\forall M > 0$,取充分大的正整数 k,使 $2k\pi + \frac{\pi}{2} > M$. 令 $x_0 = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$,显然 $x_0 \in (0, 1]$,则有 $\frac{1}{x_0}\sin\frac{1}{x_0} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} > M$,故函数 $y = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界.

取 $x_n = \frac{1}{n\pi}$,当 $n \to \infty$ 时,$x_n \to 0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} n\pi\sin n\pi = 0$,故当 $x \to +0$ 时,函数 $y = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不是无穷大.

8 求函数 $f(x) = \frac{4}{2 - x^2}$ 的图形的渐近线.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$,所以 $y = 0$ 是函数图形的水平渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}} f(x) = \infty$,$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x) = \infty$,所以 $x = -\sqrt{2}$ 及 $x = \sqrt{2}$ 都是函数图形的铅直渐近线.

习题 1－5　极限运算法则

1 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+5}{x-3}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^2+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$;

(5) $\lim\limits_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$;

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$;

(9) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)$;

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$;

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n^2}$;

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$;

(14) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

【解】 (1) 原式 $= \frac{\lim\limits_{x\to2}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to2}(x-3)} = -9$.

(2) 原式 $= \frac{3-3}{3+1} = 0$.

(3) 原式 $= \lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x+1} = 0$.

(4) 原式 $= \lim\limits_{x\to0}\frac{(4x^2-2x+1)}{x(3x+2)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{4x^2-2x+1}{3x+2} = \frac{1}{2}$.

(5) 原式 $= \lim\limits_{h\to0}\frac{2hx+h^2}{h} = 2x$.

(6) 原式 $= 2 - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 2$.

(7) 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$.

(8) 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-3\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = 0$.

(9) 原式 $=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-1)}=\dfrac{2}{3}$. (10) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=2$.

(11) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}=2$. (12) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n(n-1)}{2}}{n^2}=\dfrac{1}{2}$.

(13) 原式 $=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{n}$

$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)=\frac{1}{5}.$$

(14) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-1$.

2 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

【解】 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=\dfrac{(2-2)^2}{2^3+2\cdot 2^2}=\dfrac{0}{16}=0$,所以 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\infty$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0+0=0$,

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}=\infty$.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^3-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=0$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty$.

3 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

【解】 (1) 因为 $x\to 0$ 时,x^2 为无穷小量,而 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$,$\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界变量,又因为有界变量与无穷小量之积仍为无穷小量,所以 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

(2) 因为在 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x}$ 为无穷小量,而 $|\arctan x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,$\arctan x$ 为有界变量,所以根据无穷小量与有界变量之积一定为无穷小量,得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\arctan x=0$.

4 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$. 下列陈述中哪些是对的,哪些是错的?如果是对的,说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) $a_n<b_n$,$n\in\mathbf{N}^+$; (2) $b_n<c_n$,$n\in\mathbf{N}^+$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

【解】 (1) 错. 例如 $a_n=\dfrac{1}{n}$,$b_n=\dfrac{n}{n+1}$,$n\in\mathbf{N}^+$,当 $n=1$ 时,$a_1=1>\dfrac{1}{2}=b_1$,故对任意

$n \in \mathbf{N}^+$ $a_n < b_n$ 不成立.

(2) 错. 例如 $b_n = \dfrac{n}{n+1}, c_n = (-1)^n n, n \in \mathbf{N}^+$,则当 n 为奇数时,$b_n < c_n$ 不成立.

(3) 错. 例如 $a_n = \dfrac{1}{n^2}, c_n = n, n \in \mathbf{N}^+$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n = 0$.

(4) 对. 因为,若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n c_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}$ 也存在,与已知条件矛盾.

5 下列陈述中,哪些是对的,哪些是错的?如果是对的,说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在,那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在;

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都不存在,那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在;

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在,那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 不存在.

【解】 (1) 对. 因为,若 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] - \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 也存在,与已知条件矛盾.

(2) 错. 例如 $f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = -\operatorname{sgn} x$ 在 $x \to 0$ 时的极限都不存在,但 $f(x)+g(x) \equiv 0$ 在 $x \to 0$ 时的极限存在.

(3) 错. 例如 $\lim\limits_{x\to 0} x = 0, \lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在,但 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$.

6 证明本节定理 3 中的(2):如果 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,证明

$$\lim[f(x)\cdot g(x)] = AB = [\lim f(x)][\lim g(x)].$$

【证】 由假设有 $f(x) = A + \alpha$, $g(x) = B + \beta$,其中 α, β 为无穷小. 于是

$$f(x)g(x) = AB + (A\beta + B\alpha + \alpha\beta).$$

由于 $A\beta + B\alpha + \alpha\beta$ 为无穷小,所以 $\lim[f(x)g(x)] = AB = [\lim f(x)]\cdot[\lim g(x)]$.

习题 1－6 极限存在准则 两个重要极限

1 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin wx}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$; (5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{2^n}$($x$ 是不为 0 的常数).

【解】 (1) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin wx}{wx}\cdot w \xlongequal{令\ t = xw} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}\cdot w = w$.

(2) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3 \xlongequal{令\ t = 3x} 3\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 3$.

(3) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x} = \dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin 5x}{5x}} = \dfrac{2}{5}$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}=1.$

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=2.$

(6) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\cdot x\xlongequal{令 t=\frac{x}{2^n}}x\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=x.$

2 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}$($k$ 为正整数).

【解】 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\{[1+(-x)]^{\frac{1}{-x}}\}^{-1}=\mathrm{e}^{-1}.$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=\mathrm{e}^2.$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^2=\mathrm{e}^2.$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^k=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{(-x)}\right]^{(-x)(-k)}=\mathrm{e}^{-k}.$

3 根据函数极限的定义,证明极限存在的准则 I′.

【证】 先设(1)$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$;(2) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

要证:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

$\forall\varepsilon>0$,由$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$,$\exists\delta_1>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_1$时,$|g(x)-A|<\varepsilon$,

即 $$A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon. \qquad ①$$

由$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,对上面的$\varepsilon>0$,$\exists\delta_2>0$,使当$0<|x-x_0|<\delta_2$时,

$$|h(x)-A|<\varepsilon,即 A-\varepsilon<h(x)<A+\varepsilon. \qquad ②$$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当$0<|x-x_0|<\delta$时,① 式与 ② 式同时成立,又$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,则有$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.因此由定义有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

再设(1)$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$;(2) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,要证:$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

$\forall\varepsilon>0$,由$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=A$,可知 $\exists X_1>0$,当$|x|>X_1$时,就有

$$|g(x)-A|<\varepsilon,$$

即 $$A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon. \qquad ①'$$

又$\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=A$,对上面的$\varepsilon>0$,$\exists X_2>0$,当$|x|>X_2$时,就有$|h(x)-A|<\varepsilon$,即

$$A-\varepsilon<h(x)<A+\varepsilon. \qquad ②'$$

又由于$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,对前面$\forall\varepsilon>0$,取$X=\max\{X_1,X_2\}$,只要$|x|>X$,由①′、②′就有$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$,即 $|f(x)-A|<\varepsilon$,因此$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

4 利用极限存在准则证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$；

(3) 数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$ 的极限存在；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$；　　(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

【证】 (1) 因 $1\leqslant\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\leqslant 1+\dfrac{1}{n}$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$,

故由夹逼准则知,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$.

(2) 因为$\dfrac{1}{n^2+\pi}\geqslant\dfrac{1}{n+2\pi}\geqslant\cdots\geqslant\dfrac{1}{n^2+n\pi}$,所以

$$n\cdot\frac{n}{n^2+n\pi}=n\left(\frac{1}{n^2+n\pi}+\frac{1}{n^2+n\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)$$
$$\leqslant n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant n\cdot\frac{n}{n^2+\pi}.$$

而 $$\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{n}{n^2+n\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{n}{n^2+\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}}=1,$$

由极限存在准则可知,原极限 = 1.

(3) $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\quad(n=1,2,\cdots)$,$x_1=\sqrt{2}$.

① 先证数列 x_n 有界：当 $n=1$,$x_1=\sqrt{2}<2$,假定 $n=k$ 时 $x_k<2$；当 $n=k+1$ 时,$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}<2$,所以 $x_n<2\ (n=1,2,\cdots)$.

② 再证数列 x_n 单调递增：因为

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\frac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=\frac{-(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n},$$

由 $x_n<2$(① 已证得) 得 $x_{n+1}-x_n>0$.　所以 $x_n\geqslant x_1=\sqrt{2}$.

根据 ①、② 知$\{x_n\}$为单调有界数列,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

由于　$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$,　$x_{n+1}^2=2+x_n$,　$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(2+x_n)$,得 $A^2=2+A$.

$A^2-A-2=0$ 得 $A_1=2,A_2=-1$(舍去).

故　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

(4) 因 $\sqrt[n]{1+x}\geqslant 1$,且 $\sqrt[n]{1+x}\leqslant 1+|x|$,于是 $1-|x|\leqslant\sqrt[n]{1+x}\leqslant 1+|x|$.

又$\lim\limits_{x\to 0}(1\pm|x|)=1$,由夹逼准则知：$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$.

(5) $x>0$ 时,$\dfrac{1}{x}-1\leqslant\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant\dfrac{1}{x}$,于是 $\left(\dfrac{1}{x}-1\right)x\leqslant x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant x\cdot\dfrac{1}{x}=1$.

而 $$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-1\right)x=\lim_{x\to0^+}\frac{1-x}{x}\cdot x=\lim_{x\to0^+}(1-x)=1,\quad \lim_{x\to0^+}1=1,$$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$

习题 1－7 无穷小的比较

1 当 $x\to0$ 时，$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比，哪一个是高阶无穷小？

【解】 $x^2-x^3=o(2x-x^2)$．因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-x^3}{2x-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x^2}{2-x}=0,$

因此，当 $x\to0$ 时，x^2-x^3 是 $2x-x^2$ 的高阶无穷小．

2 当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 与 $\sin^2x$ 相比，哪一个是高阶无穷小？

【解】 因为$\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)^2=0$，$\lim\limits_{x\to0}\sin^2x=0$，

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2}{x^2}=0,$$

所以当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 是比 $\sin^2x$ 高阶的无穷小．

3 当 $x\to1$ 时，无穷小 $1-x$ 和(1)$1-x^3$，(2)$\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶？是否等价？

【解】 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}(1+x+x^2)=3$，所以 $1-x^3$ 与 $1-x$ 为同阶无穷小．

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1+x}{2}=1$，所以$\frac{1}{2}(1-x^2)$ 与$(1-x)$ 为等价无穷小．

4 证明：当 $x\to0$ 时，有：(1) $\arctan x\sim x$； (2)$\sec x-1\sim\frac{1}{2}x^2$.

【证】 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}\overset{y=\arctan x}{=\!=\!=}\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{\tan y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\cos y}{\frac{\sin y}{y}}=1$，所以当 $x\to0$ 时，$\arctan x\sim x$．

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\sec x-1}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=1,$$

故当 $x\to0$ 时，$\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}$.

5 利用等价无穷小的性质，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{2x}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$ (n,m 为正整数)；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}$； (4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

【解】 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$.

(2) 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^n}{x^m} = \begin{cases} 1, & \text{当 } n = m \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } n > m \text{ 时}, \\ \infty, & \text{当 } n < m \text{ 时}. \end{cases}$

(3) 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x(1 - \cos x)}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \dfrac{1}{2}$.

(4) 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x\left(1 - \dfrac{1}{\cos x}\right)}{(\sqrt[3]{1 + x^2} - 1)(\sqrt{1 + \sin x} - 1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x(\cos x - 1)(\sqrt{1 + \sin x} + 1)}{(\sqrt[3]{1 + x^2} - 1)\sin x}$

因为当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x, \cos x - 1 \sim -\dfrac{1}{2}x^2, \sqrt[3]{1 + x^2} - 1 \sim \dfrac{1}{3}x^2$，

所以原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right) \cdot (\sqrt{1 + \sin x} + 1)}{\dfrac{1}{3}x^2} = -\dfrac{3}{2} \cdot 2 = -3$.

6 证明无穷小的等价关系具有下列性质：

(1) $\alpha \sim \alpha$（自反性）；(2) 若 $\alpha \sim \beta$，则 $\beta \sim \alpha$（对称性）；

(3) 若 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$，则 $\alpha \sim \gamma$（传递性）.

【证】 (1) 因为 $\lim \dfrac{\alpha}{\alpha} = 1$，故 $\alpha \sim \alpha$.

(2) 因为 $\alpha \sim \beta$，即 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$，故 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{1}{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{1}{\lim \dfrac{\alpha}{\beta}} = 1$，从而 $\beta \sim \alpha$.

(3) 由于 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$，因此 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 1, \lim \dfrac{\beta}{\gamma} = 1$，故

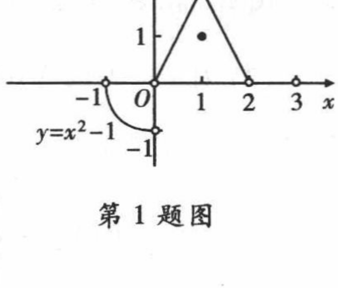
$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = \lim\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma}\right) = \lim \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lim \frac{\beta}{\gamma} = 1.$$

从而 $\alpha \sim \gamma$.

习题 1－8　函数的连续性与间断点

1 设 $y = f(x)$ 的图形如图所示，试指出 $f(x)$ 的全部间断点，并对可去间断点补充或修改函数值的定义，使它成为连续点.

【解】 $x = -1, 0, 1, 2, 3$ 均为 $f(x)$ 的间断点，除 $x = 0$ 外它们均为 $f(x)$ 的可去间断点. 补充定义 $f(-1) = f(2) = f(3) = 0$，修改定义使 $f(1) = 2$，则它们均成为 $f(x)$ 的连续点.



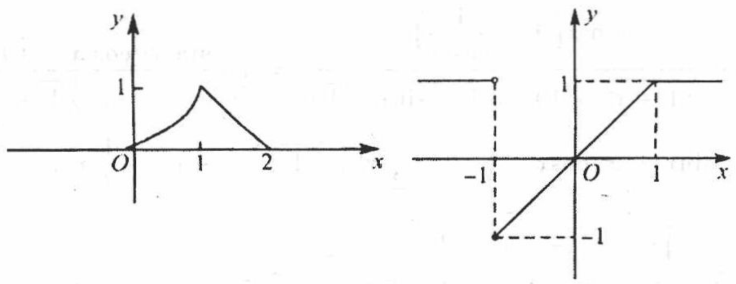
第 1 题图

2 研究下列函数的连续性，并画出函数的图形：

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$

(2)$f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x<-1 \text{ 或 } x>1.\end{cases}$

【解】 (1) 显然$f(x)$在$[0,1]$和$[0,2]$上连续,而$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}x^2=1$, $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}(2-x)=1$,所以,$\lim\limits_{x\to1}f(x)=1=f(1)$,故$f(x)$在$x_0=1$处连续. 因此,$f(x)$在$[0,2]$上连续. 函数图形如图(a)所示.



第 2 题图

(2) 显然,$f(x)$在$(-\infty,-1)$与$(-1,+\infty)$内连续,又$\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to-1+0}x=-1=f(-1)$, $\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0}1=1$,故$f(x)$在$x=-1$处间断,但右连续. 函数图形如图(b)所示.

3 下列函数在指出的点处间断,说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点,则补充或改变函数的定义使它连续:

(1)$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, $x=1$, $x=2$;

(2)$y=\dfrac{x}{\tan x}$, $x=k\pi$, $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$;

(3)$y=\cos^2\dfrac{1}{x}$, $x=0$;

(4)$y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1,\\ 3-x, & x>1,\end{cases}$ $x=1$.

【解】 (1) 对$x=1$,因为$f(1)$无定义,但

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x-2}=-2,$$

所以,$x=1$为第一类间断点(可去间断点),重新定义函数:

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}, & x\neq 1,2,\\ -2, & x=1,\end{cases}$$

则$f_1(x)$在$x=1$处连续.

因为$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$,所以$x=2$为第二类间断点(无穷间断点).

(2) 对$x=0$,因为$f(0)$无定义,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1$,所以$x=0$为第一类间断点(可去间断点),重新定义函数:

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, & x\neq k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2},(k\in\mathbf{Z}),\\ 1, & x=0\end{cases}$$

则 $f_1(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

对 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$,因为 $\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty$,所以 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第二类间断点(无穷间断点).

对 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,因为 $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}=0$,而函数在 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 处无定义,所以 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$ 为第一类间断点(可去间断点),重新定义函数:

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, & x\neq k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z}),$$

则 $f_2(x)$ 在 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 处连续.

(3) 对 $x=0$,因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\cos^2\dfrac{1}{x}$ 及 $\lim\limits_{x\to0^-}\cos^2\dfrac{1}{x}$ 均不存在,所以 $x=0$ 为第二类间断点.

(4) 对 $x=1$,因为 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(3-x)=2$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$,即左、右极限不相等,所以 $x=1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

【注】 在讨论分段函数的连续性时,在函数的分段点处,必须分别考虑函数的左连续性和右连续性,只有函数在该点既左连续,又右连续,才能得出函数在该点连续.

4 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性,若有间断点,判别其类型.

【解】 当 $|x|<1$ 时, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=x$;当 $|x|=1$ 时, $f(x)=0$;

当 $|x|>1$ 时, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^{2n}}-1}{\dfrac{1}{x^{2n}}+1}x=-x$.

综上有 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -x, & |x|>1.\end{cases}$

由 $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}x=1$, $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}(-x)=-1$,知 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点,即第一类间断点.

由 $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0}(-x)=1$, $\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to-1+0}x=-1$,知 $x=-1$ 也是跳跃间断点,即第一类间断点.

5 下列陈述中,哪些是对的,哪些是错的?如果是对的,说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) 如果函数 $f(x)$ 在 a 连续,那么 $|f(x)|$ 也在 a 连续;

(2) 如果函数 $|f(x)|$ 在 a 连续,那么 $f(x)$ 也在 a 连续.

【解】 (1) 对. 因为 $\big||f(x)|-|a|\big|\leqslant|f(x)-a|\to0(x\to a)$,所以 $|f(x)|$ 也在 a 连续.

(2) 错. 例如$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$则$|f(x)|$在$a=0$处连续,而$f(x)$在$a=0$处不连续.

6 证明:若函数$f(x)$在点x_0连续且$f(x_0)\neq 0$,则存在x_0的某一邻域$U(x_0)$,当$x\in U(x_0)$时,$f(x)\neq 0$.

【证】 若$f(x_0)>0$,因为$f(x)$在x_0连续,所以取$\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0)>0$,$\exists\delta>0$,当$x\in U(x_0,\delta)$时,有$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\frac{1}{2}f(x_0)$,即 $0<\frac{1}{2}f(x_0)<f(x)<\frac{3}{2}f(x_0)$;

若$f(x_0)<0$,因为$f(x)$在x_0连续,所以取$\varepsilon=-\frac{1}{2}f(x_0)>0$,$\exists\delta>0$,当$x\in U(x_0,\delta)$时,有$\left|f(x)-f(x_0)\right|<-\frac{1}{2}f(x_0)$,即 $\frac{3}{2}f(x_0)<f(x)<\frac{1}{2}f(x_0)<0$.

因此,不论$f(x_0)>0$或$f(x_0)<0$,总存在x_0的某一邻域$U(x_0)$,当$x\in U(x_0)$时,$f(x)\neq 0$.

7 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^C,\end{cases}$ 证明:(1)$f(x)$在$x=0$连续;(2)$f(x)$在非零的x处都不连续.

【证】 (1)$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\varepsilon$,则当$|x-0|=|x|<\delta$时,

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)|\leqslant|x|<\varepsilon,$$

故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$,即$f(x)$在$x=0$连续.

(2) 我们证明:$\forall x_0\neq 0$,$f(x)$在x_0不连续.

若$x_0=r\neq 0,r\in\mathbf{Q}$,则$f(x_0)=f(r)=r$.

分别取一有理数列$\{r_n\}:r_n\to r(n\to\infty)$,$r_n\neq r$;取一无理数列$\{s_n\}:s_n\to r(n\to\infty)$,则

$$\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}r_n=r,\quad \lim_{n\to\infty}f(s_n)=\lim_{n\to\infty}0=0,$$

而$r\neq 0$,由函数极限与数列极限的关系知$\lim\limits_{x\to r}f(x)$不存在,故$f(x)$在r处不连续.

若$x_0=s,s\in\mathbf{Q}^C$. 同理可证:$f(x_0)=f(s)=0$,但$\lim\limits_{x\to s}f(x)$不存在,故$f(x)$在s处不连续.

8 试举出具有以下性质的函数$f(x)$的例子:

$x=0,\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{2},\cdots,\pm n,\pm\frac{1}{n},\cdots$是$f(x)$的所有间断点,且它们都是无穷间断点;

【解】 设$f(x)=\cot(\pi x)+\cot\frac{\pi}{x}$,显然$f(x)$具有所要求的性质.

习题 1-9 连续函数的运算与初等函数的连续性

1 求函数$f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$的连续区间,并求极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$,$\lim\limits_{x\to -3}f(x)$及$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

【解】 因为$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$,因此$f(x)$的定义域$D=(-\infty,-3)\cup(-3,2)\cup(2,+\infty)$. 故$f(x)$连续区间为$(-\infty,-3),(-3,2),(2,+\infty)$,且

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to -3}f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-1}{x-2}=-\frac{8}{5},\quad \lim_{x\to 2}f(x)=\infty.$$

2 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续，证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\},\quad \psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

在点 x_0 也连续.

【证】 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\dfrac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$,

$$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|],$$

又，若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续；连续函数的和、差仍连续，故 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 在点 x_0 也连续.

3 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$;　(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3$;　(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$;　(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$;　(6) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}\xlongequal{\text{连续性}}\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x+5)}=\sqrt{5}$.

(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3=\left[\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^3=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=\ln\left[2\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=\ln\left(2\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=0$.

(4)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\\&=\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})(\sqrt{5x-4}-\sqrt{x})}{(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})(x-1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}}=\frac{4}{\sqrt{5-4}+1}=2.\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}&=\lim_{x\to\alpha}\frac{2\cos\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\cos\frac{\alpha+x}{2}\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin\frac{x-\alpha}{2}}{\frac{x-\alpha}{2}}\\&=\cos\frac{\alpha+\alpha}{2}=\cos\alpha.\end{aligned}$$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{2}{2} = 1.$$

4 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0} \ln \frac{\sin x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x/2}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$.

(7) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}-e^x+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\frac{\sin x}{x} = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right) = \ln 1 = 0$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot x} = \lim\limits_{x\to 0}[(1+3\tan a^2 x)^{1/3\tan^2 x}]^{3\tan x} = e^0 = 1$.

(5) 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}\cdot\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{3}{2}\cdot\frac{x-1}{6+x}} = e^{-\frac{3}{2}}$.

(6) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\tan x-\sin x)(\sqrt{1+\sin^2 x}+1)}{x\cdot\sin^2 x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x}}{x\sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sin x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{2}.$$

(7) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e} \xlongequal{x-e=t} \lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(e+t)-\ln e}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}{t} = \frac{1}{e}$.

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}-e^x+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)(e^x-1)}{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot x}{-\frac{1}{3}x^2} = -6$.

5 设$f(x)$在$\mathbf{R}$上连续,且$f(x)\neq 0$,$\varphi(x)$在$\mathbf{R}$上有定义,且有间断点,则下列陈述中,哪些是对的,哪些是错的?如果是对的,说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) $\varphi[f(x)]$必有间断点;　　(2) $[\varphi(x)]^2$必有间断点;

(3) $f[\varphi(x)]$未必有间断点;　　(4) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点.

【解】 (1) 错.例如$\varphi(x)=\operatorname{sgn}x$, $f(x)=e^x$, $\varphi[f(x)]\equiv 1$在$\mathbf{R}$上处处连续.

(2) 错.例如$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ -1, & x\in\mathbf{Q}^C,\end{cases}$ $[\varphi(x)]^2\equiv 1$在$\mathbf{R}$上处处连续.

(3) 对. 例如 $\varphi(x)$ 同(2), $f(x) = |x| + 1$, $f[\varphi(x)] \equiv 2$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续.

(4) 对. 因为,若 $F(x) = \dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续,则 $\varphi(x) = F(x) \cdot f(x)$ 也在 $\mathbf{R}$ 上处处连续,这与已知条件矛盾.

6 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 应当怎样选择数 a,使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数.

【解】 因 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$ 内为初等函数,故 $f(x)$ 在这两个区间内连续,而

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0}(a + x) = a = f(0), \quad \lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} e^x = 1,$$

所以 $\quad a = 1$.

习题 1 - 10　闭区间上连续函数的性质

1 假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,并且对 $[0,1]$ 上任一点 x 有 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. 试证明 $[0,1]$ 中必存在一点 c,使得 $f(c) = c$ (c 称为函数 $f(x)$ 的不动点).

【证】 设 $F(x) = f(x) - x$,则 $F(0) = f(0) \geqslant 0$, $F(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$.

若 $F(0) = 0$ 或 $F(1) = 0$,则 0 或 1 即为 $f(x)$ 的不动点;若 $F(0) > 0$ 且 $F(1) < 0$,则由零点定理,必存在 $c \in (0,1)$,使 $F(c) = 0$,即 $f(c) = c$,这时 c 为 $f(x)$ 的不动点.

2 证明方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

【证】 设函数 $f(x) = x^5 - 3x - 1$,那么 $f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上连续,且 $f(1) = -3 < 0$, $f(2) = 25 > 0$. 于是 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 内至少有一零点 ξ,亦即方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

3 证明方程 $x = a\sin x + b$ $(a > 0, b > 0)$ 至少有一个正根,并且它不超过 $a + b$.

【证】 设 $f(x) = a\sin x + b - x$, $f(x)$ 在 $[0, a + b]$ 上连续,且 $f(0) = b > 0$, $f(a + b) = a\sin(a + b) - a = a[\sin(a + b) - 1] \leqslant 0$.

当 $\sin(a + b) \neq 1$ 时,则 $f(a + b) < 0$,由零点定理,在 $(0, a + b)$ 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi) = 0$. 即 $a\sin\xi + b = \xi$,亦即方程 $x = a\sin x + b$ 在 $(0, a + b)$ 内至少有一正根 ξ.

当 $\sin(a + b) = 1$ 时,有 $f(a + b) = 0$,即方程 $f(x) = 0$ 有一正根 $a + b$.

故此方程至少有一个不超过 $a + b$ 的正根.

4 证明任一最高次幂的指数为奇数的代数方程

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$$

至少有一实根,其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}$ 均为常数, $n \in \mathbf{N}$.

【证】 当 x 的绝对值充分大时, $f(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1}$ 的符号取决于 a_0 的符号,即当 x 为正时与 a_0 同号,当 x 为负时与 a_0 异号,而 $a_0 \neq 0$. 因 $f(x)$ 是连续函数,它在某充分大的空间的两端处异号,由零点定理可知它在区间内某一点处必定为零,故方程 $f(x) = 0$ 至少有一实根.

5 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$,则在 (x_1, x_n) 内至少有一点

ξ,使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

【证】 由题设,$f(x)$ 在$[x_1,x_n]$上连续,由闭区间上连续函数的最大值和最小值定理,可知 $f(x)$ 在$[x_1,x_n]$上必取得最大值 M 与最小值 m,且有 $m\leqslant f(x_k)\leqslant M\ (k=1,2,\cdots,n)$. 则

$$m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M.$$

再由介值定理的推论知,存在 $\xi\in(x_1,x_n)$,使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

6 设函数 $f(x)$ 对于闭区间$[a,b]$上任意两点 x,y,恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$,其中 L 为正常数,且 $f(a)\cdot f(b)<0$. 证明:至少有一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

【证】 任取 $x_0\in(a,b)$,$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{L},x_0-a,b-x_0\right\}$,则当 $|x-x_0|<\delta$ 时,由假设

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant L|x-x_0|<L\delta\leqslant\varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 连续. 由 $x_0\in(a,b)$ 的任意性知,$f(x)$ 在(a,b)内连续.

当 $x_0=a$ 或 $x_0=b$ 时,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$,并将 $|x-x_0|<\delta$,换成 $x\in[a,a+\delta)$ 或 $x\in(b-\delta,b]$,便可知 $f(x)$ 在 $x=a$ 右连续,在 $x=b$ 左连续. 从而 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续.

又由假设 $f(a)\cdot f(b)<0$,由零点定理即知 $\exists\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

7 证明:若 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 必在$(-\infty,+\infty)$内有界.

【证】 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,由极限定义知,对于 $\varepsilon_0=1$,$\exists M>0$,当 $|x|>M$ 时,有 $|f(x)-A|<1$,故 $|f(x)|=|f(x)-A+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|$.

又由于 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,当然在闭区间$[-M-1,M+1]$上连续,由有界性定理,$\exists M_1>0$,对于闭区间$[-M-1,M+1]$上的一切 x,都有 $|f(x)|<M_1$,取 $\overline{M}=\max\{1+|A|,M_1\}$,则对于$(-\infty,+\infty)$内的任意 x,有 $|f(x)|<\overline{M}$,即 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界.

8 在什么条件下,(a,b)内的连续函数 $f(x)$ 为一致连续?

【解】 若 $f(a^+)$、$f(b^-)$ 均存在,设

$$F(x)=\begin{cases}f(a^+), & x=a,\\ f(x), & x\in(a,b),\\ f(b^-), & x=b,\end{cases}$$

易证 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续,从而 $F(x)$ 在$[a,b]$上一致连续,也就有 $F(x)$ 在(a,b)内一致连续,即 $f(x)$ 在(a,b)内一致连续.

总习题一

1 在"充分"、"必要"和"充分必要"三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) 数列$\{x_n\}$有界是数列$\{x_n\}$收敛的________条件. 数列$\{x_n\}$收敛是数列$\{x_n\}$有界的________条件.

(2)$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有界是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的________条件. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在是$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域内有界的________条件.

(3)$f(x)$在x_0的某一去心邻域内无界是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$的________条件. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$是$f(x)$在$x_0$的某一去心领域内无界的________条件.

(4)$f(x)$当$x\to x_0$时的右极限$f(x_0^+)$及左极限$f(x_0^-)$都存在且相等是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的________条件.

【解】 (1) 必要;充分 . (2) 必要;充分 . (3) 必要;充分 . (4) 充分必要 .

2 已知函数$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{-x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$在$x=0$连续,则$a=$________.

【解】 $a=f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{-x^2}=1$.

3 选择以下两题中给出的四个结论中一个正确的结论.

(1) 设$f(x)=2^x+3^x-2$,则当$x\to0$时,有( ).

(A)$f(x)$与x是等价无穷小 (B)$f(x)$与x同阶但非等价无穷小

(C)$f(x)$是比x高阶的无穷小 (D)$f(x)$是比x低阶的无穷小

(2) 设$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$,则$x=0$是$f(x)$的( ).

(A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点

(C) 第二类间断点 (D) 连续点

【解】 (1) 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x+3^x-2}{x}==\lim_{x\to0}\frac{2x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}$$
$$=\ln2+\ln3=\ln6\neq1,$$

所以当$x\to0$时,$f(x)$与x同阶但非等价无穷小,应选(B).

(2)$f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$,$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$,因为$f(0^+)$、$f(0^-)$均存在,但$f(0^+)\neq f(0^-)$,所以$x=0$是$f(x)$的跳跃间断点,应选(B).

4 设$f(x)$的定义域是$[0,1]$,求下列函数的定义域:

(1)$f(e^x)$; (2)$f(\ln x)$; (3)$f(\arctan x)$; (4)$f(\cos x)$.

【解】 (1) 由$0\leqslant e^x\leqslant1\Rightarrow x\leqslant0\Rightarrow f(e^x)$的定义域为$(-\infty,0]$.

(2) 由$0\leqslant\ln x\leqslant1\Rightarrow1\leqslant x\leqslant e\Rightarrow f(\ln x)$的定义域为$[1,e]$.

(3) 由$0\leqslant\arctan x\leqslant1\Rightarrow0\leqslant x\leqslant\tan1\Rightarrow f(\arctan x)$的定义域为$[0,\tan1]$.

(4) 由$0\leqslant\cos x\leqslant1\Rightarrow2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$,$n=0,\pm1,\pm2,\cdots\Rightarrow f(\cos x)$的定义域为$\left[2n\pi-\dfrac{\pi}{2},2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$,$n\in Z$.

5 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$ 求$f[f(x)]$,$g[g(x)]$,$f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

【解】 $f[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant 0,\\ f(x), & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0.\end{cases}$

$g[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)\leqslant 0,\\ -g^2(x), & g(x)>0,\end{cases}$ 而$g(x)\leqslant 0, x\in(-\infty,+\infty)$,故$g[g(x)]=0$.

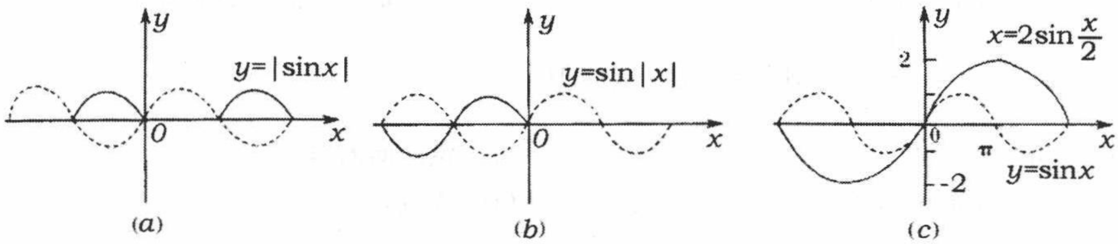
$f[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)\leqslant 0,\\ g(x), & g(x)>0,\end{cases}$ 而$g(x)\leqslant 0, x\in(-\infty,+\infty)$,故$f[g(x)]=0$.

$g[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant 0,\\ -f^2(x), & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0\end{cases}=g(x)$.

6 利用$y=\sin x$的图形作出下列函数的图形:

(1)$y=|\sin x|$;　(2)$y=\sin|x|$;　(3)$y=2\sin\dfrac{x}{2}$.

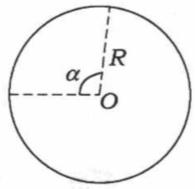
【解】 (1)$y=|\sin x|$的图形如图(a)所示;(2)$y=\sin|x|$的图形如图(b)所示;(3)$y=2\sin\dfrac{\pi}{2}$的图形如图(c)所示.



第 6 题图

7 把半径为R的一圆形铁皮,自中心处剪去中心角为α的一扇形后围成一无底圆锥.试将这圆锥的体积表为α的函数.

【解】 设圆锥的半径与高分别为r,h,则由图知



第 7 题图

$$2\pi r=R\cdot(2\pi-\alpha),\text{即}\quad r=\frac{R(2\pi-\alpha)}{2\pi}.$$

从而
$$h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\frac{(2\pi-\alpha)^2}{4\pi^2}R^2}$$
$$=\frac{1}{2\pi}R\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2},$$

故
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{R^2}{4\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\cdot\frac{1}{2\pi}R\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}$$
$$=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2},0<\alpha<2\pi.$$

8 根据函数极限的定义证明:$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

【证】 $\forall \varepsilon>0$,欲使 $\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|<\varepsilon$,只须 $|x-3|<\varepsilon$,取 $\delta=\varepsilon$,当 $0<|x-3|<\delta$ 时,就有 $|x-3|<\varepsilon$,即 $\left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

9 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$,$(a>0,b>0,c>0)$;

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}=0$,故 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}=+\infty$.

(2) $$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(3) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2x+1}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}.$$

(4) $$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3}\cdot2\sin^2\frac{x}{2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}.$$

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right)^{\frac{1}{\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1}\cdot\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{3x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=\sqrt[3]{abc}$.

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot^2x)^{\frac{\tan x}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot^2x)^{\frac{1}{\cot^2x}\cdot\frac{-\cot x}{2}}=\mathrm{e}^0=1$.

10 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x>0,\\ a+x^2, & x\leqslant0,\end{cases}$ 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,应当怎样选择数 a?

【解】 因 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 与 $(-\infty,0)$ 内连续,当 $x=0$ 时,$a=f(0)=\lim\limits_{x\to-0}f(x)$,$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}x\sin\frac{1}{x}=0$,故选 $a=0$ 时,可使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内都连续.

11 设$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0,\\ \ln(1+x), & -1<x\leqslant 0,\end{cases}$ 求$f(x)$的间断点,并说明间断点所属类型.

【解】 $f(x)$在$(-1,0),(0,1),(1,+\infty)$内都是连续的. $\lim\limits_{x\to 1+0}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0}e^{\frac{1}{x-1}}=0$, $f(0)=0$.因此,$x=1$是$f(x)$的无穷间断点,属于第二类间断点.

$$\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{1}{e},\quad \lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}\ln(1+x)=0.$$

因此,$x=0$是跳跃间断点,属于第一类间断点.

12 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$

【证】 由于$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$,而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

故由夹逼定理知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$

13 证明:方程$x+\sin x+1=0$在开区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内至少有一个根.

【证】 设$f(x)=x+\sin x+1$,则$f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上连续,且$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.因此$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内至少有一个零点,即方程$x+\sin x+1=0$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内至少有一个实根.

14 如果存在直线$L:y=kx+b$,使得当$x\to\infty$(或$x\to+\infty$,$x\to-\infty$)时,曲线$y=f(x)$上的动点$M(x,y)$到直线L的距离$d(M,L)\to 0$,则称L为曲线$y=f(x)$的渐近线.当直线L的斜率$k\neq 0$时,称L为斜渐近线.

(1) 证明:直线$L:y=kx+b$为曲线$y=f(x)$的渐近线的充分必要条件是

$$k=\lim_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}[f(x)-kx].$$

(2) 求曲线$y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$的斜渐近线.

【解】 (1) 必要性:已知$y=kx+b$是曲线$y=f(x)$的渐近线.

由定义$y=f(x)$上的动点$M(x,y)$到直线L的距离$d(M,L)\to 0$,当$x\to\infty$时,

$$d(M,L)=\sqrt{\left[\frac{kx+b-f(x)}{k^2+1}\right]^2+\left[\frac{kf(x)-k^2x-kb}{k^2+1}\right]^2}\to 0,$$

即 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}[kx+b-f(x)]=0,\quad \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}[f(x)-kx]=b,$

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right]=0$,即 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}\frac{f(x)}{x}=k.$

充分性：由 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (x\to+\infty \\ x\to-\infty)}}[f(x)-kx]=b$，即 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (x\to+\infty \\ x\to-\infty)}}[f(x)-kx-b]=0$，

即有 $d(M,L)\to 0$，故 $y=kx+b$ 是 $y=f(x)$ 的渐近线.

(2) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)}{x}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}2\cdot e^{\frac{1}{x}}=2$，

$$b=\lim_{x\to\infty}[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x]=\lim_{x\to\infty}[2x\cdot(e^{\frac{1}{x}-1})-e^{\frac{1}{x}}]=2-1=1,$$

故渐近线为 $y=2x+1$.

考研试题选解

1 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.

(A) $(-1,0)$ (B) $(0,1)$ (C) $(1,2)$ (D) $(2,3)$

【分析一】 由函数 $f(x)$ 的表达式知，它在实数轴上除点 $x=0$，$x=1$ 及 $x=2$ 外处处有定义，在它的定义域上有

$$|f(x)|=\left|\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}\right|=\frac{1}{|(x-1)(x-2)|}\cdot\left|\frac{\sin(x-2)}{x-2}\right|\leqslant\frac{1}{|(x-1)(x-2)|},$$

而在区间 $(-1,0)$ 内 $\left|\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}\right|=\dfrac{1}{(2-x)(1-x)}<\dfrac{1}{2}$，

由此可见 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 内有界，故应选(A).

【分析二】 因函数 $f(x)$ 满足：$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\infty$，从而 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$，$(1,2)$，$(2,3)$ 内都是无界的. 故应选(A).

【评注】 由于 $f(x)$ 的定义域 D 中包含区间 $[-1,0)$，而且

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=-\lim_{x\to0^-}\frac{\sin(x-2)}{(x-1)(x-2)^2}=-\frac{1}{4}\sin2,$$

从而可补充定义 $f(0)=-\dfrac{1}{4}\sin2$，使补充定义后的函数 $f(x)$ 成为有界闭区间 $[-1,0]$ 上的连续函数. 利用有界闭区间上连续函数的有界性也可判定 $f(x)$ 在 $(-1,0)\subset[-1,0]$ 上有界.

把以上思想一般化可得：若 $f(x)$ 在有界开区间 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$，其中 A,B 是两个常数，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

2 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. (B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛. (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

【分析一】 因 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，当 x_n 单调时 $\Rightarrow f(x_n)$ 单调有界 $\Rightarrow f(x_n)$ 收敛. 选(B).

【分析二】 举特例用排除法. 例如，取 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 和 $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，

且 $f(x_n)=\begin{cases}1, & n\text{ 为偶数},\\ -1, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$ 这样就排除选项(A)；若取 $f(x)=\arctan x$，$x_n=n$，则排除(C)和

(D).

3 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n y_n = 0$,则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散. (B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小. (D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小.

【分析一】 (A)、(B)、(C) 三项可举反例排除.

(A) 项显然是不正确的,因为只需取数列 $y_n \equiv 0$,就排除了它.若取数列

$$x_n = \begin{cases} 2k-1, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k, \end{cases} \quad y_n = \begin{cases} 0, & n = 2k-1, \\ 2k, & n = 2k, \end{cases} \quad k = 1,2,\cdots$$

便排除了(B)项.

对于(C)项,若数列 $x_n \equiv 0$,则 y_n 可为任何数列,所以(C)项也不正确.故只有(D)项是正确的.

【分析二】 直接利用无穷小量的性质也可以推出(D)为正确选项.由 $y_n = (x_n y_n)\cdot\dfrac{1}{x_n}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n y_n = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n} = 0$ 可知 y_n 为两个无穷小之积,故 y_n 亦为无穷小,应选(D).

【评注】 本题只给出一个条件 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n y_n = 0$,对数列 x_n 和 y_n 的限制在选项中给出.(A)与(C)容易被否定,因此,答错的大都填(B).表明对"无界"与"无穷大"的区别尚不十分清楚.由前面的反例可以看到,两个无界变量的乘积可以是无穷小量.

本题考查考生对数列收敛概念的掌握以及会运用举反例排除不正确断言的能力.

4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【解】 由于式中有 $e^{\frac{1}{x}}$ 与 $|x|$,故应分别考虑左、右极限.记 $f(x) = \dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$,由于

$$\lim_{x\to 0^+}f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-4/x}+e^{-3/x}}{e^{-4/x}+1}+\frac{\sin x}{x}\right) = 0+1 = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}-\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{2+0}{1+0}-1 = 1,$$

故原式 = 1.

【评注】 考生的典型错误是将 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$ 分成两个极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$ 去讨论,而这两个极限都不存在,就答原题的极限不存在.要注意,$\lim\limits_{x\to a}f(x)$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 均不存在,但 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ 可能存在.

5 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

【解】 属 $\dfrac{0}{0}$ 型极限.利用等价无穷小因子替换: $\ln(1+t)\sim t, 1-\cos t\sim\dfrac{1}{2}t^2 \quad (t\to 0)$,有

$$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\sim\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x=x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)=x\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)$$

$$\sim x\cdot\frac{\cos x-1}{3}\sim-\frac{1}{6}x^3\quad(x\to 0),$$

于是 $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

6 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$

(A) 1.　　(B) e.　　(C) e^{a-b}.　　(D) e^{b-a}.

【分析一】 用求幂指数型极限的一般方法.求

$$I=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}},$$

归结为求 $$W=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}=\lim_{x\to\infty}x\ln\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1+1\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x\cdot\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]=a-b.$$

因此 $I=e^{a-b}$.故应选(C).

【分析二】 用求 1^∞ 型极限的方法.

$$I=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-a)(x+b)+(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab}\cdot\frac{x[(a-b)x+ab]}{(x-a)(x+b)}}=e^{a-b}.$$

因此选(C).

7 设 $a\neq\dfrac{1}{2}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$ ________.

【分析】 由于 $\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\ln\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]^n=n\ln\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]$,

利用等价无穷小因子代换,有 $\ln\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]\sim\dfrac{1}{n(1-2a)}\ (n\to\infty)$.

于是 $$原式=\lim_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

8 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$ ________.

【分析一】 令 $u_n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$,$n=1,2,3,\cdots$,则当 $n=2k-1$ 时,

$$u_n=\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{-1}=\frac{2k-1}{2k}=1-\frac{1}{2k}=1-\frac{1}{n+1};$$

当 $n=2k$ 时, $u_n=\left(\dfrac{2k+1}{2k}\right)^1=1+\dfrac{1}{2k}=1+\dfrac{1}{n}$,

故 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1.$$

【分析二】 化为指数函数求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{n})}=e^0=1.$$

9 设 $0<a<b$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$

(A)a. (B)a^{-1}. (C)b. (D)b^{-1}.

【分析】 注意

$$\lim_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}}=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\left(\frac{a}{b}\right)^n}.$$

由于 $1<\sqrt[n]{1+\left(\frac{a}{b}\right)^n}<\sqrt[n]{2}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$,按极限的夹逼准则即得

$$\lim_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{a}=a^{-1}.$$

故应选(B).

【评注】 把本题的结论一般化可得:若常数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 都是正数,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}.$$

10 已知函数 $f(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$,则 $f(0)=$ ________.

【分析】 利用等价无穷小因子替换有

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2f^2(x)}{x^2f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2}f(0)=1.$$

$\Rightarrow$ $f(0)=2$.

11 当 $x\to0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$. (B)$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$. (C)$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$. (D)$1-\cos\sqrt{x}$.

【分析一】 $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln\left[1+\left(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}-1\right)\right]=\ln\left(1+\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\sim\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\sim\sqrt{x}\quad(x\to0^+)$,

因此选(B).

【分析二】 因为 $1-e^{\sqrt{x}}=-(e^{\sqrt{x}}-1)\sim-\sqrt{x}\quad(x\to0^+)$,

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1=(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}\quad(x\to0^+),$$

$$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\frac{1}{2}x\quad(x\to0^+),$$

故应选(B).

12 设当 $x\to0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小,而 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小,则正整数 n 等于

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4.

【分析】 $(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\frac{1}{2}x^2\cdot x^2=\frac{1}{2}x^4$,

$$x\sin x^n \sim x\cdot x^n = x^{n+1},\quad e^{x^2}-1\sim x^2.$$

由$\frac{1}{2}x^4 = o(x^{n+1})$，有 $n+1<4$. 由 $x^{n+1}=o(x^2)$，有 $n+1>2$. 于是 $1<n<3$，$n=2$. 选(B).

13 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$ ________.

【分析】 由
$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{kx^2(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}$$
$$=\frac{1}{2k}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\arcsin x}{x}\right)=\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4k}\xlongequal{\text{依题设}}1,$$
$\Rightarrow\ k=\frac{3}{4}$.

14 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

【分析】 不难得出 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\begin{cases}0, & a\neq 1,\text{任何 } b,\\ 1-b, & a=1,\text{任何 } b.\end{cases}$

从而，若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则必须且只需 $a=1$，$1-b=5$，即 $a=1$，$b=-4$.

【评注】 本题是包含待定常数的极限问题. 解决这类问题的基本方法是，**对待定常数的一切可能的取值求出对应的极限，然后把所得极限与要求的结果对比，从而确定待定常数的适当取值.**

在本题中极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)$中包含两个待定常数 a,b，它们都可取任何实数，从而求得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=F(a,b),$$

且 $F(a,b)=\begin{cases}0, & a\neq 1,\text{任何 } b,\\ 1-b, & a=1,\text{任何 } b.\end{cases}$ 令 $F(a,b)=5$，即可确定常数 a,b.

15 设函数 $f(x)=\frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足

(A) $a<0,b<0$.　　　　(B) $a>0,b>0$.

(C) $a\leqslant 0,b>0$.　　　　(D) $a\geqslant 0,b<0$.

【分析】 由 $f(x)$ 连续，$a+e^{bx}\neq 0$，有 $a\geqslant 0$；又由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{bx}=+\infty$，有 $b<0$. 应选(D).

16 设函数 $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则

(A) $x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

【分析】 要考察 $f(x)$ 在 $x=0,1$ 处的极限或左、右极限.

因为 $\lim\limits_{x\to0}(e^{\frac{x}{x-1}}-1)=0$， 所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$.

$\Rightarrow$ $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点．又

$$\lim_{x\to1+0}e^{\frac{x}{x-1}}=+\infty,\quad \lim_{x\to1-0}e^{\frac{x}{x-1}}=0$$

$$\Rightarrow\qquad \lim_{x\to1+0}f(x)=0,\quad \lim_{x\to1-0}f(x)=-1$$

$\Rightarrow$ $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点．因此，应选(D)．

17 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$

(A)0．　　(B)1．　　(C) $-\dfrac{\pi}{2}$．　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$．

【分析一】 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1+ee^{-\frac{1}{x}}}{1-e^{-\frac{1}{x}}e}\cdot\dfrac{\tan x}{x}\right)=1$,

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)}{(e^{\frac{1}{x}}-e)}\cdot\frac{\tan x}{x}=\frac{e}{-e}\cdot1=-1$$

$\Rightarrow x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点．选(A)．

【分析二】 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x}\cdot\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}-e}=\infty$,

$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}\cdot\tan x=\infty,$$

因此 $x=1,\pm\dfrac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点．由排除法可知应选(A)．

18 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为

(A)0．　　(B)1．　　(C)2．　　(D)3．

【分析】 $f(x)$ 只有间断点 $x=0,x=\pm1$．由于

$$f(x)=\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)|x|},$$

又 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$，故 $x=-1$ 是无穷间断点．

而 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\lim\limits_{x\to0\pm}f(x)=\pm1$，故 $x=1,0$ 不是无穷间断点．

因此选(B)．

【评注】 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，$x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点．

19 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,

$$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad 则$$

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点．

(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点．

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

【分析】 因为

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}\right) \xlongequal{\frac{1}{x}=y} \lim_{y\to\infty} f(y) = a,$$

从而,当 $a=0=g(0)$ 时 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续,当 $a\neq 0$ 时 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处间断,即 $g(x)$ 在点$x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关. 故应选(D).

20 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

【分析】 只需使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限相等且等于 $f(0)=a$ 即可. 在求右极限时,用等价无穷小代换会方便些,即 $x\to 0$ 时,$1-e^{\tan x}\sim -\tan x\sim -x$, $\arcsin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}$,则

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\frac{x}{2}} = -2,$$

而
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ae^{2x} = a = f(0).$$

由
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x),\text{得}\quad a=-2.$$

21 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,则 $c=$ ________.

【分析】 由题设知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数,且 $f(x)$ 分别在三个区间 $(-\infty,-c)$, $[-c,c]$, $(c,+\infty)$ 上连续,从而只要函数 $f(x)$ 还在点 $x=c$ 处右连续就有函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

因 $f(c)=c^2+1$ 以及 $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{2}{|x|} = \dfrac{2}{c}$,故 $f(x)$ 在点 $x=c$ 处右连续的充分必要条件为

$$c^2+1=\frac{2}{c}\iff c=1.$$

22 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$, $x_{n+1}=\sin x_n$ $(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,并求该极限;(Ⅱ) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【证明与求解】 (Ⅰ) 显然,$0<x_2=\sin x_1<x_1<\pi$, $0<x_3=\sin x_2<x_2<\pi$,易归纳证明

$$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n,$$

即 x_n 单调下降有下界 $\Rightarrow\exists$ 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \xlongequal{\text{记}} a$. 对 $x_{n+1}=\sin x_n$ 取极限,令 $n\to+\infty$ 得

$$a=\sin a\quad\Rightarrow\quad a=0.$$

(因为 $f(x)=x-\sin x$,在 $(-\infty,+\infty)$ 单调上升,有唯一零点 $x=0$).

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{x_n^2}\ln\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)}$. 而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n^2}\ln\frac{\sin x_n}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n^2}\ln\left(\frac{\sin x_n}{x_n}-1+1\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n^2}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\quad(\text{数列极限转化为函数极限})$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6},$$

故原式 $=e^{-\frac{1}{6}}$.

23 曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线方程为________.

【分析】 由水平渐近线的定义及无穷小量的性质——无穷小量与有界函数的乘积是无穷小量知

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{4\sin x}{x}}{5-\dfrac{2\cos x}{x}}=\frac{1}{5},$$

所以水平渐近线方程为 $y=\dfrac{1}{5}$.

24 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

【分析】 只有间断点 $x=0$. 由于

$$\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty,\text{故 } x=0 \text{ 为垂直渐近线}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0+\ln1=0$,故 $x\to-\infty$ 时有水平渐近线 $y=0$.

又 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right]=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-\ln e^x\right]=0+\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^x}{e^x}=0,$$

故 $x\to+\infty$ 时有斜渐近线 $y=x$.

因此选(D).

第二章　导数与微分

习题2－1　导数概念

1 设物体绕定轴旋转,在时间间隔$[0,t]$内转过角度θ,从而转角θ是t的函数:$\theta=\theta(t)$.如果旋转是匀速的,那么称$\omega=\frac{\theta}{t}$为该物体旋转的角速度.如果旋转是非均匀的,应怎样确定该物体在时刻t_0的角速度?

【解】　设此角速度值为ω,则　$\omega=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t}=\theta'(t_0)$.

2 当物体的温度高于周围介质的温度时,物体就不断冷却.若物体的温度T与时间t的函数关系为$T=T(t)$,应怎样确定该物体在时刻t的冷却速度?

【解】　设冷却速度为v,则　$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}=T'(t)$.

3 设某工厂生产x件产品的成本为

$$C(x)=2000+100x-0.1x^2(\text{元}),$$

函数$C(x)$称为成本函数,成本函数$C(x)$的导数$C'(x)$在经济学中称为边际成本.试求

(1)当生产100件产品时的边际成本;

(2)生产第101件产品的成本,并与(1)中求得的边际成本作比较,说明边际成本的实际意义.

【解】　(1)$C'(x)=100-0.2x$,$C'(100)=100-20=80$(元/件).

(2)$C(101)=2000+100\times 101-0.1\times(101)^2=11079.9$(元),

$C(100)=2000+100\times 100-0.1\times(100)^2=11000$(元),

$C(101)-C(100)=11079.9-11000=79.9$(元).

即生产第101件产品的成本为79.9元,与(1)中求得的边际成本比较,可以看出边际成本$C'(x)$的实际意义是近似表达产量达到x单位时再增加一个单位产品所需的成本.

4 设$f(x)=10x^2$,试按定义求$f'(-1)$.

【解】　$f'(-1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{10(\Delta x-1)^2-10}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(10\Delta x-20)$

$=-20$.

5 证明:$(\cos x)'=-\sin x$.

【证】　令$f(x)=\cos x$,则

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x.$$

6 下列各题中均假定$f'(x_0)$存在,按照导数定义观察下列极限,指出A表示什么:

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$,其中$f(0)=0$,且$f'(0)$存在;

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$.

【解】 (1)$A=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f[x_0+(-\Delta x)]-f(x_0)}{(-\Delta x)}=-f'(x_0)$.

(2)由于$f(0)=0$,故 $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0+x)-f(0)}{x}=f'(0)$.

(3)$A=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]=2f'(x_0)$.

7 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$则$f(x)$在$x=1$处的( ).

(A)左、右导数都存在 (B)左导数存在,右导数不存在

(C)左导数不存在,右导数存在 (D)左、右导数都不存在

【解】 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{3}(x^2+x+1)=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty,$$

故该函数左导数存在,右导数不存在,因此应选(B).

8 设$f(x)$可导,$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,则$f(0)=0$是$F(x)$在$x=0$处可导的( ).

(A)充分必要条件 (B)充分条件但非必要条件

(C)必要条件但非充分条件 (D)既非充分条件又非必要条件

【解】 $F'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+f(x)\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)+f(0),$$

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-f(x)\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)-f(0).$$

当$f(0)=0$时,$F'_+(0)=F'_-(0)$,反之当$F'_+(0)=F'_-(0)$时,$f(0)=0$,因此应选(A).

9 求下列函数的导数:

(1)$y=x^4$; (2)$y=\sqrt[3]{x^2}$; (3)$y=x^{1.6}$;

(4)$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; (5)$y=\dfrac{1}{x^2}$; (6)$y=x^3\sqrt[5]{x}$; (7)$y=\dfrac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$.

【解】 (1)$y'=4x^3$. (2)$y'=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. (3)$y'=1.6x^{0.6}$.

(4)$y'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. (5)$y'=-2x^{-3}$. (6)$y'=\dfrac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}$.

(7)$y'=\dfrac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$.

10 已知物体的运动规律为$s=t^3$(m),求这物体在$t=2$(s)时的速度.

【解】 设速度为v,则$v=s'=3t^2$,$v\big|_{t=2}=12$(m/s).

11 如果$f(x)$是偶函数,且$f'(0)$存在,证明:$f'(0)=0$.

【证】 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{-x}=-f'(0)$,

所以 $2f'(0)=0$,即 $f'(0)=0$.

12 求曲线$y=\sin x$在具有下列横坐标的各点处切线的斜率:$x=\dfrac{2}{3}\pi$; $x=\pi$.

【解】 由导数的几何意义知

$$k_1=y'\big|_{x=\frac{2}{3}\pi}=\cos x\big|_{x=\frac{2}{3}\pi}=-\frac{1}{2},\quad k_2=y'\big|_{x=\pi}=\cos x\big|_{x=\pi}=-1.$$

13 求曲线$y=\cos x$上点$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$处的切线方程和法线方程.

【解】 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=(-\sin x)\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,故在点$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$处的切线方程为

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right),\text{即}\quad \frac{\sqrt{3}}{2}x+y-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)=0.$$

在点$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$处的法线方程为 $y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$,即 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x-y+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi=0$.

14 求曲线$y=e^x$在点$(0,1)$处的切线方程.

【解】 $y'\big|_{x=0}=e^x\big|_{x=0}=1$,故在$(0,1)$处的切线方程为

$y-1=1\cdot(x-0)$,即$x-y+1=0$.

15 在抛物线$y=x^2$上取横坐标为$x_1=1$及$x_2=3$的两点,作过这两点的割线.问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线?

【解】 割线的斜率$k=\dfrac{3^2-1^2}{3-1}=\dfrac{8}{2}=4$.

假设抛物线上点(x_0,x_0^2)处的切线平行于该割线,则有$(x^2)'\big|_{x=x_0}=4$,即$2x_0=4$.

故 $x_0=2$,由此得所求点为$(2,4)$.

16 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性:

(1)$y=|\sin x|$; (2)$y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

【解】 (1) 因为$\lim\limits_{x\to 0}y=0=y\big|_{x=0}$,所以此函数在 $x=0$ 处连续.又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to -0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to -0}\frac{-\sin x}{x}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to +0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

由于$f'_-(0)\neq f'_+(0)$,故此函数在 $x=0$ 处不可导.

(2) 因$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$,又 $y(0)=0$,所以此函数在 $x=0$ 处连续.

又 $$y'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

故此函数在 $x=0$ 处可导.

17 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1,\end{cases}$为了使函数$f(x)$在 $x=1$ 处连续且可导,a,b应取什么值?

【解】 因$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}x^2=1=f(1)$, $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(ax+b)=a+b$.
要使$f(x)$在 $x=1$ 处连续,则有 $a+b=1$.又

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{ax-a}{x-1}=a,$$

要使$f(x)$在 $x=1$ 处可导,则必须$f'_-(1)=f'_+(1)$,即 $a=2$.故当 $a=2,b=-1$ 时,$f(x)$在 $x=1$ 处连续且可导.

18 设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 求$f'_+(0)$及$f'_-(0)$,又$f'(0)$是否存在?

【解】 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x^2}{x}=0$, $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{-x}{x}=-1$.

由于$f'_+(0)\neq f'_-(0)$,因此$f'(0)$不存在.

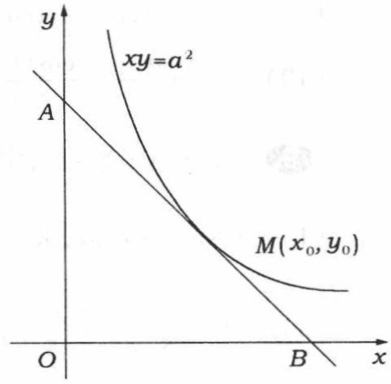
19 设$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求$f'(x)$.

【解】 当 $x<0$ 时,$f'(x)=\cos x$,当 $x>0$ 时,$f'(x)=1$.又

$$f'_+(0)=\lim_{x\to +0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad f'_-(0)=\lim_{x\to -0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{x}{x}=1,$$

所以$f'(0)=1$,即$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

20 证明：双曲线 $xy = a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.



第 20 题图

【证】 在双曲线上任取一点 $M(x_0,y_0)$，那么

$$y = \frac{a^2}{x} \Rightarrow y' = -\frac{a^2}{x^2},$$

$$y'\big|_{x=x_0} = -\left(\frac{a}{x_0}\right)^2.$$

则过 M 点的切线方程为

$$y - y_0 = -\frac{a^2}{x_0^2}(x - x_0).$$

令 $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{x_0^2 y_0}{a^2} + x_0 = \dfrac{x_0 a^2}{a^2} + x_0 = 2x_0 \Rightarrow$ 点 B 的坐标为 $(2x_0,0)$.

令 $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{a^2}{x_0} + y_0 = \dfrac{x_0 y_0}{x_0} + y_0 = 2y_0 \Rightarrow$ 点 A 的坐标为 $(0,2y_0)$.

所以 $$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|2x_0||2y_0| = 2|x_0 y_0| = 2a^2.$$

习题 2－2 函数的求导法则

1 推导余切函数及余割函数的导数公式：

$$(\cot x)' = -\csc^2 x;\quad (\csc x)' = -\csc x\cot x.$$

【解】 $(\cot x)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{-\sin x\sin x - \cos x\cos x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x;$

$(\csc x)' = \left(\dfrac{1}{\sin x}\right)' = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x\cot x.$

2 求下列函数的导数：

(1) $y = x^3 + \dfrac{7}{x^4} - \dfrac{2}{x} + 12;$

(2) $y = 5x^3 - 2^x + 3e^x;$

(3) $y = 2\tan x + \sec x - 1;$

(4) $y = \sin x\cos x;$

(5) $y = x^2\ln x;$

(6) $y = 3e^x\cos x;$

(7) $y = \dfrac{\ln x}{x};$

(8) $y = \dfrac{e^x}{x^2} + \ln 3;$

(9) $y = x^2\ln x\cos x;$

(10) $s = \dfrac{1 + \sin t}{1 + \cos t}.$

【解】 (1) $y' = 3x^2 - 28x^{-5} + 2x^{-2}.$

(2) $y' = 15x^2 - 2^x\ln 2 + 3e^x.$

(3) $y' = 2\sec^2 x + \sec x\tan x.$

(4) $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x \Rightarrow y' = \cos 2x.$

(5) $y' = 2x\ln x + x.$

(6) $y' = 3e^x\cos x - 3e^x\sin x.$

(7) $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}.$

(8) $y' = \dfrac{e^x \cdot x^2 - 2xe^x}{x^4} = \dfrac{e^x(x-2)}{x^3}.$

(9) $y' = 2x\ln x\cos x + x\cos x - x^2\ln x\sin x$.

(10) $s' = \dfrac{\cos t(1+\cos t)+\sin t(1+\sin t)}{(1+\cos t)^2} = \dfrac{\cos t+\sin t+1}{(1+\cos t)^2}$.

3 求下列函数在给定点处的导数:

(1) $y = \sin x - \cos x$,求 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}$, $y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}$; (2) $\rho = \theta\sin\theta + \dfrac{1}{2}\cos\theta$,求$\left.\dfrac{d\rho}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$;

(3) $f(x) = \dfrac{3}{5-x} + \dfrac{x^2}{5}$,求 $f'(0)$, $f'(2)$.

【解】 (1) $y' = \cos x + \sin x$, $y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, $y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$.

(2) $\dfrac{d\rho}{d\theta} = \sin\theta + \theta\cos\theta - \dfrac{1}{2}\sin\theta = \theta\cos\theta + \dfrac{1}{2}\sin\theta$, $\left.\dfrac{d\rho}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(3) $f'(x) = \dfrac{3}{(5-x)^2} + \dfrac{2}{5}x$, $f'(0) = \dfrac{3}{25}$, $f'(2) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{17}{15}$.

4 以初速度 v_0 竖直上抛的物体,其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s = v_0t - \dfrac{1}{2}gt^2$. 求:

(1) 该物体的速度 $v(t)$; (2) 该物体达到最高点的时刻.

【解】 (1) $v(t) = \dfrac{ds}{dt} = v_0 - gt$.

(2) 物体达到最高点的时刻 $v = 0$,即 $v_0 - gt = 0$,故 $t = \dfrac{v_0}{g}$.

5 求曲线 $y = 2\sin x + x^2$ 上横坐标为 $x = 0$ 的点处的切线方程和法线方程.

【解】 $x = 0 \Rightarrow y = 0$. $y' = 2\cos x + 2x \Rightarrow y'\big|_{x=0} = 2$.

所求切线方程与法线方程分别为 $y = 2x$ 和 $y = -\dfrac{1}{2}x$.

6 求下列函数的导数:

(1) $y = (2x+5)^4$; (2) $y = \cos(4-3x)$; (3) $y = e^{-3x^2}$;

(4) $y = \ln(1+x^2)$; (5) $y = \sin^2 x$; (6) $y = \sqrt{a^2-x^2}$;

(7) $y = \tan x^2$; (8) $y = \arctan(e^x)$; (9) $y = (\arcsin x)^2$;

(10) $y = \ln\cos x$.

【解】 (1) $y' = 8(2x+5)^3$.

(2) $y' = -\sin(4-3x)\cdot(-3) = 3\sin(4-3x)$.

(3) $y' = -6xe^{-3x^2}$. (4) $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

(5) $y' = \sin 2x$. (6) $y' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(7) $y' = 2x\sec^2(x^2)$. (8) $y' = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

(9) $y' = 2\arcsin x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.　　　　(10) $y' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.

7 求下列函数的导数：

(1) $y = \arcsin(1-2x)$;　　　　(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(3) $y = e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$;　　　　(4) $y = \arccos \dfrac{1}{x}$;

(5) $y = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$;　　　　(6) $y = \dfrac{\sin 2x}{x}$;

(7) $y = \arcsin\sqrt{x}$;　　　　(8) $y = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$;

(9) $y = \ln(\sec x + \tan x)$;　　　　(10) $y = \ln(\csc x - \cot x)$.

【解】 (1) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}} \cdot (-2) = -\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

(2) $y' = \dfrac{-\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

(3) $y' = -\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x - 3e^{-\frac{x}{2}}\sin 3x = -\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x + 6\sin 3x)$.

(4) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

(5) $y' = \dfrac{-\dfrac{1}{x}(1+\ln x) - (1-\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = -\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}$.

(6) $y' = \dfrac{2x\cos 2x - \sin 2x}{x^2}$.　　　　(7) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

(8) $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}\right) = \dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \dfrac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

(9) $y' = \dfrac{1}{\sec x + \tan x}(\sec x \tan x + \sec^2 x) = \sec x$.

(10) $y' = \dfrac{1}{\csc x - \cot x}(-\csc x \cot x + \csc^2 x) = \csc x$.

8 求下列函数的导数：

(1) $y = \left(\arcsin \dfrac{x}{2}\right)^2$;　　　　(2) $y = \ln\tan \dfrac{x}{2}$;　　　　(3) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$;

(4) $y = e^{\arctan\sqrt{x}}$;　　　　(5) $y = \sin^n x \cos nx$;　　　　(6) $y = \arctan \dfrac{x+1}{x-1}$;

(7) $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$;　　　　(8) $y = \ln\ln\ln x$;　　　　(9) $y = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$;

$(10)y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

【解】 $(1)y'=2\arcsin\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2\arcsin\dfrac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$.

$(2)y'=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{\sin x}=\csc x$.

$(3)y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}}\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

$(4)y'=e^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}e^{\arctan\sqrt{x}}$.

$(5)y'=n\sin^{n-1}x\cos x\cos nx+\sin^n x(-\sin nx)\cdot n=n\sin^{n-1}x(\cos x\cos nx+\sin x\sin nx)$

$=n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$.

$(6)y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2}\cdot\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2+(x+1)^2}=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

$(7)y'=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x-\arcsin x\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\arccos x)^2}=\dfrac{\arccos x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}$

$=\dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}$.

$(8)y'=\dfrac{1}{\ln\ln x}\cdot\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\ln x\ln\ln x}$.

$$(9)y'=\frac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})-(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{2+2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{2+2}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(10)y'=\frac{1}{1-\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2x}(1+x)\sqrt{1-x}}=-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}.$$

9 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导,且 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$,试求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

【解】 $$y'=\frac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot[2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)]$$
$$=\frac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}.$$

10 若 $f(x)$ 可导,求下列函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y=f(x^2)$; (2) $y=f(\sin^2x)+f(\cos^2x)$.

【解】 (1) $y'=f'(x^2)\cdot 2x=2xf'(x^2)$.

(2) $y'=f'(\sin^2x)\cdot\sin 2x-f'(\cos^2x)\sin 2x=\sin 2x[f'(\sin^2x)-f'(\cos^2x)]$.

11 求下列函数的导数:

(1) $y=e^{-x}(x^2-2x+3)$; (2) $y=\sin^2x\cdot\sin(x^2)$;

(3) $y=\left(\arctan\frac{x}{2}\right)^2$; (4) $y=\frac{\ln x}{x^n}$;

(5) $y=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$; (6) $y=\ln\cos\frac{1}{x}$;

(7) $y=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$; (8) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

(9) $y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$; (10) $y=\arcsin\frac{2t}{1+t^2}$.

【解】 (1) $y'=-e^{-x}(x^2-2x+3)+e^{-x}(2x-2)=e^{-x}(-x^2+4x-5)$.

(2) $y'=\sin 2x\sin(x^2)+2x\sin^2x\cdot\cos(x^2)$.

(3) $$y'=2\arctan\frac{x}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\arctan\frac{x}{2}\cdot\frac{4}{4+x^2}.$$

(4) $$y'=\frac{x^{n-1}-nx^{n-1}\ln x}{x^{2n}}=\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}.$$

(5) $$y'=\frac{(e^t+e^{-t})(e^t+e^{-t})-(e^t-e^{-t})(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}=\frac{4}{(e^t+e^{-t})^2}.$$

或 $y'=(\mathrm{th}t)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2t}$.

(6) $$y'=\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}\cdot\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\tan\frac{1}{x}}{x^2}.$$

(7) $$y'=-e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\sin\frac{2}{x}.$$

(8) $$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

(9) $y' = \arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}$.

(10) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2t}{1+t^2})^2}} \cdot \frac{2(1+t^2)-4t^2}{(1+t^2)^2} = \begin{cases} \frac{2}{1+t^2}, & \text{当} |t|<1, \\ -\frac{2}{1+t^2}, & \text{当} |t|>1. \end{cases}$

12 求下列函数的导数：

(1) $y = \text{ch}(\text{sh}x)$； (2) $y = \text{sh}x \cdot e^{\text{ch}x}$；

(3) $y = \text{th}(\ln x)$； (4) $y = \text{sh}^3 x + \text{ch}^2 x$；

(5) $y = \text{th}(1-x^2)$； (6) $y = \text{arsh}(x^2+1)$；

(7) $y = \text{arch}(e^{2x})$； (8) $y = \arctan(\text{th}x)$；

(9) $y = \ln\text{ch}x + \frac{1}{2\text{ch}^2 x}$； (10) $y = \text{ch}^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

【解】 (1) $y' = \text{sh}(\text{sh}x) \cdot \text{ch}x$. (2) $y' = \text{ch}x \cdot e^{\text{ch}x} + \text{sh}^2 x e^{\text{ch}x}$.

(3) $y' = \frac{1}{\text{ch}^2(\ln x)} \cdot \frac{1}{x}$. (4) $y' = 3\text{sh}^2 x\text{ch}x + 2\text{ch}x\text{sh}x$.

(5) $y' = \frac{-2x}{\text{ch}^2(1-x^2)}$. (6) $y' = \frac{2x}{\sqrt{1+(x^2+1)^2}}$.

(7) $y' = \frac{1}{\sqrt{(e^{2x})^2-1}} \cdot e^{2x} \cdot 2 = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}$.

(8) $y' = \frac{1}{1+(\text{th}\,x)^2} \cdot \frac{1}{\text{ch}^2 x} = \frac{1}{1+\frac{\text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x}} \cdot \frac{1}{\text{ch}^2 x} = \frac{1}{\text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x} = 1 + \frac{1}{2\text{sh}^2 x}$.

(9) $y' = \frac{1}{\text{ch}\,x}\text{sh}\,x - \frac{1}{(2\text{ch}^2 x)^2} \cdot 4\text{ch}x\text{sh}\,x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}\,x} - \frac{\text{sh}\,x}{\text{ch}^3 x}$

$= \frac{\text{sh}\,x(\text{ch}^2 x - 1)}{\text{ch}^3 x} = \frac{\text{sh}^3 x}{\text{ch}^3 x} = \text{th}^3 x$.

(10) $y' = 2\text{ch}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\text{sh}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}\text{sh}\left(2 \cdot \frac{x-1}{x+2}\right)$.

13 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 x_0 的某一邻域内有定义，$f(x)$ 在 x_0 处可导，$f(x_0)=0$，$g(x)$ 在 x_0 处连续，试讨论 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处的可导性.

【解】 由 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f(x_0)=0$，则有

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0};$$

由 $g(x)$ 在 x_0 处连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$，故

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}g(x) = f'(x_0)g(x_0),$$

即 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处可导，其导数为 $f'(x_0)g(x_0)$.

14 设函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) $f(x+y)=f(x)f(y)$，对一切 $x,y\in\mathbf{R}$；

(2) $f(x)=1+xg(x)$，而 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$.

试证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导，且 $f'(x)=f(x)$.

【证】 由(2)知 $f(0)=1$，故

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\left[f(x)\cdot\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to0}\left[f(x)\cdot\frac{\Delta xg(\Delta x)}{\Delta x}\right]\\&=\lim_{\Delta x\to0}[f(x)g(\Delta x)]=f(x)\cdot1=f(x).\end{aligned}$$

习题2-3　高阶导数

1 求下列函数的二阶导数：

(1) $y=2x^2+\ln x$；　(2) $y=e^{2x-1}$；

(3) $y=x\cos x$；　(4) $y=e^{-t}\sin t$；

(5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$；　(6) $y=\ln(1-x^2)$；

(7) $y=\tan x$；　(8) $y=\dfrac{1}{x^3+1}$；

(9) $y=(1+x^2)\arctan x$；　(10) $y=\dfrac{e^x}{x}$；

(11) $y=xe^{x^2}$；　(12) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

【解】 (1) $y'=4x+\dfrac{1}{x}$，　$y''=4-\dfrac{1}{x^2}$.

(2) $y'=2e^{2x-1}$，　$y''=4e^{2x-1}$.

(3) $y'=\cos x-x\sin x$，　$y''=-2\sin x-x\cos x$.

(4) $y'=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$，

$y''=-e^{-t}(\cos t-\sin t)+e^{-t}(-\sin t-\cos t)=-2e^{-t}\cos t$.

(5) $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$，　$y''=-\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=-\dfrac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$.

(6) $y'=\dfrac{2x}{x^2-1}$，　$y''=\dfrac{2(x^2-1)-4x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-2(1+x^2)}{(x^2-1)^2}$.

(7) $y'=\sec^2x$，　$y''=2\sec^2x\tan x$.

(8) $y'=\dfrac{-3x^2}{(x^3+1)^2}$，　$y''=\dfrac{-6x(x^3+1)^2+2(x^3+1)9x^4}{(x^3+1)^4}=\dfrac{12x^4-6x}{(x^3+1)^3}$.

(9) $y'=2x\arctan x+1$，　$y''=2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$.

(10) $y'=\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$，

$$y'' = \frac{(e^x(x-1)+e^x)x^2 - 2xe^x(x-1)}{x^4} = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

(11) $y' = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} = e^{x^2}(2x^2+1)$,

$y'' = 2x(2x^2+1)e^{x^2} + 4xe^{x^2} = 2xe^{x^2}(2x^2+3)$.

(12) $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$y'' = \frac{-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

2 设 $f(x) = (x+10)^6$,求 $f'''(2)$.

【解】 $f'(x) = 6(x+10)^5, f''(x) = 30(x+10)^4$,

$f'''(x) = 120(x+10)^3, f'''(2) = 120 \times 12^3 = 207360$.

3 若 $f''(x)$ 存在,求下列函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $y = f(x^2)$; (2) $y = \ln f(x)$.

【解】 (1) $y' = 2xf'(x^2)$, $y'' = 2f'(x^2) + 4x^2f''(x^2)$.

(2) $y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $y'' = \dfrac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)}$.

4 试从 $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y'}$,导出:(1) $\dfrac{d^2x}{dy^2} = -\dfrac{y''}{(y')^3}$; (2) $\dfrac{d^3x}{dy^3} = \dfrac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}$.

【解】 (1) $$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'}\right) = \frac{d\left(\frac{1}{y'}\right)}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}.$$

(2) $$\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{d}{dy}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right) = \frac{d}{dy}\left[-\frac{y''}{(y')^3}\right] = \frac{d\left[-\frac{y''}{(y')^3}\right]}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}$$

$$= -\frac{y'''\cdot(y')^3 - y''\cdot 3(y')^2\cdot y''}{(y')^6}\cdot\frac{1}{y'} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}.$$

5 已知物体的运动规律为 $s = A\sin wt$(A,w 是常数),求物体的加速度,并验证:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + w^2s = 0.$$

【解】 $\dfrac{ds}{dt} = Aw\cos wt \Rightarrow$ 加速度 $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -Aw^2\sin wt$,移项后即证 $\dfrac{d^2s}{dt^2} + w^2s = 0$.

6 密度大的陨星进入大气层时,当它离地心为 $s$km 时的速度与 $\sqrt{s}$ 成反比,试证陨星的加速度 a 与 s^2 成反比.

【证】由题意知 $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{k}{\sqrt{s}}$,其中 k 为比例系数,则

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{k}{\sqrt{s}}\right)\cdot\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{s^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{k}{\sqrt{s}} = -\frac{k^2}{2s^2},$$

即陨星的加速度 a 与 s^2 成反比.

7 假设质点沿 x 轴运动的速度为$\frac{dx}{dt}=f(x)$,试求质点运动的加速度.

【解】 质点运动的加速度为 $a=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dx}[f(x)]\frac{dx}{dt}=f'(x)f(x)$.

8 验证函数 $y=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$ (λ,C_1,C_2 是常数)满足关系式:$y''-\lambda^2y=0$.

【证】 $y'=C_1\lambda e^{\lambda x}-C_2\lambda e^{-\lambda x}$,$y''=C_1\lambda^2e^{\lambda x}+C_2\lambda^2e^{-\lambda x}=\lambda^2y$,移项后即得证.

9 验证函数 $y=e^x\sin x$ 满足关系式:$y''-2y'+2y=0$.

【证】 $y'=e^x(\sin x+\cos x)$, $y''=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2\cos x\cdot e^x$,
所以 $y''-2y'+2y=2\cos x\cdot e^x-e^x(2\sin x+2\cos x)+e^x(2\sin x)=0$.

10 求下列函数所指定的阶的导数:

(1)$y=e^x\cos x$,求 $y^{(4)}$; (2)$y=x^2\sin 2x$,求 $y^{(50)}$.

【解】 (1) 用莱布尼兹公式

$$\begin{aligned}y^{(4)}&=(e^x)^{(4)}\cdot\cos x+4(e^x)'''(\cos x)'+\frac{4\cdot 3}{2!}(e^x)''\cdot(\cos x)''+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!}(e^x)'\cdot(\cos x)'''\\&\quad+e^x(\cos x)^{(4)}\\&=e^x\cos x+4e^x(-\sin x)+6e^x(-\cos x)+4e^x\sin x+e^x\cos x\\&=-4e^x\cos x.\end{aligned}$$

(2) 用莱布尼兹公式

$$y^{(50)}=(\sin 2x)^{(50)}\cdot x^2+50(\sin 2x)^{(49)}\cdot(x^2)'+\frac{50\cdot 49}{2!}(\sin 2x)^{(48)}\cdot(x^2)''.$$

又由于$(\sin 2x)^{(n)}=2^n\sin\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$,故

$$\begin{aligned}y^{(50)}&=2^{50}\sin\left(2x+50\frac{\pi}{2}\right)\cdot x^2+50\cdot 2^{49}\sin\left(2x+49\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2x\\&\quad+\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2^{49}\sin\left(2x+48\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2\\&=2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x\right).\end{aligned}$$

11 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式:

(1)$y=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ ($a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是常数);

(2)$y=\sin^2x$; (3)$y=x\ln x$; (4)$y=xe^x$.

【解】 (1)$y^{(n)}=n!$.

(2)$y=\sin^2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\Rightarrow y^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{(n)}-\frac{1}{2}(\cos 2x)^{(n)}$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2^n\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

(3)$y'=\ln x+1\Rightarrow y^{(n)}=(-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$ $(n\geqslant 2)$.

(4) 用莱布尼兹公式

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (e^x)^{(n-i)} x^{(i)} = C_n^0 (e^x)^{(n)} \cdot x^{(0)} + C_n^1 (e^x)^{(n-1)} \cdot x'$$
$$= e^x \cdot x + ne^x \cdot 1 = e^x(n+x).$$

12 求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n \geqslant 3)$.

【解】 用莱布尼兹公式.

$$f^{(n)}(x) = [\ln(1+x)]^{(n)} \cdot x^2 + n[\ln(1+x)]^{(n-1)} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2!}[\ln(1+x)]^{n-2} \cdot 2,$$

求 $[\ln(1+x)]^{(k)}$：$(\ln(1+x))' = (1+x)^{-1}$， $(\ln(1+x))'' = (-1)(1+x)^{-2}$，

$$[\ln(1+x)]''' = (-1)^2 2!(1+x)^{-3}, \cdots,$$
$$[\ln(1+x)]^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}.$$

代入上式得

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{x^2}{(1+x)^n} + (-1)^{n-2}(n-2)!\frac{2nx}{(1+x)^n} + (-1)^{n-3}(n-3)!\frac{n(n-1)}{(1+x)^{n-1}},$$

以 $x=0$ 代入得 $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}n(n-1)\cdot(n-3)! = (-1)^{n-1}\dfrac{n!}{n-2}.$

习题 2－4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率

1 求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $y^2 - 2xy + 9 = 0$；　　(2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$；

(3) $xy = e^{x+y}$；　　(4) $y = 1 - xe^y$.

【解】 (1) 两边求导，得 $2y\dfrac{dy}{dx} - 2y - 2x\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y-x}$.

(2) 两边求导，得 $3x^2 + 3y^2\dfrac{dy}{dx} - 3ay - 3ax\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ay - x^2}{y^2 - ax}$.

(3) 两边求导，得 $y + x\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}\left(1 + \dfrac{dy}{dx}\right) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(x-1)}{x(1-y)}$.

(4) 两边求导，得 $\dfrac{dy}{dx} = -e^y - xe^y\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^y}{y-2}$.

2 求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a, \dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程.

【解】 曲线方程两边对 x 求导，得 $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0$

$$\Rightarrow y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y'\Big|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a\right)} = -1.$$

因此所求切线方程与法线方程分别为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{4}a = -\left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}a\right) \text{与} y - \frac{\sqrt{2}}{4}a = x - \frac{\sqrt{2}}{4}a.$$

3 求下列方程所确定的隐函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

(1)$x^2 - y^2 = 1$;　　(2)$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$;

(3)$y = \tan(x + y)$;　　(4)$y = 1 + xe^y$.

【解】 (1) 两边对 x 求导,得

$$2x - 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y} \Rightarrow y'' = \frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{1}{y^3}.$$

(2) 两边对 x 求导,得 $2b^2x + 2a^2yy' = 0$

$$\Rightarrow\quad y' = -\frac{b^2x}{a^2y} \quad\Rightarrow\quad y'' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

(3) 两边对 x 求导:$y' = \sec^2(x + y)(1 + y')$.

$\Rightarrow\quad y' = -1 - \cot^2(x + y)$

$\Rightarrow\quad y'' = 2\cot(x + y)\cdot\cot(x + y)\cdot\csc(x + y)\cdot(1 + y')$,

故　$y'' = -2\cot^3(x + y)\cdot\csc^2(x + y)$.

(4) 两边对 x 求导,得 $y' = e^y + xe^yy' \quad\Rightarrow\quad y' = \dfrac{e^y}{2 - y}$

$$\Rightarrow\quad y'' = \frac{e^yy'(2 - y) - e^y(-y')}{(2 - y)^2} = \frac{e^{2y}(3 - y)}{(2 - y)^3}.$$

4 用对数求导法求下列函数的导数:

(1)$y = \left(\dfrac{x}{1 + x}\right)^x$;　　(2)$y = \sqrt[5]{\dfrac{x - 5}{\sqrt[5]{x^2 + 2}}}$;

(3)$y = \dfrac{\sqrt{x + 2}(3 - x)^4}{(x + 1)^5}$;　　(4)$y = \sqrt{x\sin x\sqrt{1 - e^x}}$.

【解】 (1)$y' = \left(\dfrac{x}{1 + x}\right)^x[x(\ln|x| - \ln|1 + x|)]'$

$$= \left(\frac{x}{1 + x}\right)^x\left[\ln\frac{x}{1 + x} + x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1 + x}\right)\right] = \left(\frac{x}{1 + x}\right)^x\left(\ln\frac{x}{1 + x} + \frac{1}{1 + x}\right).$$

(2)$y' = \sqrt[5]{\dfrac{x - 5}{\sqrt[5]{x^2 + 2}}}\left[\dfrac{1}{5}\ln|x - 5| - \dfrac{1}{25}\ln(x^2 + 2)\right]'$

$$= \sqrt[5]{\frac{x - 5}{\sqrt[5]{x^2 + 2}}}\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x - 5} - \frac{2x}{25(x^2 + 2)}\right].$$

(3)$y' = \dfrac{\sqrt{x + 2}(3 - x)^4}{(x + 1)^5}\left(\dfrac{1}{2}\ln|x + 2| + 4\ln|3 - x| - 5\ln|x + 1|\right)'$

$$= \frac{\sqrt{x + 2}(3 - x)^4}{(x + 1)^5}\left[\frac{1}{2(x + 2)} - \frac{4}{3 - x} - \frac{5}{x + 1}\right].$$

(4)$y' = \sqrt{x\sin x\sqrt{1 - e^x}}\left(\dfrac{1}{2}\ln|x| + \dfrac{1}{2}\ln|\sin x| + \dfrac{1}{4}\ln|1 - e^x|\right)'$

$$= \sqrt{x\sin x\sqrt{1 - e^x}}\left[\frac{1}{2x} + \frac{\cos x}{2\sin x} - \frac{e^x}{4(1 - e^x)}\right].$$

5 求下列参数方程所确定的函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$:

(1) $\begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = \theta(1-\sin\theta), \\ y = \theta\cos\theta. \end{cases}$

【解】 (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3bt^2}{2at} = \dfrac{3bt}{2a}$.　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos\theta - \theta\sin\theta}{1 - \sin\theta - \theta\cos\theta}$.

6 已知$\begin{cases} x = e^t\sin t, \\ y = e^t\cos t, \end{cases}$ 求当 $t = \dfrac{\pi}{3}$ 时$\dfrac{dy}{dx}$的值.

【解】 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^t\cos t - e^t\sin t}{e^t\sin t + e^t\cos t} = \dfrac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} - 2$.

7 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程与法线方程:

(1) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 处;　　(2) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处.

【解】 (1) $x\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = 0$, 所给点为$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left.\frac{-2\sin 2t}{\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -2\sqrt{2}.$$

所求切线方程与法线方程分别为: $y = -2\sqrt{2}\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 与 $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(2) $x\Big|_{t=2} = \dfrac{6}{5}a$, $y\Big|_{t=2} = \dfrac{12a}{5}$,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2} = \left.\frac{\dfrac{6at(1+t^2) - 2t(3at^2)}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{3a(1+t^2) - 2t(3at)}{(1+t^2)^2}}\right|_{t=2} = -\frac{4}{3}.$$

故所求切线方程与法线方程分别为

$$y - \frac{12a}{5} = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{6}{5}a\right) \quad 与 \quad y - \frac{12a}{5} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{6}{5}a\right).$$

8 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2}, \\ y = 1 - t; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} x = 3e^{-t}, \\ y = 2e^t; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t), \end{cases}$ 其中, $f''(t)$ 存在且不为零.

【解】 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{t}\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{t^2}}{t}=\frac{1}{t^3}$.

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t$, $\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{b}{a}\csc^2 t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2}\frac{1}{\sin^3 t}$.

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2e^t}{-3e^{-t}}=-\frac{2}{3}e^{2t}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{-\frac{2}{3}e^{2t}\cdot 2}{-3e^{-t}}=\frac{4}{9}e^{3t}$.

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$, $\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{1}{f''(t)}$.

9 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数$\frac{d^3y}{dx^3}$:

(1) $\begin{cases}x=1-t^2,\\y=t-t^3;\end{cases}$ $\qquad$ (2) $\begin{cases}x=\ln(1+t),\\y=t-\arctan t.\end{cases}$

【解】 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3}{2}t-\frac{1}{2t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{-2t}=-\frac{3}{4t}-\frac{1}{4t^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{(y''_x)'_t}{x'_t}=\frac{-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{t^2}\right)-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t^6}\right)\cdot 3t^2}{-2t}=-\frac{3}{8t^5}(1+t^2).$$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}=\frac{t}{2}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t}=\frac{1+t^2}{4t},\quad\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{(y''_x)'_t}{x'_t}=\frac{t^4-1}{8t^3}.$$

10 落在平静水面上的石头,产生同心波纹.若最外一圈波半径的增大率总是6m/s,问在2秒末扰动水面面积增大的速率是多少?

【解】 设波的半径r,对应的圆面积为S,则$S=\pi r^2$.两边对x求导,得$S'_t=2\pi r\cdot r'_t$.当$t=2$时,$r=6\times 2=12$.又$r'_t=6$,故 $S'_t=2\pi\cdot 12\cdot 6=144\pi(m^2/s)$.

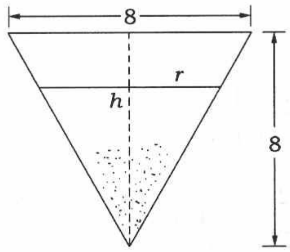
11 注水入深8m上顶直径8m的正圆锥形容器中,其速率为$4m^3/min$.当水深为5m时,其表面上升的速率为多少?

【解】 设在t时刻容器中水深为$h(t)$,水的容积为$V(t)$.

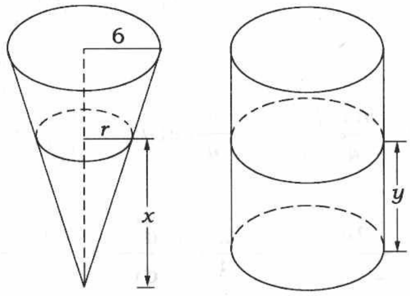
由$\frac{r}{4}=\frac{h}{8}\Rightarrow r=\frac{h}{2}\Rightarrow V(t)=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{\pi h^3}{12}$.两边对$t$求导,得

$$V'_t=\frac{3\pi}{12}h^2\cdot h'_t=\frac{\pi}{4}h^2\cdot h'_t.$$

题设 $V'_t = 4$，当 $h = 5$ 时，$h'_t = \dfrac{16}{25\pi} \approx 0.204(\text{m/min})$.



第 11 题图



第 12 题图

12 溶液自深 18cm 顶直径 12cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10cm 的圆柱形筒中，开始时漏斗中盛满了水，已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时，其表面下降的速度为 1cm/min，问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少？

【解】 设在 t 时刻漏斗中的水深为 $x(t)$，圆柱形筒中水深为 $y(t)$，依题意有

$$\frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 18 - \frac{1}{3}\pi r^2 x = \pi \cdot 5^2 \cdot y.$$

由 $\dfrac{r}{6} = \dfrac{x}{18}$，得 $r = \dfrac{x}{3}$. 代入上式有

$$\frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 18 - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{x}{3}\right)^2 \cdot x = \pi \cdot 5^2 \cdot y. \Rightarrow \quad 6^3 - \frac{1}{27}x^3 = 25y.$$

两边对 t 求导，得 $\quad -\dfrac{1}{9}x^2 \cdot x'_t = 25y'_t$. 当 $x = 12$ 时，$x'_t = -1$，代入上式，得

$$y'_t = \frac{-\dfrac{1}{9} \cdot 12^2(-1)}{25} = \frac{16}{25} \approx 0.64(\text{cm/min}).$$

习题 2－5　函数的微分

1 已知 $y = x^3 - x$，计算在 $x = 2$ 处当 Δx 分别等于 1，0.1，0.01 时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$.

【解】 当自变量 x 在 $x = 2$ 取得增量 Δx 时，函数相应的增量：

$\Delta y = [(2+\Delta x)^3 - (2+\Delta x)] - (2^3 - 2) = \Delta x^3 + 6\Delta x^2 + 11\Delta x = 11\Delta x + \Delta x^2(\Delta x + 6)$.

函数在点 $x = 2$ 处的微分为 $\mathrm{d}y\big|_{x=2} = 11\Delta x$. 再分别将 $\Delta x = 1, 0.1, 0.01$ 代入 $\Delta y, \mathrm{d}y$ 得

$\Delta y\big|_{\Delta x=1} = (\Delta x^3 + 6\Delta x^2 + 11\Delta x)\big|_{\Delta x=1} = 18$,

$\Delta y\big|_{\Delta x=0.1} = (\Delta x^3 + 6\Delta x^2 + 11\Delta x)\big|_{\Delta x=0.1} = 1.161$,

$\Delta y\big|_{\Delta x=0.01} = (\Delta x^3 + 6\Delta x^2 + 11\Delta x)\big|_{\Delta x=0.01} = 0.110601$.

$\mathrm{d}y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=1}} = 11\Delta x\big|_{\Delta x=1} = 11$,

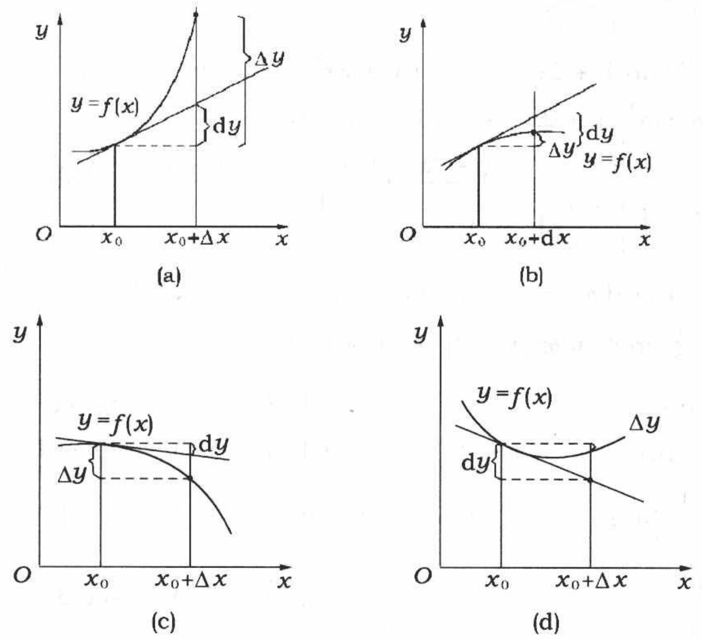
$\mathrm{d}y\big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.1}} = 11\Delta x\big|_{\Delta x=0.1} = 1.1$, $\quad \mathrm{d}y\big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}} = 11\Delta x\big|_{\Delta x=0.01} = 0.11$.

2 设函数 $y = f(x)$ 的图形如下图所示，试在其上分别标出点 x_0 处的 $\mathrm{d}y, \Delta y$ 及 $\Delta y - \mathrm{d}y$，并说明其正负.

【解】 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的 $\mathrm{d}y,\Delta y$ 在上图标出. $\mathrm{d}y,\Delta y$ 及 $\Delta y-\mathrm{d}y$ 的符号说明如下:

(a) $\Delta y>0,\mathrm{d}y>0,\Delta y-\mathrm{d}y>0$; (b) $\Delta y>0,\mathrm{d}y>0,\Delta y-\mathrm{d}y<0$;

(c) $\Delta y<0,\mathrm{d}y<0,\Delta y-\mathrm{d}y<0$; (d) $\Delta y<0,\mathrm{d}y<0,\Delta y-\mathrm{d}y>0$.



第 2 题图

3 求下列函数的微分:

(1) $y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$; (2) $y=x\sin 2x$;

(3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; (4) $y=\ln^2(1-x)$;

(5) $y=x^2\mathrm{e}^{2x}$; (6) $y=\mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)$;

(7) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$; (8) $y=\tan^2(1+2x^2)$;

(9) $y=\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; (10) $s=A\sin(\omega t+\varphi)$ (A、ω、φ 是常数).

【解】 (1) $\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)+2\mathrm{d}(\sqrt{x})=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

(2) $\mathrm{d}y=\sin 2x\mathrm{d}x+x\mathrm{d}(\sin 2x)=(\sin 2x+2x\cos 2x)\mathrm{d}x$.

(3) $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{x^2+1}\left[\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x-x\mathrm{d}(\sqrt{x^2+1})\right]=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\mathrm{d}x$.

(4) $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=2\ln(1-x)\cdot\dfrac{(-1)}{1-x}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{x-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x$.

(5) $\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(x^2)+x^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})=2x\mathrm{e}^{2x}(1+x)\mathrm{d}x$.

(6) $\mathrm{d}y=\cos(3-x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}[\cos(3-x)]=\mathrm{e}^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]\mathrm{d}x$.

(7) $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\right]\mathrm{d}x=-\dfrac{x}{|x|}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$

$$=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<0,\\ -\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1.\end{cases}$$

(8) $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=[2\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)\cdot 4x]\mathrm{d}x$
$=8x\tan^2(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)\mathrm{d}x.$

(9) $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\cdot\dfrac{(-2x)(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{2x}{1+x^4}\cdot\mathrm{d}x.$

(10) $\mathrm{d}s=s'\mathrm{d}t=[A\cos(\omega t+\varphi)\cdot\omega]\mathrm{d}t=A\omega\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t.$

4 将适当的函数填入下列括号内,使等式成立:

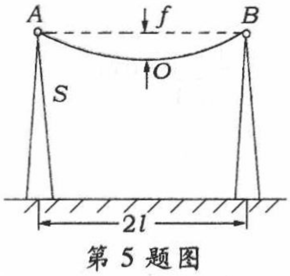
(1) $\mathrm{d}(\quad)=2\mathrm{d}x$; (2) $\mathrm{d}(\quad)=3x\mathrm{d}x$;
(3) $\mathrm{d}(\quad)=\cos x\mathrm{d}x$; (4) $\mathrm{d}(\quad)=\sin wx\mathrm{d}x$;
(5) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x$; (6) $\mathrm{d}(\quad)=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$;
(7) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; (8) $\mathrm{d}(\quad)=\sec^2 3x\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $2x+C$. (2) $\dfrac{3}{2}x^2+C$. (3) $\sin x+C$.
(4) $-\dfrac{1}{\omega}\cos wx+C$. (5) $\ln(1+x)+C$. (6) $-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C$.
(7) $2\sqrt{x}+C$. (8) $\dfrac{1}{3}\tan 3x+C$.

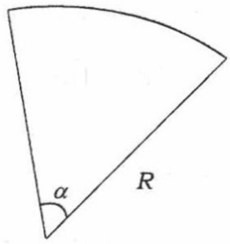
5 如图所示的电缆$\overset{\frown}{AOB}$的长为s,跨度为$2l$,电缆的最低点O与杆顶连线AB的距离为f,已知电缆长可按下面公式计算:$s=2l\left(1+\dfrac{2f^2}{3l^2}\right)$.则当$f$变化了$\Delta f$时,电缆长的变化约为多少?

【解】 因$s=2l\left(1+\dfrac{2f^2}{3l^2}\right)$,故电缆长的变化为

$$\Delta s\approx \mathrm{d}s=2l\left(1+\frac{2f^2}{3l^2}\right)'_f\cdot\Delta f=2l\cdot\frac{4f}{3l^2}\cdot\Delta f=\frac{8f}{3l}\Delta f.$$



第 5 题图



第 6 题图

6 设扇形的圆心角$\alpha=60^\circ$,半径$R=100\mathrm{cm}$(如图),如果R不变,α减少$30'$,问扇形面积大约改变了多少?又如果α不变,R增加$1\mathrm{cm}$,问扇形面积大约改变了多少?

【解】 (1) 设扇形半径R不变,其面积$s=\dfrac{1}{2}\alpha R^2$,又已知$R=100\mathrm{cm}$,$\alpha_0=60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$,$\Delta\alpha$

$= -30' = -\frac{\pi}{360}$，于是扇形面积的改变量

$$\Delta s \approx \mathrm{d}s = \frac{1}{2}R^2\Delta\alpha = \frac{1}{2}\times 100^2 \times \left(-\frac{\pi}{360}\right) \approx -43.63(\mathrm{cm}^2).$$

(2) 设 α 不变，则 $\alpha = \frac{\pi}{3}, R_0 = 100\mathrm{cm}, \Delta R = 1\mathrm{cm}$. 于是扇形面积的改变量

$$\Delta s \approx \mathrm{d}s = \alpha R\Delta R = \frac{\pi}{3}\times 100\times 1 \approx 104.72(\mathrm{cm}^2).$$

7 计算下列三角函数的近似值：

(1) $\cos 29°$；　　　　(2) $\tan 136°$.

【解】 (1) 令 $f(x) = \cos x$，取 $x_0 = \frac{\pi}{6}, \Delta x = -1° = -\frac{\pi}{180}$，则 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

于是 $\cos 29° \approx \cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0.8747$.

(2) 令 $f(x) = \tan x$，取 $x_0 = \frac{3\pi}{4}, \Delta x = \frac{\pi}{180}$，

故 $\tan 136° \approx \tan\frac{3\pi}{4} + \sec^2\frac{3\pi}{4}\times\frac{\pi}{180} = -1 + 2\times\frac{\pi}{180} \approx -0.96509$.

8 计算下列反三角函数的近似值：

(1) $\arcsin 0.5002$；　　　　(2) $\arccos 0.4995$.

【解】 (1) 取 $f(x) = \arcsin x$，令 $x_0 = 0.5, \Delta x = 0.0002$，而 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，则

$$\arcsin 0.5002 \approx \arcsin 0.5 + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\times 0.0002$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}\times 0.0002 \approx 0.52383 \approx 31°34'.$$

(2) 取 $f(x) = \arccos x$，令 $x_0 = 0.5, \Delta x = -0.0005$，而 $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，则

$$\arccos 0.4995 \approx \arccos\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\cdot(-0.0005)$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\times 0.0005 \approx 60°2'.$$

9 当 $|x|$ 较小时，证明下列近似公式：

(1) $\tan x \approx x$ (x 为角的弧度值)，并计算 $\tan 45'$ 的近似值；

(2) $\ln(1+x) = x$，并计算 $\ln 1.002$ 的近似值；

(3) $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$.

【证】 (1) 设 $f(x) = \tan x$，则当 $|x|$ 很小时，有

$$\tan x = f(x) \approx f(0) + f'(0)x = \tan 0 + \sec^2 0 \cdot x = 0 + 1 \cdot x = x.$$

特别,当 $x = 45' \approx 0.01309$ 时,有 $\quad \tan 45' \approx \tan 0.01309 \approx 0.01309$.

(2) 设 $f(x) = \ln(1+x)$,则 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$,且当 $|x|$ 很小时,有

$$\ln(1+x) = f(x) \approx f(0) + f'(0)x = \ln 1 + \frac{1}{1+0} \cdot x = x.$$

特别,当 $x = 0.002$ 时,有 $\quad \ln 1.002 = \ln(1+0.002) \approx 0.002$.

(3) 设 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$,则 $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$,且当 $|x|$ 很小时,有

$$\frac{1}{1+x} = f(x) \approx f(0) + f'(0)x = \frac{1}{1+0} - \frac{1}{(1+0)^2}x = 1 - x.$$

10 计算下列各根式的近似值:

(1) $\sqrt[3]{996}$; $\qquad$ (2) $\sqrt[6]{65}$.

【解】 (1) 利用近似公式 $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{3}x$,有

$$\sqrt[3]{996} = \sqrt[3]{1000-4} = 10\sqrt[3]{1-0.004} \approx 10\left[1 + \frac{1}{3}(-0.004)\right] \approx 9.9867.$$

(2) 利用近似公式 $\sqrt[6]{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{6}x$,有

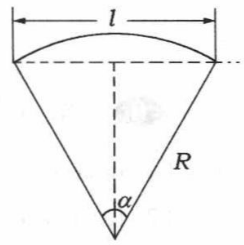
$$\sqrt[6]{65} = \sqrt[6]{64\left(1+\frac{1}{64}\right)} = 2\sqrt[6]{1+\frac{1}{64}} \approx 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{64}\right) \approx 2.0052.$$

11 计算球体体积时,要求精确度在2% 以内,问这时测量直径 D 的相对误差应不能超过多少?

【解】 由 $V = \dfrac{1}{6}\pi D^3$ 知 $\mathrm{d}V = \dfrac{\pi}{2}D^2 \triangle D$,于是由

$$\left|\frac{\mathrm{d}V}{V}\right| = \left|\frac{\frac{\pi}{2}D^2 \triangle D}{\frac{1}{6}\pi D^3}\right| = 3\left|\frac{\triangle D}{D}\right| \leqslant 2\%,知\left|\frac{\triangle D}{D}\right| \leqslant \frac{2}{3}\%.$$

12 某厂生产如图所示的扇形板,半径 $R = 200\text{mm}$,要求中心角 α 为55°. 产品检验时,一般用测量弦长 l 的办法来间接测量中心角 α. 如果测量弦长 l 时的误差 $\delta_l = 0.1\text{mm}$,问由此而引起的中心角测量误差 δ_α 是多少?



第 12 题图

【解】 由题设知 $l = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

于是 $\quad \mathrm{d}l = R\cos\dfrac{\alpha}{2}\mathrm{d}\alpha$,当 $R = 200\text{mm}$,$\alpha = 55°$ 时,有

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{R\cos\frac{\alpha}{2}}\mathrm{d}l = \frac{1}{200 \times \cos 27°30'}\mathrm{d}l = 0.0056\mathrm{d}l.$$

因此,当 $\delta_l = 0.1\text{mm}$ 时,其中心角测量误差为

$$\delta_\alpha = 0.0056 \times 0.1 = 0.00056(\text{rad}) \approx 1'56''.$$

总习题二

1 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1)$f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续________条件. $f(x)$ 在点 x_0 连续是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的________条件.

(2)$f(x)$ 在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的________条件.

(3)$f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 可微的________条件.

【解】 (1) 充分,必要. (2) 充分必要. (3) 充分必要.

2 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)(n\geqslant 2)$,则 $f'(0)=$________.

【解】 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}[(x+1)(x+2)\cdots(x+n)]=n!$.

3 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论：

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是(　).

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

【解】 由 $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]=\lim\limits_{h\to+\infty}\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)}{\dfrac{1}{h}}$存在,又可知 $f'_+(a)$ 存在. 故不能选(A).

取 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 显然 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+2h)-f(0+h)}{h}=0$,但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导,故不能选择(B).

取 $f(x)=|x|$,显然 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=0$,但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导,故不能选择(C).

而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{-h\to 0}\dfrac{f[a+(-h)]-f(a)}{-h}$存在,按导数定义知 $f'(a)$ 存在,故选择(D).

4 设有一根细棒,取棒的一端作为原点,棒上任意点的坐标为 x,于是分布在区间 $[0,x]$ 上细棒的质量 m 是 x 的函数 $m=m(x)$. 应怎样确定细棒在点 x_0 处的线密度(对于均匀细棒来说,单位长度细棒的质量叫作这细棒的线密度)?

【解】 在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上的平均线密度为

$$\bar{\rho}=\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x},$$

在点 x_0 处的线密度为 $\rho(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$.

5 根据导数的定义,求 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的导数.

【解】 由导数的定义知,当 $x\neq 0$ 时,

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}.$$

6 求下列函数 $f(x)$ 的 $f'_-(0)$ 及 $f'_+(0)$,并说明 $f'(0)$ 是否存在?

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0;\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

【解】 (1) $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\ln\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$,

$$f'_-(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

所以 $f'(0)=1$.

(2) $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=0$, $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=1$,

由于 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$,因此 $f'(0)$ 不存在.

7 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.又

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\text{ 不存在},$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

8 求下列函数的导数:

(1) $y=\arcsin(\sin x)$;　　(2) $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\tan x$;　　(4) $y=\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$;

(5) $y=\sqrt[x]{x}\,(x>0)$.

【解】 (1) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\cos x=\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$.

(2) $y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\dfrac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(3) $y'=\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{x}{2}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}+\sin x\ln\tan x-\cos x\cot x\sec^2 x=\sin x\cdot\ln\tan x$.

(4) $y' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}}\left(e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

(5) $y' = \sqrt[x]{x}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)' = \sqrt[x]{x}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

9 求下列函数的二阶导数：

(1) $y = \cos^2 x \cdot \ln x$;　　　　(2) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

【解】 (1) $y' = 2\cos x(-\sin x)\cdot \ln x + \cos^2 x \cdot \frac{1}{x} = -\sin 2x \cdot \ln x + \frac{\cos^2 x}{x}$,

$$y'' = -2\cos 2x \cdot \ln x - \sin 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2\cos x(-\sin x)\cdot x - \cos^2 x}{x^2}$$

$$= -2\cos 2x \cdot \ln x - \frac{2\sin 2x}{x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}.$$

(2) $y' = \frac{\sqrt{1-x^2} - x\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$,

$$y'' = -\frac{3}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x) = \frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}.$$

10 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y = \sqrt[m]{1+x}$;　　　　(2) $y = \frac{1-x}{1+x}$.

【解】 (1) $y' = \frac{1}{m}(1+x)^{\frac{1}{m}-1}$, $y'' = \frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1}{m}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-2}, \cdots$,

$$y^{(n)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{m}-n+1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}.$$

(2) 由 $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ 知

$$y^{(n)} = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{(n)} = \left(-1+\frac{2}{x+1}\right)^{(n)} = 2\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{2\cdot(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

11 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 所确定，求 $y''(0)$.

【解】 将已知方程两边对 x 求导，得

$$e^y \cdot y' + y + xy' = 0. \qquad ①$$

在 ① 式中再两边对 x 求导，得 $e^y(y')^2 + e^y\cdot y'' + y' + y' + xy'' = 0$，即

$$y'' = -\frac{e^y(y')^2 + 2y'}{e^y + x}. \qquad ②$$

将 $x = 0$ 代入原方程，得 $e^y = e \Rightarrow y = 1$.

将 $x = 0, y = 1$ 代入 ① 式，得 $y' = -\frac{1}{e}$，再将它们代入 ② 式，得

$$y''(0) = -\frac{e\left(-\frac{1}{e}\right)^2 - \frac{2}{e}}{e} = \frac{1}{e^2}.$$

12 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数$\frac{dy}{dx}$及二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1)$\begin{cases} x = a\cos^3\theta, \\ y = a\sin^3\theta; \end{cases}$　　(2)$\begin{cases} x = \ln\sqrt{1+t^2}, \\ y = \arctan t. \end{cases}$

【解】 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)} = -\tan\theta,$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-\sec^2\theta}{-3\cos^2\theta\sin\theta} = \frac{1}{3a}\sec^4\theta\csc\theta.$$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}} = \frac{1}{t},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{t^3}.$

13 求曲线$\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t} \end{cases}$在 $t = 0$ 相应的点处的切线方程及法线方程.

【解】 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-e^{-t}}{2e^t} = -\frac{1}{2e^{2t}},\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = -\frac{1}{2}.$

$t = 0$ 对应的点为(2,1),故过点(2,1)的切线方程为

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2),\ 即\ x + 2y - 4 = 0,$$

法线方程为 $y - 1 = 2(x-2)$, 即 $2x - y - 3 = 0$.

14 已知$f(x)$是周期为5的连续函数,它在 $x = 0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + o(x),$$

且$f(x)$在 $x = 1$ 处可导,求曲线 $y = f(x)$ 在点$(6, f(6))$处的切线方程.

【分析】 $f(x)$是周期为5的函数,所以欲求曲线在点$(6,f(6))$处的切线方程,只需求出$f(x)$在点 $x = 1$ 处的函数值及导数$f'(1)$.它们都可由给定的关系式得到.但只能由定义求$f'(1)$.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to0}[f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x)] = \lim\limits_{x\to0}[8x + o(x)]$,得

$f(1) - 3f(1) = 0$,故$f(1) = 0$.

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x)}{\sin x} = \lim\limits_{x\to0}\left[\frac{8x}{\sin x} + \frac{o(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right] = 8$,设 $\sin x = t$,则有

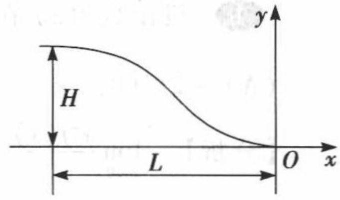
$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x)}{\sin x} = \lim_{t\to0}\frac{f(1+t) - f(1)}{t} + 3\lim_{t\to0}\frac{f(1-t) - f(1)}{-t} = 4f'(1).$$

所以$f'(1) = 2$.

由于$f(x+5) = f(x)$,所以$f(6) = f(1) = 0$, $f'(6) = f'(1) = 2$,

故所求的切线方程为 $y = 2(x-6)$,即$2x - y - 12 = 0$.

15 当正在高度 H 飞行的飞机开始向机场跑道下降时，如图所示，从飞机到机场的水平地面距离为 L. 假设飞机下降的路径为三次函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图形，其中 $y|_{x=-L}=H, y|_{x=0}=0$. 试确定飞机的降落路径.



第 15 题图

【解】 建立坐标系如图所示. 根据题意，可知

$$y|_{x=0}=0 \Rightarrow d=0.$$

$$y|_{x=-L}=H \Rightarrow -aL^3+bL^2-cL=H.$$

为使飞机平稳降落，尚需满足

$$y'|_{x=0}=0 \Rightarrow c=0.$$

$$y'|_{x=-L}=0 \Rightarrow 3aL^2-2bL=0.$$

解得 $a=\dfrac{2H}{L^3}, b=\dfrac{3H}{L^2}$. 故飞机的降落路径为

$$y=H\left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3+3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right].$$

16 甲船以 6km/h 的速率向东行驶，乙船以 8km/h 的速率向南行驶. 在中午十二点整，乙船位于甲船之北 16 km 处. 问下午一点整两船相离的速率为多少？

【解】 设从中午十二点整起，经过 t 小时，甲船与乙船的距离为

$$s=\sqrt{(16-8t)^2+(6t)^2},$$

故速率 $$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{2(16-8t)\cdot(-8)+72t}{2\sqrt{(16-8t)^2+(6t)^2}}.$$

当 $t=1$ 时(即下午一点整)两船相离的速率为 $v|_{t=1}=\dfrac{-128+72}{20}=-2.8(\mathrm{km/h})$.

17 利用函数的微分代替函数的增量，求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

【解】 令 $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=1$, $\Delta x=0.02$, $\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.02}}=f'(1)\Delta x=\dfrac{1}{3}\times 0.02$,

所以 $\Delta y=f(1.02)-f(1)\approx \mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.02}}$,

即 $\sqrt[3]{1.02}=f(1.02)\approx f(1)+\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.02}}=1+\dfrac{1}{3}\times 0.02\approx 1.007$.

18 已知单摆的振动周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，其中 $g=980\mathrm{cm/s^2}$，l 为摆长(单位为 cm). 设原摆长为 20cm，为使周期 T 增大 0.05s，摆长约需加长多少？

【解】 由 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，知 $l=\dfrac{gT^2}{4\pi^2}$，于是 $\Delta l\approx \mathrm{d}l=\dfrac{g}{2\pi^2}T\mathrm{d}T\approx\dfrac{g}{2\pi^2}T\Delta T$.

所以当 $g=980\mathrm{cm/s^2}, l_0=20\mathrm{cm}, \Delta T=0.05s$ 时，有 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{20}{980}}\approx 0.8976(s)$.

且 $\Delta l\approx\dfrac{g}{2\pi^2}T\Delta T=\dfrac{980}{2\pi^2}\times 0.8976\times 0.05\approx 2.2282(\mathrm{cm})$. 即摆长约需加长 2.2282cm.

考研试题选解

1 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0.

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)-f(0)}{x^3}$

$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0),$$

故应选(B).

2 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f'(0)>0$,则存在 $\delta>0$,使得

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加. (B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$. (D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

【分析】 由导数定义知 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$.

再由极限的不等式性质 $\Rightarrow \exists\delta>0$,当 $x\neq 0, x\in(-\delta,\delta)$ 时,$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$

$\Rightarrow$ 当 $x\in(0,\delta)$ $(x\in(-\delta,0))$ 时,$f(x)-f(0)>0$ (<0).因此应选(C).

【评注】 ① 由 $f'(a)>0$,同上可证:$\exists\delta>0$,当 $x\in(a,a+\delta)$ 时 $f(x)>f(a)$,当 $x\in(a-\delta,a)$ 时 $f(x)<f(a)$.但不能得出存在 a 点的某邻域使得 $f(x)$ 在该邻域单调增加.

② 若 $f'(a)>0$,又设 $f'(x)$ 在 $x=a$ 连续,则 $\exists\delta>0$,$f'(x)>0$ $(x\in(a-\delta,a+\delta))$,从而 $f(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 单调上升.

3 设 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在. (B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在. (D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

【分析一】 当 $f(0)=0$ 时,$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\exists \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)}{x}\exists$.

关于(A):$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}\cdot\dfrac{1-\cos h}{h^2}\overset{t=1-\cos h}{=\!=\!=}\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(t)}{t}$,

由此可知 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)\exists \Leftrightarrow f'_+(0)\exists$.

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导 $\Rightarrow$(A)成立,反之若(A)成立 $\Rightarrow f'_+(0)\exists \not\Rightarrow f'(0)\exists$.如 $f(x)=|x|$ 满足(A),但 $f'(0)$ 不 $\exists$.

关于(D):若 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导 $\Rightarrow$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=\lim_{h\to 0}\left[2\frac{f(2h)}{2h}-\frac{f(h)}{h}\right]=2f'(0)-f'(0)$$

$\Rightarrow$(D)成立.反之(D)成立 $\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}[f(2h)-f(h)]=0 \not\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 连续 $\not\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 可

导．如$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$满足(D)，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，因而$f'(0)$也不 ∃．

再看(C)：

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sinh)=\lim_{h\to 0}\frac{h-\sinh}{h^2}\cdot\frac{f(h-\sinh)}{h-\sinh}=\lim_{h\to 0}\frac{h-\sinh}{h^2}\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}\quad\text{（当它们都 ∃ 时）}.$$

注意，易求得$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h-\sinh}{h^2}=0$．因此，若$f'(0)$∃⇒(C)成立．反之若(C)成立⇏ $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}$∃(即$f'(0)$∃)．因为只要$\dfrac{f(t)}{t}$有界，仍有(C)成立．如$f(x)=|x|$满足(C)，但$f'(0)$不 ∃．

因此，只能选(B)．

【分析二】 直接考虑(B)：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)}{h}\xlongequal{x=1-e^h}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1-x)}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},$$

因此，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$∃ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$∃ $\Leftrightarrow$ $f'(0)$∃．应选(B)．

【评注】 以上是作了详尽分析．实际上考生不必如此详尽考虑．由$1-\cosh\geqslant 0$即知(A)不对．由$h-\sinh=o(h^2)$知(C)不对．由$f(2h)-f(h)=f(2h)-f(0)-[f(h)-f(0)]$知(D)不对．由$1-e^h\sim(-h)$知(B)正确．

4 设函数$f(x)$在点$x=a$处可导，则函数$|f(x)|$在点$x=a$处不可导的充分条件是

(A)$f(a)=0$且$f'(a)=0$． (B)$f(a)=0$且$f'(a)\neq 0$．

(C)$f(a)>0$且$f'(a)>0$． (D)$f(a)<0$且$f'(a)<0$．

【分析】 因为函数$f(x)$在$x=a$处可导，故$f(x)$必在点$x=a$处连续，由此可知，若$f(a)\neq 0$，则存在点$x=a$的一个邻域，使$f(x)$在该邻域内与$f(a)$同号，从而在该邻域内$|f(x)|$或恒等于$f(x)$或恒等于$-f(x)$，即$|f(x)|$在点$x=a$处必可导．可见(C)，(D)不正确．

为了判定选项(A)还是选项(B)正确，可采用举例法：设$f(x)=x^2$，$a=0$，$f(x)$满足$f(0)=f'(0)=0$，但是$|f(x)|=f(x)=x^2$在点$x=0$处可导，可见(A)不正确．从而应选(B)．

【评注】 可以证明在题设的条件下，若$f(a)=f'(a)=0$，则必有$|f(x)|$在点$x=a$处可导，且导数值仍为0．若$f(a)=0$，但$f'(a)\neq 0$，则$|f(x)|$在点$x=a$处左、右导数存在但不相等，因而不可导．事实上，由$f(a)=0$，令$\varphi(x)=|f(x)|$，有

$$\varphi'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\left|\frac{f(x)}{x-a}\right|=|f'_+(a)|=|f'(a)|,$$

$$\varphi'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)|}{x-a}=-\lim_{x\to a^-}\left|\frac{f(x)}{x-a}\right|=-|f'_-(a)|=-|f'(a)|.$$

所以，如果$f'(a)=0$，则$\varphi'_+(a)=\varphi'_-(a)=0$，$|f(x)|$在$x=a$可导．如果$f'(a)\neq 0$，则$\varphi'_+(a)\neq\varphi'_-(a)$，故$|f(x)|$在$x=a$不可导，应选(B)．

在此我们用了一个结论：若$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to\square}|f(x)|=|A|$．这可由夹逼定理及不等式$\big||f(x)|-|A|\big|\leqslant|f(x)-A|$推出．

综合可得：若$f(x)$在$x=a$可导，且$f(a)\neq 0$或$f(a)=f'(a)=0$时，则$|f(x)|$在$x=a$

也可导，且 $\left.|f(x)|'\right|_{x=a}=|f'(a)|$；但当 $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$ 时，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 必不可导.

上面的讨论可以进一步推广. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都可导，且 $F(x)=|f(x)|g(x)$，则有如下结论：

(1) 若 $f(x_0)\neq 0$，则 $F(x)$ 在 $x=x_0$ 必可导.

(2) 若 $f(x_0)=0$，则 $F(x)$ 在 $x=x_0$ 可导的充要条件是 $f'(x_0)g(x_0)=0$.

5 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f'(a)>0$，$f'(b)<0$，则下列结论中错误的是

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$.

【分析】 设 $f(x)=2-x^2$，$a=-1$，$b=1$，则 $f'(x)=-2x$ 在 $[a,b]=[-1,1]$ 上连续，且 $f'(a)=f'(-1)=2>0$，$f'(b)=f'(1)=-2<0$. 但在 $[a,b]=[-1,1]$ 上 $f(x)\geqslant 1$，即任何点 $x_0\in(a,b)=(-1,1)$ 都使 $f(x_0)\neq 0$. 这表明结论(D)是错误的，故应选(D).

也可由极限的保号性质及导数的定义证明结论(A)，(B)，(C)都是正确的. 由

$$f'(a)=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

可得，存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0$，即 $f(x_0)>f(a)$，这表明结论(A)正确. 类似可证结论(B)正确. 由闭区间上连续函数的介值定理可知结论(C)正确. 故应选(D).

6 设函数 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的

(A) 充分必要条件. (B) 必要但非充分条件.

(C) 充分但非必要条件 (D) 既非充分也非必要条件.

【分析】 因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的左、右导数分别是

$$\begin{aligned}f'_-(1)&=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\lim_{x\to 1-}\frac{|x^3-1|}{x-1}\varphi(x)=-\varphi(1)\lim_{x\to 1-}\frac{x^3-1}{x-1}\\&=-\varphi(1)\lim_{x\to 1-}(x^2+x+1)=-3\varphi(1),\\f'_+(1)&=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{|x^3-1|}{x-1}\varphi(x)=\varphi(1)\lim_{x\to 1+}\frac{x^3-1}{x-1}\\&=\varphi(1)\lim_{x\to 1+}(x^2+x+1)=3\varphi(1),\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导 $\Leftrightarrow$ $f'_+(1)$ 与 $f'_-(1)$ 存在且相等

$\Leftrightarrow$ $3\varphi(1)=-3\varphi(1)$ $\Leftrightarrow$ $\varphi(1)=0$.

应选(A).

7 设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=e^{1+g(x)}$，$h'(1)=1$，$g'(1)=2$，则 $g(1)$ 等于

(A) $\ln 3-1$. (B) $-\ln 3-1$. (C) $-\ln 2-1$. (D) $\ln 2-1$.

【分析】 按题设 $h'(x)=e^{1+g(x)}g'(x)$，令 $x=1\Rightarrow$

$$h'(1)=\mathrm{e}^{1+g(1)}g'(1),\text{即 }1=\mathrm{e}^{1+g(1)}\cdot 2,$$

亦即 $1+g(1)=\ln\dfrac{1}{2},\quad g(1)=-1-\ln 2$.选(C).

8 设 $y=(1+\sin x)^x$,则 $\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}=$ ________.

【分析】 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}\mathrm{e}^{x\ln(1+\sin x)}=(1+\sin x)^x\mathrm{d}[x\ln(1+\sin x)]$

$$=(1+\sin x)^x\left[\frac{x\cos x}{1+\sin x}+\ln(1+\sin x)\right]\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}=-\pi\mathrm{d}x.$$

9 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数,且 $f'(0)=1$,函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-x\mathrm{e}^{y-1}=1$ 所确定.设 $z=f(\ln y-\sin x)$,求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0},\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}$.

【分析与求解】 由方程 $y-x\mathrm{e}^{y-1}=1\Rightarrow y(0)=1$,

求导得 $y'-\mathrm{e}^{y-1}-x\mathrm{e}^{y-1}y'=0\Rightarrow y'(0)=1$.

再求导得 $y''-2\mathrm{e}^{y-1}y'-x(\mathrm{e}^{y-1}y')'=0\Rightarrow y''(0)=2$.

现由 $z=f(\ln y-\sin x)\Rightarrow$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f'(\ln y-\sin x)\left(\frac{1}{y}y'-\cos x\right)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=f'(0)\times 0=0.$$

又 $$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=f''(\ln y-\sin x)\left(\frac{1}{y}y'-\cos x\right)^2+f'(\ln y-\sin x)\left(-\frac{1}{y^2}y'^2+\frac{1}{y}y''+\sin x\right)$$

$$\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=f''(0)\times 0+f'(0)(-1+2)=1.$$

10 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+\mathrm{e}^y=x+1$ 确定的隐函数,则 $\dfrac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=$ ________.

【分析】 由 $xy+\mathrm{e}^y=x+1\Rightarrow y(0)=0$.将方程两边对 x 求导得

$$y+xy'+\mathrm{e}^yy'=1\Rightarrow y'(0)=1.$$

再将上述方程两边对 x 求导得

$$2y'+xy''+\mathrm{e}^yy'^2+\mathrm{e}^yy''=0.$$

令 $x=0\Rightarrow$ $2+1+y''(0)=0$,故 $y''(0)=-3$.

11 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$,则 $f'(x)=$ ________.

【分析】 直接计算可得

$$f(x)=\lim_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}=x\lim_{t\to 0}(1+3t)^{\frac{x}{t}}=x\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{x}{t}\ln(1+3t)}=x\mathrm{e}^{x\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+3t)}{t}}=x\mathrm{e}^{3x}.$$

故 $f'(x)=(x\mathrm{e}^{3x})'=\mathrm{e}^{3x}+3x\mathrm{e}^{3x}=(1+3x)\mathrm{e}^{3x}$.

12 设函数 $z=\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$,则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=$ ________.

【分析】 令 $u=\dfrac{x}{y}$,则 $z=(1+u)^u=\mathrm{e}^{u\ln(1+u)}$.当 $u>0$ 时利用一阶全微分形式不变性可得

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}[\mathrm{e}^{u\ln(1+u)}]=\mathrm{e}^{u\ln(1+u)}\mathrm{d}[u\ln(1+u)]=(1+u)^u\left[\ln(1+u)\mathrm{d}u+\frac{u}{1+u}\mathrm{d}u\right]$$

$$= (1+u)^u\left[\ln(1+u)+\frac{u}{1+u}\right]du.$$

由于$(x,y)=(1,1)$对应$u=1$，且

$$du\Big|_{(1,1)}=d\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_{(1,1)}=\frac{ydx-xdy}{y^2}\Big|_{(1,1)}=dx-dy,$$

故

$$dz\Big|_{(1,1)}=(1+1)^1\left[\ln(1+1)+\frac{1}{1+1}\right](dx-dy)$$

$$=2\left(\ln2+\frac{1}{2}\right)(dx-dy)=(2\ln2+1)(dx-dy).$$

13 设函数$y=\dfrac{1}{2x+3}$，则$y^{(n)}(0)=$ ________.

【分析】 用归纳法求解.

$$y'=-2(2x+3)^{-2},y''=2^2(-1)^2 2(2x+3)^{-3},y^{(3)}=2^3(-1)^3 3!(2x+3)^{-4}.$$

易归纳证得$y^{(n)}=2^n(-1)^n n!(2x+3)^{-(n+1)}$.

因此 $$y^{(n)}(0)=(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{3}n!.$$

14 函数$y=\ln(1-2x)$在$x=0$处的n阶导数$y^{(n)}(0)=$ ________.

【分析】 用归纳法．由

$$y=\ln(1-2x)\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{-2}{1-2x}=-2(1-2x)^{-1},$$

$$\Rightarrow\quad y''=-2(-1)(1-2x)^{-2}(-2)=-2^2(1-2x)^{-2},$$

$$y^{(3)}=-2^3\cdot2(1-2x)^{-3},$$

$$y^{(4)}=-2^4\cdot2\cdot3(1-2x)^{-4},\cdots$$

易归纳证明

$$y^{(n)}=-2^n(n-1)!(1-2x)^{-n}.$$

$$\Rightarrow\quad y^{(n)}(0)=-2^n(n-1)!.$$

15 函数$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$不可导点的个数是

(A)3.　　(B)2.　　(C)1.　　(D)0.

【分析】 当函数中出现绝对值号时，就有可能出现不可导的"尖点"，因为这时的函数是分段函数．$f(x)=(x^2-x-2)|x||x^2-1|$，当$x\neq0,\pm1$时$f(x)$可导，因而只须在$x=0,\pm1$处考察$f(x)$是否可导．在这些点我们分别考察其左、右导数．

由 $$f(x)=\begin{cases}(x^2-x-2)x(1-x^2), & x<-1,\\ (x^2-x-2)x(x^2-1), & -1\leqslant x<0,\\ (x^2-x-2)x(1-x^2), & 0\leqslant x<1,\\ (x^2-x-2)x(x^2-1), & 1\leqslant x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad f'_-(-1)=\lim_{x\to-1^-}\frac{(x^2-x-2)x(1-x^2)-0}{x+1}=0,$$

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x^2-x-2)x(x^2-1)-0}{x+1}=0,$$

因此$f(x)$在$x=-1$处可导．又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{(x^2-x-2)x(x^2-1)-0}{x}=2,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{(x^2-x-2)x(1-x^2)-0}{x}=-2,$$

所以$f(x)$在$x=0$处不可导.

类似,函数$f(x)$在$x=1$处亦不可导.因此$f(x)$只有2个不可导点,故应选(B).

【评注】 本题包含有绝对值函数,它是分段函数,又含有不可导点.因而还应注意可导函数与不可导函数的运算关系.

当$\varphi(x)$在x_0可导,$\psi(x)$在x_0不可导时,$\varphi(x)\pm\psi(x)$在x_0必不可导,但$\varphi(x)\psi(x)$在x_0未必不可导!有如下结论:若$\varphi(x)$在x_0可导,$\psi(x)$在x_0连续但不可导,则有

$$\varphi(x_0)=0\Leftrightarrow\varphi(x)\psi(x)\text{ 在 }x_0\text{ 可导}.$$

如本题,$\varphi(x)=x^2-x-2$处处可导,$\psi(x)=|x^3-x|=|x||x^2-1|$在$x=0,\pm1$处连续但不可导,由于$\varphi(0)=\varphi(1)=-2\neq0,\varphi(-1)=0$,$f(x)=\varphi(x)\psi(x)$在$x=-1$可导,仅在$x=0,1$两点处不可导.

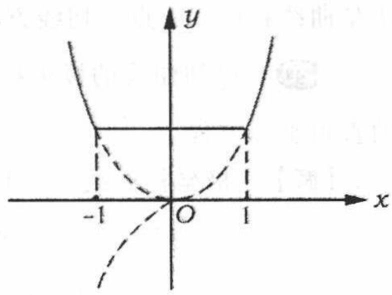
16 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内

(A)处处可导.

(B)恰有一个不可导点.

(C)恰有两个不可导点.

(D)至少有三个不可导点.



第16题图

【分析】 先求$f(x)$的表达式.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=\lim_{n\to+\infty}(1+|x|^{3n})^{\frac1n}=1^0=1(|x|<1),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=\lim_{n\to+\infty}(1+1)^{\frac1n}=2^0=1(|x|=1),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=|x|^3\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{|x|^{3n}}\right)^{\frac1n}=|x|^3(|x|>1).$$

因此,
$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant1,\\ |x|^3, & |x|>1.\end{cases}$$

由$y=f(x)$的表达式及它的函数图形(见右图)可知,$f(x)$在$x=\pm1$处不可导(图形是尖点),其余点$f(x)$均可导,因此选(C).

【评注】 本题求出$f(x)$的表达式后,也可根据导数与左、右导数的关系进行判断:由于

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to-1^-}\frac{-x^3-1}{x+1}=-3,\qquad f'_+(-1)=\lim_{x\to-1^+}\frac{1-1}{x+1}=0;$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{1-1}{x-1}=0,\qquad f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=3,$$

所以函数$f(x)$在$x=\pm1$处均不可导,即有两个不可导点.故(C)正确.

17 曲线$y=x^2$与曲线$y=a\ln x(a\neq0)$相切,则$a=$

(A)4e. (B)3e. (C)2e. (D)e.

【分析】 设$y=x^2$与$y=a\ln x(a\neq0)$相切的切点为(x_0,y_0),则

$$\begin{cases} x_0^2 = a\ln x_0, \\ (x^2)'\big|_{x_0} = (a\ln x)'\big|_{x_0}, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x_0^2 = a\ln x_0, \\ 2x_0 = \dfrac{a}{x_0} \end{cases} \Rightarrow \quad x_0 = e^{\frac{1}{2}}, \quad a = 2e.$$

因此选(C).

18 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $xy + 2\ln x = y^4$ 所确定,则曲线 $y = f(x)$ 在点(1,1)处的切线方程是________.

【分析】 点(1,1)在曲线上.方程两边对 x 求导,得 $xy' + y + 2\dfrac{1}{x} = 4y^3y'$.

以 $x = y = 1$ 代入,得 $y' + 1 + 2 = 4y'$, $y' = 1$.

点(1,1)处的切线方程为 $y - 1 = x - 1$,即 $y = x$.

19 曲线 $\sin(xy) + \ln(y - x) = x$ 在点(0,1)处的切线方程是________.

【分析】 (0,1)在曲线上,先求 $y'(0)$.方程两边对 x 求导得

$$\cos(xy)\cdot(y + xy') + \frac{1}{y - x}(y' - 1) = 1.$$

令 $x = 0, y = 1$ 得 $1 + y'(0) - 1 = 1$, 即 $y'(0) = 1$.

于是曲线在(0,1)点的切线方程是 $y = x + 1$.

20 已知曲线的极坐标方程是 $r = 1 - \cos\theta$,求该曲线上对应于 $\theta = \pi/6$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

【解】 极坐标曲线 $r = 1 - \cos\theta$ 在直角坐标系的参数方程为

$$\begin{cases} x = (1 - \cos\theta)\cos\theta = \cos\theta - \cos^2\theta, \\ y = (1 - \cos\theta)\sin\theta = \sin\theta - \dfrac{1}{2}\sin 2\theta, \end{cases}$$

又 $y'_x = \dfrac{y'_\theta}{x'_\theta} = \dfrac{\cos\theta - \cos 2\theta}{\sin 2\theta - \sin\theta}$,且 $x\big|_{\theta=\pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $y\big|_{\theta=\pi/6} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 而 $y'_x\big|_{\theta=\pi/6} = 1$,故所求切线方程与法线方程分别为

$$y - \frac{2 - \sqrt{3}}{4} = x - \frac{2\sqrt{3} - 3}{4}, \quad y - \frac{2 - \sqrt{3}}{4} = -x + \frac{2\sqrt{3} - 3}{4}.$$

21 曲线 $\tan\left(x + y + \dfrac{\pi}{4}\right) = e^y$ 在点(0,0)处的切线方程为________.

【分析】 首先求曲线在点(0,0)处切线的斜率 $y'(0)$.为此把 $\tan\left(x + y + \dfrac{\pi}{4}\right) = e^y$ 看成关于 x 的恒等式,两端对 x 求导数即得

$$\frac{1}{\cos^2\left(x + y + \dfrac{\pi}{4}\right)}(1 + y') = e^y y'.$$

在上式中令 $x = 0$ 并利用 $y(0) = 0$ 就有

$$2[1 + y'(0)] = y'(0) \Rightarrow y'(0) = -2.$$

故所求切线方程为 $y = -2x$.

22 设曲线 $f(x) = x^n$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n, 0)$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(\xi_n) =$

________.

【分析】 因曲线 $f(x) = x^n$ 在点(1,1)处切线的斜率

$$k = f'(1) = nx^{n-1}\Big|_{x=1} = n,$$

故切线方程为 $y = 1 + n(x-1)$,令 $y = 0$,得 ξ_n 满足 $0 = 1 + n(\xi_n - 1)$,即 $\xi_n = 1 - \frac{1}{n}$,因此,

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

【评注】 本题主要考查函数在某点导数的几何意义和重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

23 已知曲线 $y = x^3 - 3a^2x + b$ 与 x 轴相切,则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2 =$ ________.

【分析】 $y'(x) = 3x^2 - 3a^2$,令 $y'(x) = 0$ 有 $x = a$ 或 $x = -a$. 由题设还有 $a^3 - 3a^3 + b = 0$ 或 $-a^3 + 3a^3 + b = 0$,所以 $b = 2a^3$ 或 $b = -2a^3$,即 $b^2 = 4a^6$.

24 已知一个长方形的长 l 以 2cm/s 的速率增加,宽 w 以 3cm/s 的速率增加,则当 $l = 12$cm,$w = 5$cm 时,它的对角线增加的速率为________.

【分析】 长方形长为 l,宽为 w,它们随时间 t 而变化,依题设 l,w 的变化速率分别为

$$\frac{dl}{dt} = 2(\text{cm/s}), \quad \frac{dw}{dt} = 3(\text{cm/s}).$$

对角线长记为 A,$A = \sqrt{l^2 + w^2}$,即 $A^2 = l^2 + w^2$,两边分别对 t 求导得

$$2A\frac{dA}{dt} = 2l\frac{dl}{dt} + 2w\frac{dw}{dt}.$$

当 $l = 12(\text{cm})$,$w = 5(\text{cm})$ 时,

$$A = \sqrt{l^2 + w^2} = \sqrt{169} = 13(\text{cm})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = (12 \times 2 + 5 \times 3)/13 = 3(\text{cm/s}).$$

因此对角线增加速率为 3(cm/s).

第三章　微分中值定理与导数的应用

习题 3－1　微分中值定理

1 验证罗尔定理对函数 $y = \ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上的正确性.

【证】 函数 $f(x) = \ln\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上连续，在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ 内可导，又 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = \ln\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \ln\left[\sin\frac{5\pi}{6}\right] = \ln\frac{1}{2}$，即 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5}{6}\pi\right)$，故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理条件，由罗尔定理知至少存在一点 $\xi \in \left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，使 $f'(\xi) = 0$. 又，$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$，令 $f'(x) = 0$ 得 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}(n = 0, \pm 1 \pm 2,\cdots)$.

取 $n = 0$，得 $\xi = \frac{\pi}{2} \in \left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$. 因此罗尔定理对函数 $y = \ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上是正确的.

2 验证拉格朗日中值定理对函数 $y = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$ 在区间 $[0,1]$ 上的正确性.

【证】 函数 $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，从而至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{-2-(-2)}{1} = 0.$$

又 $f'(\xi) = 12\xi^2 - 10\xi + 1 = 0$ 可知 $\xi = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{12} \in (0,1)$，因此拉格朗日中值定理对函数 $y = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$ 在区间 $[0,1]$ 上是正确的.

3 对函数 $f(x) = \sin x$ 及 $F(x) = x + \cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

【证】 函数 $f(x) = \sin x$，$F(x) = x + \cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内上连续，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内 $F'(x) = 1 - \sin x \neq 0$，故 $f(x)$、$F(x)$ 满足柯西中值定理条件，从而至少存在一点 $\xi \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},$$

由 $\frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-1} = \frac{\cos\xi}{1-\sin\xi}$，可得 $\tan\frac{\xi}{2} = \frac{\pi-2}{2}$. 因 $0 < \frac{\pi-2}{2} < 1$，故 $\xi = 2\arctan\left(\frac{\pi-2}{2}\right) \in$

$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 因此,柯西中值定理对 $f(x) = \sin x, F(x) = x + \cos x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是正确的.

4 试证明对函数 $y = px^2 + qx + r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

【证】 任取数值 a,b,不妨设 $a < b$,函数 $f(x) = px^2 + qx + r$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,故由拉格朗日中值定理知至少存在一点 $\xi \in (a,b)$,使

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a),$$

即 $pb^2 + qb + r - pa^2 - qa - r = (2p\xi + q)(b - a)$. 经整理得 $\xi = \dfrac{a+b}{2}$,即所求得的 ξ 总是位于区间的正中间.

5 不用求出函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数,说明方程 $f'(x) = 0$ 有几个实根,并指出它们所在的区间.

【解】 函数 $f(x)$ 分别在 $[1,2],[2,3],[3,4]$ 上连续,分别在 $(1,2),(2,3),(3,4)$ 内可导,且 $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$. 由罗尔定理知至少存在 $\xi_1 \in (1,2), \xi_2 \in (2,3), \xi_3 \in (3,4)$,使

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0.$$

即方程 $f'(x) = 0$ 至少有三个实根,又方程 $f'(x) = 0$ 为三次方程,故它至多有三个实根,因此方程 $f'(x) = 0$ 有且仅有三个实根,它们分别位于区间 $(1,2),(2,3),(3,4)$ 内.

6 证明恒等式:$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

【证】 令 $f(x) = \arcsin x + \arccos x, |x| \leqslant 1$,则 $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. 从而 $f(x) = c$,c 是常数. 令 $x = 0$,则

$$c = f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \text{即} f(x) = \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

7 若方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x = 0$ 有一个正根 $x = x_0$,证明方程 $a_0nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

【证】 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x, x \in [0,x_0]$,由于 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上连续,在 $(0,x_0)$ 内可导,且 $f(0) = f(x_0) = 0$. 根据罗尔定理,存在 $\xi \in (0,x_0)$,使得 $f'(\xi) = 0$,即方程

$$a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

必有一个小于 x_0 的正根 ξ.

8 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数,且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$,其中 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$,证明:在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ,使 $f''(\xi) = 0$.

【证】 因 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续,在 (x_1,x_2) 内可导,且 $f(x_1) = f(x_2)$,根据罗尔定理,存在 $\xi_1 \in (x_1,x_2)$,使 $f'(\xi_1) = 0$. 同理可得,存在 $\xi_2 \in (x_2,x_3)$,使 $f'(\xi_2) = 0$. 又函数 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续,在 (ξ_1,ξ_2) 内可导,且 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$,根据罗尔定理,存在 $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$,使 $f''(\xi) = 0$. 又因为 $x_1 < \xi_1 < \xi < \xi_2 < x_3$,故 $\xi \in (x_1,x_3)$.

9 设 $a > b > 0, n > 1$,证明:$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$.

【证】 设 $f(x) = x^n, x \in [b,a]$. 显然 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件,根据

定理,应有

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),\xi\in(b,a),$$

即 $a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b)$. 又由 $0<b<\xi<a$,且 $n>1$,所以 $b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^{n-1}$. 故有

$$nb^{n-1}(a-b)<n\xi^{n-1}(a-b)<na^{n-1}(a-b),$$

于是 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

10 设 $a>b>0$,证明:$\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

【证】 设 $f(x)=\ln x$, $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续,在 (b,a) 内可导. 由拉格朗日定理得 $f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$,即 $\ln a-\ln b=\dfrac{1}{\xi}(a-b),\xi\in(b,a)$.

因为 $0<b<\xi<a$,所以 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{b}$. 故有

$$\frac{1}{a}<\frac{\ln a-\ln b}{a-b}<\frac{1}{b},\text{即}\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

11 证明下列不等式:

(1) $|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$;　　(2) 当 $x>1$ 时,$e^x>e\cdot x$.

【证】 (1) 令 $f(x)=\arctan x,x\in[a,b]$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导. 由拉格朗日定理,得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$,即

$$\arctan b-\arctan a=\frac{1}{1+\xi^2}(b-a),a<\xi<b.$$

故

$$|\arctan b-\arctan a|=\left|\frac{1}{1+\xi^2}(b-a)\right|\leqslant|b-a|.$$

(2) 设 $f(t)=e^t$,由于 $f(t)$ 在 $[1,x]$ 上连续,在 $(1,x)$ 内可导. 根据拉格朗日定理,得

$$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1),\xi\in(1,x),$$

即 $e^x-e=e^{\xi}(x-1)$. 又因 $1<\xi<x$,所以 $e<e^{\xi}<e^x$,故 $e^x-e>e(x-1)$,即 $e^x>e\cdot x$.

12 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

【证】 取函数 $f(x)=x^5+x-1$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(0)=-1<0$, $f(1)=1>0$,由零点定理知至少存在点 $x_1\in(0,1)$ 使 $f(x_1)=0$,即方程 $x^5+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个正根.

若方程 $x^5+x-1=0$ 还有一个正根 x_2,即 $f(x_2)=0$,则由 $f(x)=x^5+x-1$ 在 $[x_1,x_2]$(或 $[x_2,x_1]$)上连续,在 (x_1,x_2)(或 (x_2,x_1))内可导知 $f(x)$ 满足罗尔定理条件,故至少存在点 $\xi\in(x_1,x_2)$(或 (x_2,x_1)),使 $f'(\xi)=0$.

但 $f'(\xi)=5\xi^4+1>0$,矛盾. 因此方程 $x^5+x-1=0$ 只有一正根.

13 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,证明在 (a,b) 内有一点 ξ,使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b)\\ g(a) & g(b)\end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi)\\ g(a) & g'(\xi)\end{vmatrix}.$$

【证】 在 $[a,b]$ 上考虑辅助函数

$$F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x)\\ g(a) & g(x)\end{vmatrix}=f(a)g(x)-g(a)f(x),$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由拉格朗日中值定理，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a).$$

注意到 $F(a)=0$， $F'(x)=f(a)g'(x)-g(a)f'(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f'(x) \\ g(a) & g'(x) \end{vmatrix}$.

于是得到 $$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

14 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=e^x$.

【证】 作辅助函数 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，于是有 $\varphi'(x)=\dfrac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}$. 已知 $f'(x)=f(x)$，从而 $\varphi'(x)\equiv 0$，于是 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}\equiv c$（常数）. 当 $x=0$ 时，易知 $\varphi(0)=\dfrac{f(0)}{e^0}=1$，所以 $c=1$，即 $\dfrac{f(x)}{e^x}\equiv 1$，故 $f(x)=e^x$.

15 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，试用柯西中值定理证明：

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}(0<\theta<1).$$

【证】 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数，在该邻域内任取点 x，由柯西中值定理得

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}，\text{其中 } \xi_1 \text{ 介于 } 0,x \text{ 之间}.$$

又 $$\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n(\xi_1^{n-1}-0^{n-1})}=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}}，\text{其中 } \xi_2 \text{ 介于 } 0,\xi_1 \text{ 之间}.$$

依此类推，得

$$\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!\xi_{n-1}}=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{n!(\xi_{n-1}-0)}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}，\text{其中 } \xi_n \text{ 介于 } 0,\xi_{n-1} \text{ 之间}.$$

记 $\xi_n=\theta x(0<\theta<1)$，因此 $\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}(0<\theta<1)$.

习题 3－2　洛必达法则

1 用洛必达法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；　(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$；

(4) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$；　(5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；　(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}(a\neq 0)$；

(7) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$；　(8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$；　(9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$; (11) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$; (12) $\lim\limits_{x\to 0}x^2 e^{1/x^2}$;

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; (14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$; (15) $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}$;

(16) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3\cos 3x}{5\sec^2 5x}=-\dfrac{3}{5}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=-\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cot x}{\pi-2x}=-\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\csc^2 x}{-2}=-\dfrac{1}{8}$.

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\dfrac{m}{n}a^{m-n}\ (a\neq 0)$.

(7) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{7\cot 7x\dfrac{1}{\cos^2 7x}}{2\cot 2x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 2x}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\cos 2x}{\cos 7x}\cdot\dfrac{\sin 2x/2x}{\sin 7x/7x}=1$.

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{6\cos 3x(-\sin 3x)}{6\cos x(-\sin x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}=3\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 6x}{\cos 2x}=3$.

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{x+x^2}=1$.

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\ln(1+x^2)}{1-\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{-2\cos x(-\sin x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(1+x^2)\cos x\sin x}$

$=1$.

(11) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2\sec^2 2x}=\dfrac{1}{2}$.

(12) $\lim\limits_{x\to 0}x^2 e^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^{-2}}}{x^{-2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^{-2}}(-2x^{-3})}{-2x^{-3}}=+\infty$.

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$.

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a}=e^a$.

(15) 设 $y=x^{\sin x}$,则 $\ln y=\sin x\ln x$. 于是

$$\lim_{x\to+0}\sin x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\csc x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=0.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}=e^0=1$.

(16) 设 $y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$，则 $\ln y=-\tan x\ln x$. 于是

$$\lim_{x\to+0}(-\tan x\ln x)=-\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\cot x}=-\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-\csc^2 x}=0.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=1$.

2 验证$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$存在，但不能用洛必达法则得出.

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$. 如果用洛必达法则，那么

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x).$$

但当 $x\to\infty$ 时，$1+\cos x$ 的极限不存在，故不能用洛必达法则.

3 验证极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$存在，但不能用洛必达法则得出.

【解】 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x}=0$.

又 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant1$ 为有界函数，因此$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0$. 但若用洛必达法则，则

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x},$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to0}2x\sin\frac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$不存在，从而$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$不存在. 洛必达法则此时失效，这是因为$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在，从而不能用洛必达法则.

4 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点处的连续性.

【解】 令 $y=\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$，则 $\ln y=\frac{1}{x}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-1\right]$.

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+x}$$
$$=-\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = e^{-\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x\to-0} f(x) = f(0)$,即$f(x)$在$x=0$处连续.

习题3-3 泰勒公式

1 按$(x-4)$的幂展开多项式$f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$.

【解】 由于$f(x)$为4次多项式,故有$f(x) = a_0 + a_1(x-4) + a_2(x-4)^2 + a_3(x-4)^3 + a_4(x-4)^4$,其中$a_0 = f(4) = -56$, $a_1 = f'(4) = (4x^3 - 15x^2 + 2x - 3)\big|_{x=4} = 21$, $a_2 = \frac{1}{2!}f''(4) = \frac{1}{2}(12x^2 - 30x + 2)\big|_{x=4} = 37$, $a_3 = \frac{1}{3!}f'''(4) = \frac{1}{6}(24x - 30)\big|_{x=4} = 11$, $a_4 = \frac{1}{4!}f^{(4)}(4) = \frac{1}{24}\cdot 24 = 1$. 所以

$$f(x) = -56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4.$$

2 应用麦克劳林公式,按x的幂展开函数$f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$.

【解】 因为$f(x)$是x的6次多项式,所以

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6.$$

计算出:$f(0) = 1$, $f'(0) = -9$, $f''(0) = 60$, $f'''(0) = -270$,
$f^{(4)}(0) = 720$, $f^{(5)}(0) = -1080$, $f^{(6)}(0) = 720$.

故 $f(x) = 1 - 9x + 30x^2 - 45x^3 + 30x^4 - 9x^5 + x^6$.

3 求函数$f(x) = \sqrt{x}$按$(x-4)$的幂展开的带有拉格朗日型余项的3阶泰勒公式.

【解】 因为$f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$,于是$f(4) = 2$, $f'(4) = \frac{1}{4}$, f, $f''(4) = -\frac{1}{32}$, $f'''(4) = \frac{3}{256}$. 故

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4 \\ &= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{15}{384\xi^{7/2}}(x-4)^4,\end{aligned}$$

其中ξ介于x与4之间.

4 求函数$f(x) = \ln x$按$(x-2)$的幂展开的带有佩亚诺型余项的n阶泰勒公式.

【解】 因为$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$, $f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n}$,故

$$\begin{aligned}\ln x &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \cdots + \\ &\quad \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + o[(x-2)^n] \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{2^3}(x-2)^2 + \frac{1}{3\cdot 2^3}(x-2)^3 + \cdots +\end{aligned}$$

$$(-1)^{(n-1)}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o[(x-2)^n].$$

5 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.

【解】 因为 $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, $f^{(n)}(-1)=-n!$,故

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}&=f(-1)+f'(-1)(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3+\cdots+\\&\quad\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}\\&=-[1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^n]+(-1)^{n+1}\xi^{-(n+2)}(x+1)^{n+1},\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 x 与 -1 之间.

6 求函数 $f(x)=\tan x$ 的带有拉格朗日型余项的3阶麦克劳林公式.

【解】 因为 $f(x)=\tan x$, $f'(x)=\sec^2 x$, $f''(x)=2\sec^2 x\tan x$,

$$f'''(x)=4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x,$$

$$\begin{aligned}f^{(4)}(x)&=8\sec^2 x\tan^3 x+8\sec^4 x\tan x+8\sec^4 x\tan x\\&=8\sec^2 x\tan^3 x+16\sec^4 x\tan x=\frac{8(\sin^2 x+2)\sin x}{\cos^5 x},\end{aligned}$$

$$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=0,f'''(0)=2,$$

故

$$\begin{aligned}\tan x&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4\\&=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{(\sin^2\xi+2)\sin\xi}{3\cos^5\xi}x^4,\end{aligned}$$ 其中 ξ 介于 $0,x$ 之间.

7 求函数 $f(x)=xe^x$ 的带有佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式.

【解】 因为 $f(x)=xe^x$, $f^{(n)}(x)=(n+x)e^x$, $f^{(n)}(0)=n$,故

$$\begin{aligned}xe^x&=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n)\\&=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n).\end{aligned}$$

8 验证当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时,按公式 $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时,所产生的误差小于0.01,并求 $\sqrt{e}$ 的近似值,使误差小于0.01.

【解】 因 e^x 的三阶麦克劳林展开式的余项为 $R_3(x)=\frac{e^{\theta x}}{4!}\cdot x^4$,所以用公式 $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ 来计算 e^x 的近似值时,所产生的误差为 $|R_3(x)|=\frac{e^{\theta x}}{24}x^4$. 现已知 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$,而 $0<\theta<1$,

所以 $$|R_3(x)|<\frac{e^{\frac{1}{2}}}{24}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{\sqrt{e}}{384}\approx 0.0045<0.01.$$

以 $x=\frac{1}{2}$ 代入公式,则 $\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3\approx 1.645$,且计算误差小于0.01.

9 应用3阶泰勒公式求下列各数的近似值,并估计误差:

(1) $\sqrt[3]{30}$;　　(2) $\sin 18°$.

【解】 (1) 设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$, 则 $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, $f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$, $f^{(4)}(x)=-\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}}$;得 $f(27)=3$, $f'(27)=\frac{1}{3^3}$, $f''(27)=-\frac{2}{3^7}$, $f'''(27)=\frac{10}{3^{11}}$.

故 $$\sqrt[3]{x}\approx 3+\frac{1}{3^3}(x-27)-\frac{1}{3^7}(x-27)^2+\frac{5}{3^{12}}(x-27)^3.$$

于是 $$\sqrt[3]{30}\approx 3+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^5}+\frac{5}{3^9}\approx 3.10724.$$

又 $R_3(x)=-\dfrac{80}{4!81[27+\theta(x-27)]^{\frac{11}{3}}}(x-27)^4$,其中 $0<\theta<1,x=30$,故

$$|R_3|<\frac{80}{4!\cdot 81\cdot 3^{11}}\cdot 3^4=\frac{10}{3^{12}}\approx 1.88\times 10^{-5}.$$

(2) 设 $f(x)=\sin x$,求在 $x_0=0$ 处 $f(x)$ 的三阶泰勒公式,有 $\sin x\approx x-\frac{1}{6}x^3$,所以 $\sin 18°\approx \frac{\pi}{10}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3\approx 0.3142-0.0052=0.3090$. 又 $R_3(x)=\frac{\sin\theta x}{4!}x^4$, $0<\theta<1$, $x=\frac{\pi}{10}$,

所以 $|R_3|<\frac{1}{24}\sin\frac{\pi}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^4<\frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5<1.3\times 10^{-4}$.

10 利用泰勒公式求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2^3x})$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$;　　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin^2 x}$.

【解】 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{2}+\frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=\frac{3}{2}.$$

(2) 原式 $$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-1-\left(-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{-\frac{1}{12}}{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}.$$

(3) 原式 $$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\left[1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-1-x^2+o(x^2)\right][x^2+o(x^2)]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4 + o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{3}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4}} = \frac{\frac{1}{8}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{12}.$$

习题3－4　函数的单调性与曲线的凹凸性

1 判定函数 $f(x) = \arctan x - x$ 的单调性.

【解】 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 且可导,则 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 \leqslant 0$.

$f'(x)$ 仅在 $x = 0$ 时 $f'(x) = 0$,故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 严格单调减少.

2 判定函数 $f(x) = x + \cos x (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ 的单调性.

【解】 $f'(x) = 1 - \sin x \geqslant 0$ 且 $f'(x) = 0$ 仅在 $x = \frac{\pi}{2}$ 时成立,因此函数 $f(x) = x + \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上单调增加.

3 确定下列函数的单调区间:

(1) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7$;　(2) $y = 2x + \frac{8}{x} (x > 0)$;

(3) $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$;　(4) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$;

(5) $y = (x-1)(x+1)^3$;　(6) $y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}\ (a > 0)$;

(7) $y = x^n e^{-x} (n > 0, x \geqslant 0)$;　(8) $y = x + |\sin 2x|$.

【解】 (1) 所给函数在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,可导,且 $y' = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x+1)(x-3)$,可得函数的两个驻点: $x_1 = -1, x_2 = 3$.

在 $(-\infty, -1), (-1, 3), (3, +\infty)$ 内, y' 分别取 $+, -, +$ 号. 故知函数在 $(-\infty, -1]$, $[3, +\infty)$ 内单调增加;在 $[-1, 3]$ 内单调减少.

(2) 函数有一个间断点 $x = 0$ 在定义域外,在定义域内处处可导,且 $y' = 2 - \frac{8}{x^2}$,则函数有两个驻点: $x = \pm 2$,在部分区间 $(-2, 0), (0, 2)$ 内, $y' < 0$;在 $(-\infty, -2), (2, +\infty)$ 内 $y' > 0$,故知函数在 $(-\infty, -2], [2, +\infty)$ 内单调增加,而在 $[-2, 0]$ 及 $[0, 2]$ 内单调减少.

(3) 函数有一个间断点 $x = 0$.

$y' = -\frac{10(2x^2 - 18x + 6)}{(4x^3 - 9x^2 + 6x)^2} \Rightarrow$ 有两个驻点 $x = 1$ 和 $x = \frac{1}{2}$,在 $(-\infty, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right], [1, +\infty)$ 内 $y' < 0$,函数单调减少;在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上, $y' > 0$,函数单调增加.

(4) 函数定义域为 $(-\infty, +\infty)$. $y' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} > 0 \Rightarrow$ 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

(5) 函数定义域为 $(-\infty, +\infty)$,且 $y' = 2(x+1)^2(2x-1) \Rightarrow$ 函数有两个驻点: $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$. 在 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 内, $y' < 0$,函数单调减少;在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 内, $y' > 0$,函数单调增加.

(6) 函数定义域为$(-\infty, +\infty)$,且仅在$x=\dfrac{a}{2}$及$x=a$处不可导,在其余各点,令

$$y'=\frac{4a-6x}{3\sqrt[3]{(2x-a)^2(a-x)}}=0,$$

易知函数仅有一个驻点$x=\dfrac{2}{3}a$.

在$x\in\left(-\infty,\dfrac{a}{2}\right)$时,$y'>0$;在$x\in\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{2a}{3}\right)$时,$y'>0$;在$x\in\left(\dfrac{2a}{3},a\right)$时,$y'<0$;在$x\in(a,+\infty)$时,$y'>0$.

可见,函数在$\left(-\infty,\dfrac{2a}{3}\right]$及$[a,+\infty)$内单调增加,在$\left[\dfrac{2a}{3},a\right]$内单调减少.

(7) 函数定义域为$[0,+\infty)$,$y'=nx^{n-1}e^{-x}-x^ne^{-x}=e^{-x}x^{n-1}(n-x)\Rightarrow$ 驻点为$x=0$,$x=n$.在$[0,n]$上$y'>0$,函数单调增加;在$[n,+\infty)$上$y'<0$,函数单调减少.

(8) 函数定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$y=\begin{cases}x+\sin 2x, & x\in\left[n\pi,n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right],\ n\in\mathbf{Z},\\ x-\sin 2x, & x\in\left[n\pi-\dfrac{\pi}{2},n\pi\right],\ n\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

1) 当$x\in\left[n\pi,n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$时,$y'=1+2\cos 2x$,则

$$y'\geqslant 0\Leftrightarrow \cos 2x\geqslant -\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left[n\pi,n\pi+\frac{\pi}{3}\right];$$

$$y'\leqslant 0\Leftrightarrow \cos 2x\leqslant -\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left[n\pi+\frac{\pi}{3},n\pi+\frac{\pi}{2}\right].$$

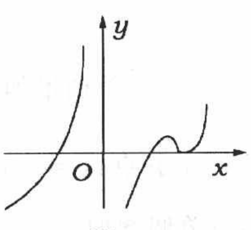
2) 当$x\in\left[n\pi-\dfrac{\pi}{2},n\pi\right]$时,$y'=1-2\cos 2x$,则

$$y'\geqslant 0\Leftrightarrow \cos 2x\leqslant \frac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left[n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi-\frac{\pi}{6}\right];$$

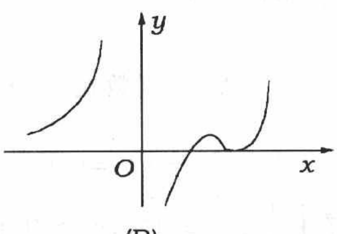
$$y'\leqslant 0\Leftrightarrow \cos 2x\geqslant \frac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left[n\pi-\frac{\pi}{6},n\pi\right].$$

综上所述,函数单调增加区间为$\left[\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$,函数单调减少区间为$\left[\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3},\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.

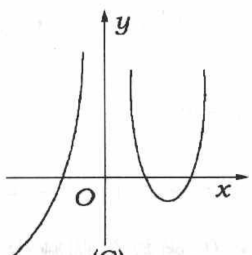
4 设函数$f(x)$在定义域内可导,$y=f(x)$的图形如图所示,则导函数$y=f'(x)$的图形为



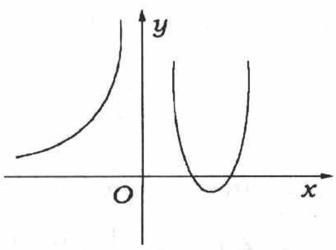
(A)



(B)



(C)

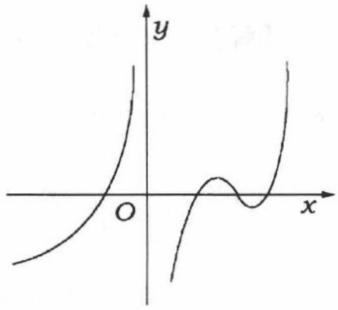


(D)

【分析】 当 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调增 $\Rightarrow f'(x)\geqslant 0$，(A)，(C) 不对；

当 $x>0$ 时，$f(x)$：增 —— 减 —— 增 $\Rightarrow f'(x)$：正 —— 负 —— 正，(B) 不对，(D) 对.

应选(D).



第 4 题图

5 证明下列不等式：

(1) 当 $x>0$ 时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$；

(2) 当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$；

(3) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x+\tan x>2x$；

(4) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$；

(5) 当 $x>4$ 时，$2^x>x^2$.

【证】 (1) 令 $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$.

当 $x>0$ 时 $\Rightarrow f'(x)>0$，即 $f(x)$ 为严格单调增加函数 $\Rightarrow f(x)>f(0)=0\Rightarrow 1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$.

(2) 令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$， 则 $f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

当 $x>0$ 时，$\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)>f(0)=0\Rightarrow 1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

(3) 令 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$， 则

$$f'(x)=\frac{(1-\cos x)(\cos^2x+\cos x+1)}{\cos^2x}.$$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时 $\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 为严格单调递增 $\Rightarrow f(x)>f(0)=0\Rightarrow \sin x+\tan x>2x$.

(4) 令 $f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3$，它在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内连续可导，且在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内

$$f'(x)=\sec^2x-1-x^2=\tan^2x-x^2>0,$$

故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内严格单调增加，即 $f(x)>f(0)=0$.

所以，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$.

(5) 令 $f(x)=2^x-x^2$，则 $f'(x)=2^x\ln2-2x$，$f''(x)=2^x(\ln2)^2-2$.

当 $x>4$ 时 $\Rightarrow f''(x)>2^4(\ln2)^2-2>0\Rightarrow f'(x)$ 在 $x>4$ 时严格单调增加 $\Rightarrow f'(x)>f'(4)=2^4\ln2-8>0\Rightarrow f(x)$ 严格单调增加 $\Rightarrow f(x)>f(4)=0\Rightarrow 2^x>x^2$.

6 讨论方程 $\ln x=ax\ (a>0)$ 有几个实根？

【解】 取函数 $f(x)=\ln x-ax, x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a$.

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=\dfrac{1}{a}$.

当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，因此函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 内单调增加.

当 $\dfrac{1}{a}<x<+\infty$ 时，$f'(x)<0$，因此函数 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 内单调减少.

从而 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$ 为最大值，又 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，故

(1) 当 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}-1=0$ 即 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，曲线 $y=\ln x-ax$ 与 x 轴仅有一个交点，这时，原方程有唯一实根.

(2) 当 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}-1>0$，即 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，曲线 $y=\ln x-ax$ 与 x 轴有两个交点. 这时原方程有两个实根.

(3) 当 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}-1<0$，即 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，曲线 $y=\ln x-ax$ 与 x 轴没有交点，这时原方程没有实根.

7 单调函数的导函数是否必为单调函数?研究下面例子: $f(x)=x+\sin x$.

【解】 单调函数的导函数不一定是单调函数. 例如函数 $f(x)=x+\sin x$，由于 $f'(x)=1+\cos x\geqslant0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调函数，但 $f'(x)=1+\cos x$ 不是单调函数，因为 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，$f'(0)=2$.

8 设 I 为一无穷区间，函数 $f(x)$ 在 I 上连续，I 内可导，试证明：如果在 I 的任一有限的子区间上，$f'(x)\geqslant0$（或 $f'(x)\leqslant0$），且等号仅在有限多个点处成立. 那么 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少）.

【证】 在 I 内任取两点 x_1、x_2，不妨设 $x_1<x_2$. 在 $[x_1,x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理，得到

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\geqslant0\ (\text{或}\leqslant0)$$

其中 $\xi\in(x_1,x_2)$，即 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$（或 $f(x_2)\leqslant f(x_1)$），因此，$f(x)$ 在 I 上单调不减（或单调不增），从而对任一 $x\in[x_1,x_2]$，有

$$f(x_2)\geqslant f(x)\geqslant f(x_1)\ (\text{或} f(x_2)\leqslant f(x)\leqslant f(x_1)).$$

若 $f(x_1)=f(x_2)$，则有 $f(x)\equiv f(x_1), x\in[x_1,x_2]$，故 $f'(x)\equiv0, x\in[x_1,x_2]$，这与 $f'(x)=0$ 在 I 的任一有限子区间上仅在有限多个点处成立的假定相矛盾，因此 $f(x_2)>f(x_1)$（或 $f(x_2)<f(x_1)$），即 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少）.

9 判断下列曲线的凹凸性：

(1) $y=4x-x^2$; (2) $y=\operatorname{sh}x$;

(3) $y=x+\dfrac{1}{x}\ (x>0)$; (4) $y=x\arctan x$.

【解】 (1) $y'=4-2x$，$y''=-2<0$，故知曲线在 $(-\infty,+\infty)$ 内的图形是凸的.

(2)$y' = \text{ch}x, y'' = \text{sh}x$. 由 $\text{sh}x$ 的图形知,当 $x \in (0, +\infty)$ 时,$y'' > 0$. 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时,$y'' < 0$. 故 $y = \text{sh}x$ 的曲线图形在$(-\infty, 0]$ 是凸的,在$[0, +\infty)$ 内是凹的.

(3)$y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}, y'' = \dfrac{2}{x^3} > 0$,故曲线图形在$(0, +\infty)$ 是凹的.

(4)$y' = \arctan x + \dfrac{x}{1 + x^2}, y'' = \dfrac{2}{(1 + x^2)^2} > 0$. 故曲线图形在$(-\infty, +\infty)$ 是凹的.

10 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间:

(1)$y = x^3 - 5x^2 + 3x + 5$;　　(2)$y = xe^{-x}$;

(3)$y = (x + 1)^4 + e^x$;　　(4)$y = \ln(x^2 + 1)$;

(5)$y = e^{\arctan x}$;　　(6)$y = x^4(12\ln x - 7)$.

【解】 (1)$y'' = 6x - 10$,令 $y'' = 0$,可得 $x = \dfrac{5}{3}$.

当 $x < \dfrac{5}{3}$ 时,$y'' < 0$,故曲线在$\left(-\infty, \dfrac{5}{3}\right)$内是凸弧;

当 $x > \dfrac{5}{3}$ 时,$y'' > 0$,故曲线在$\left[\dfrac{5}{3}, +\infty\right)$内是凹弧.

因此$\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{20}{27}\right)$是曲线的唯一拐点.

(2)$y' = (1 - x)e^{-x}, y'' = e^{-x}(x - 2)$,令 $y'' = 0$,得 $x = 2$.

当 $x > 2$ 时,$y'' > 0$,即曲线在$[2, +\infty)$ 内是凹的;

当 $x < 2$ 时,$y'' < 0$,即曲线在$(-\infty, 2]$ 内是凸的.

因此,$(2, 2e^{-2})$ 为唯一的拐点.

(3)$y'' = e^x + 12(x + 1)^2 > 0$,函数的图形在$(-\infty, +\infty)$ 内是凹的,没有拐点.

(4)$y'' = \dfrac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$,令 $y'' = 0$,得 $x = -1$ 或 $x = 1$.

当 $-1 < x < 1$ 时,$y'' > 0$,即曲线在$[-1, 1]$ 内是凹的.

当 $x > 1$ 或 $x < -1$ 时,$y'' < 0$,即在$(-\infty, 1]$,$[1, +\infty)$ 内曲线是凸的.

因此,有两个拐点$(-1, \ln 2)$,$(1, \ln 2)$.

(5)$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}e^{\arctan x}, y'' = \dfrac{1 - 2x}{(1 + x^2)^2}e^{\arctan x}$,令 $y'' = 0$,得 $x = \dfrac{1}{2}$.

当 $x > \dfrac{1}{2}$ 时,$y'' < 0$ 即曲线在$\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$内是凸的;

当 $x < \dfrac{1}{2}$ 时,$y'' > 0$ 即曲线在$\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$内是凹的,

故有唯一的拐点$\left(\dfrac{1}{2}, e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$.

(6) 函数 y 的定义域为$(0, +\infty)$ 且在定义域里二阶可导.

$y' = 4x^3(12\ln x - 4)$. $y'' = 144x^2\ln x$,令 $y'' = 0$,在$(0, +\infty)$,得 $x = 1$.

当 $x > 1$ 时,$y'' > 0$,即曲线在$[1, +\infty)$ 内是凹的;

当 $0 < x < 1$ 时,$y'' < 0$,即曲线在$(0, 1]$ 内是凸的,

故有唯一拐点$(1, -7)$.

11 利用函数图形的凹凸性,证明下列不等式:

(1) $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1)$;

(2) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y)$;

(3) $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}$ ($x \neq y$ 且 $x > 0, y > 0$).

【证】 (1) 令 $f(x) = x^n \Rightarrow f''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$,则曲线 $y = f(x)$ 是凹的,因此 $\forall x, y \in \mathbf{R}^+$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$, 即 $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n < \frac{1}{2}(x^n + y^n)$.

(2) 令 $f(x) = e^x \Rightarrow f''(x) = e^x > 0$,则曲线 $y = f(x)$ 是凹的,$\forall x, y \in \mathbf{R}, x \neq y$,则 $f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$, 即 $e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}$.

(3) 令 $f(x) = x\ln x (x > 0) \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x} > 0 (x > 0)$,则曲线 $y = f(x)$ 是凹的. $\forall x, y \in \mathbf{R}^+$,且 $x \neq y$,有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

即 $$\frac{x+y}{2}\ln(x+y) < \frac{1}{2}(x\ln x + y\ln y), \quad (x+y)\ln(x+y) < x\ln x + y\ln y.$$

12 试证明曲线 $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

【证】 $y' = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$, $y'' = \frac{2(x+1)(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$.

令 $y'' = 0$,可得 $x = -1, x = 2+\sqrt{3}, x = 2-\sqrt{3}$.

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时,$y'' < 0$;当 $x \in (-1, 2-\sqrt{3})$ 时,$y'' > 0$;当 $x \in (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ 时,$y'' < 0$;当 $x \in (2+\sqrt{3}, +\infty)$ 时,$y'' > 0$.

因此,曲线有三个拐点$(-1,-1)$,$\left(2-\sqrt{3}, \frac{-1-\sqrt{3}}{4}\right)$,$\left(2+\sqrt{3}, \frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right)$.

因为 $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2-\sqrt{3} & \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \\ 1 & 2+\sqrt{3} & \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\sqrt{3} & \frac{3-\sqrt{3}}{4} \\ 1 & 3+\sqrt{3} & \frac{3+\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix} = 0,$$

因此三个拐点在一条直线上.

13 问 a、b 为何值时,点$(1,3)$是曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点?

【解】 $y'' = 6ax + 2b$,由题意$\begin{cases} a + b = 3, \\ 6a + 2b = 0, \end{cases}$ 解得 $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{9}{2}$.

14 试决定曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 中的 a、b、c、d,使得 $x = -2$ 处曲线有水平切线,

(1, -10) 为拐点,且点(-2,44)在曲线上.

【解】 $y' = 3ax^2 + 2bx + c, y'' = 6ax + 2b$. 根据题意有

$$y(-2) = 44,\quad y'(-2) = 0.\quad y(1) = -10,\quad y''(1) = 0.$$

即
$$\begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = 44, \\ 12a - 4b + c = 0, \\ a + b + c + d = -10, \\ 6a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -3, c = -24, d = 16.$$

15 试决定 $y = k(x^2 - 3)^2$ 中 k 的值,使曲线的拐点处的法线通过原点.

【解】 $y' = 4kx(x^2 - 3), y'' = 12k(x^2 - 1)$, 令 $y'' = 0$, 解得 $x = \pm 1$, 代入原曲线方程得 $y = 4k$, 只要 $k \neq 0$, 可验证 $(1, 4k), (-1, 4k)$ 是曲线的拐点.

$y'\big|_{x=\pm1} = \pm 8k$, 那么拐点处的法线斜率等于 $\mp \dfrac{1}{8k}$, 法线方程为 $y = \mp \dfrac{1}{8k}x$.

由于 $(1,4k), (-1,4k)$ 在此法线上,因此

$$4k = \pm \frac{1}{8k} \Rightarrow 32k^2 = 1,\quad 32k^2 = -1(\text{舍去}) \Rightarrow k = \pm \frac{1}{\sqrt{32}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

16 设 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数, 如果 $f''(x_0) = 0$, 而 $f'''(x_0) \neq 0$, 试问 $(x_0, f(x_0))$ 是否为拐点?为什么?

【解】 已知 $f'''(x_0) \neq 0$, 不妨设 $f'''(x_0) > 0$, 由于 $f'''(x)$ 在 $x = x_0$ 的某个邻域内连续,因此必存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时 $f'''(x) > 0$, 故在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内 $f''(x)$ 单调增加. 又已知 $f''(x_0) = 0$, 从而当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f''(x) < f''(x_0) = 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内的图形是凸的,当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f''(x) > f''(x_0) = 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内的图形是凹的,所以点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点.

习题 3-5 函数的极值与最大值最小值

1 求下列函数的极值:

(1) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$;　　(2) $y = x - \ln(1 + x)$;

(3) $y = -x^4 + 2x^2$;　　(4) $y = x + \sqrt{1 - x}$;

(5) $y = \dfrac{1 + 3x}{\sqrt{4 + 5x^2}}$;　　(6) $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$;

(7) $y = e^x \cos x$;　　(8) $y = x^{\frac{1}{x}}$;

(9) $y = 3 - 2(x + 1)^{\frac{1}{3}}$;　　(10) $y = x + \tan x$.

【解】 (1) $y' = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x - 3)(x + 1)$, 令 $y' = 0$, 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 3$. 又 $y'' = 12x - 12$, 而 $y''\big|_{x=-1} < 0, y''\big|_{x=3} > 0$, 因此 $x = -1$ 为极大值点,极大值为 $y(-1) = 17$; $x = 3$ 为极小值点,极小值为 $y(3) = -47$.

(2) $y' = 1 - \dfrac{1}{1 + x} = 0$, 得驻点 $x = 0$. 又 $y'' = \dfrac{1}{(1 + x)^2}$, $y''\big|_{x=0} > 0$.

故 $x=0$ 为极小值点,极小值 $y(0)=0$.

(3) $y'=-4x^3+4x=4x(1-x^2)$,令 $y'=0$,得驻点 $x_1=-1,x_2=0,x_3=1$.又

$y''=-12x^2+4$,而 $y''_{x=\pm1}<0$, $y''\big|_{x=0}>0$.因此有两个极大值点 $x_1=-1$ 及 $x_3=1$,对应的极大值都为 $y(\pm1)=1$.有一个极小值点 $x_2=0$,对应的极小值为 $y(0)=0$.

(4) $y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$,令 $y'=0$,得驻点 $x_1=\dfrac{3}{4}$,且在定义域 $(-\infty,1]$ 内有一不可导点 $x_2=1$.当 $x>\dfrac{3}{4}$ 时,$y'<0$;当 $x<\dfrac{3}{4}$ 时,$y'>0$,故 $x_1=\dfrac{3}{4}$ 为极大值点,极大值为 $y\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5}{4}$. $x_2=1$ 不是极值点,因为函数定义域为 $x\leqslant1$.

(5) $y'=\dfrac{12-5x}{\sqrt{(4+5x^2)^3}}$,令 $y'=0$,得驻点 $x=\dfrac{12}{5}$.当 $x>\dfrac{12}{5}$ 时,$y'<0$;当 $x<\dfrac{12}{5}$ 时,$y'>0$.故 $x=\dfrac{12}{5}$ 为极大值点,极大值为 $y\left(\dfrac{12}{5}\right)=\dfrac{1}{10}\sqrt{205}$.

(6) $y=3+\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$,$y'=\dfrac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$.令 $y'=0$,得驻点 $x_1=-2,x_2=0$.

$$y''=\frac{(-2x-2)(x^2+x+1)+2(2x+1)(x^2+2x)}{(x^2+x+1)^3},$$

又 $\qquad y''\big|_{x=-2}>0,\quad y''\big|_{x=0}<0.$

故 $x=0$ 为极大值点,极大值为 $y(0)=4$,$x=-2$ 为极小值点,极小值为 $y(-2)=\dfrac{8}{3}$.

(7) $y'=e^x(\cos x-\sin x)$,令 $y'=0$,得驻点 $x_k=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

$y''=-2e^x\sin x$, $y''\big|_{x=2k\pi+\frac{\pi}{4}}<0$, $y''\big|_{x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}}>0$,

故 $x_{2k}=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$ 为极大值点,其对应的极大值为 $y(x_{2k})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}$,且 $x_{2k+1}=(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{4}$ 为 y 的极小值点,对应的极小值为 $y(x_{2k+1})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}}$.

(8) $y'=x^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1}{x}\ln x\right)'=x^{\frac{1}{x}}\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,令 $y'=0$,得驻点 $x=e$.当 $x>e$ 时,$y'<0$;当 $x<e$ 时,$y'>0$.故 $x=e$ 为极大值点,其对应的极大值为 $y(e)=e^{\frac{1}{e}}$.

(9) $y'=-\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$,无驻点,$y$ 在 $x=-1$ 处不可导,但 y' 恒小于0,故 y 无极值.

(10) $y'=1+\sec^2x>0$,y 为严格单调函数,无极值点.

2 试证明:如果函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac<0$,则该函数没有极值.

【证】 $y'=3ax^2+2bx+c$,令 $y'=0$,得方程 $3ax^2+2bx+c=0$,由于 $\Delta=(2b)^2-4(3a)c=4(b^2-3ac)<0$,那么 $y'=0$ 无实数根,不满足必要条件,从而 y 无极值.

3 试问 a 为何值时,函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值?它是极大值还是极小值?并求此极值.

【解】 $f(x)$ 为可导函数,故在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值,必有 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=(a\cos x+\cos 3x)\Big|_{x=\pi/3}=0$,得 $a=2$. 又 $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=(-2\sin x-3\sin 3x)\Big|_{x=\pi/3}=-\sqrt{3}<0$,所以 $x=\frac{\pi}{3}$ 时 $f(x)$ 取极大值. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

4 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数,且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0$,证明:

(1) 当 n 为奇数时,$f(x)$ 在 x_0 处不取得极值;

(2) 当 n 为偶数时,$f(x)$ 在 x_0 处取得极值,且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时,$f(x_0)$ 为极大值,当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时,$f(x_0)$ 为极小值.

【证】 由含佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式及已知条件,得

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),$$

即 $f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$,由此式可知 $f(x)-f(x_0)$ 在 x_0 某邻域内的符号由 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 x_0 某邻域内的符号决定.

(1) 当 n 为奇数时,$(x-x_0)^n$ 在 x_0 两侧异号,所以 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 x_0 两侧异号,从而 $f(x)-f(x_0)$ 在 x_0 两侧异号,故 $f(x)$ 在 x_0 处不取得极值.

(2) 当 n 为偶数时,在 x_0 两则 $(x-x_0)^n>0$,若 $f^{(n)}(x_0)<0$,则 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n<0$,从而 $f(x)-f(x_0)<0$,即 $f(x)<f(x_0)$,故 $f(x_0)$ 为极大值;若 $f^{(n)}(x_0)>0$,则 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n>0$,从而 $f(x)-f(x_0)>0$,即 $f(x)>f(x_0)$,故 $f(x_0)$ 为极小值.

5 试利用习题 4 的结论,讨论函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ 的极值.

【解】 $f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x, f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x, f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x, f^{(4)}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$,故 $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0, f^{(4)}(0)=4>0$,因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有极小值,极小值为 4.

6 求下列函数的最大值、最小值:

(1) $y=2x^3-3x^2,\ -1\leqslant x\leqslant 4$; (2) $y=x^4-8x^2+2,\ -1\leqslant x\leqslant 3$;

(3) $y=x+\sqrt{1-x},\ -5\leqslant x\leqslant 1$.

【解】 (1) $y'=6x^2-6x=6x(x-1)$,在 $(-1,4)$ 上得驻点 $x=0, x=1$. 又 $y(0)=0, y(1)=-1, y(-1)=5, y(4)=80$. 故在 $-1\leqslant x\leqslant 4$ 上函数 $f(x)$ 的最大值为 80,最小值为 -5.

(2) 函数在 $(-1,3)$ 中仅有两个驻点 $x=0$ 及 $x=2$,而 $y(-1)=-5, y(0)=2, y(2)=-14, y(3)=11$. 故在 $[-1,3]$ 上,函数的最大值是 11,而函数的最小值是 -14.

(3) $y'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=0$,在 $(-5,1)$ 上得唯一驻点 $x=\frac{3}{4}$,又 $y\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}, y(1)=1$,

$y(-5)=\sqrt{6}-5$. 故函数 $f(x)$ 在 $[-5,1]$ 上的最大值为 $\frac{5}{4}$,最小值为 $\sqrt{6}-5$.

7 问函数 $y=2x^3-6x^2-18x-7(1\leqslant x\leqslant 4)$ 在何处取得最大值?并求出它的最大值.

【解】 $y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)=0$. 在 $(1,4)$ 内有唯一驻点 $x=3$,又 $y(3)=-61$, $y(1)=-29$, $y(4)=-47$. 故 y 在 $[1,4]$ 上的最大值为 $y(1)=-29$,最小值为 $y(3)=-61$.

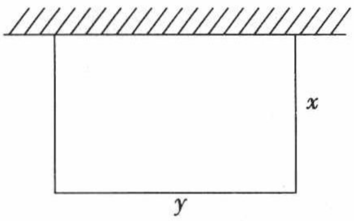
8 问函数 $y=x^2-\frac{54}{x}(x<0)$ 在何处取得最小值?

【解】 y 的定义域为 $(-\infty,0)$, $y'=\frac{2(x^3+27)}{x^2}$,令 $y'=0$,得唯一驻点 $x=-3$,但当 $x\in(-\infty,-3]$ 时, $y'<0$, y 单调递减;当 $x\in[-3,0)$ 时, $y'>0$, y 单调递增. 因此, $x=-3$ 为 y 的最小值点,最小值为 $y(-3)=27$. 又 $\lim\limits_{x\to-\infty}y=+\infty$, y 无最大值.

9 问函数 $y=\frac{x}{x^2+1}(x\geqslant 0)$ 在何处取得最大值?

【解】 y 的定义域为 $[0,+\infty)$, $y'=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$,令 $y'=0$ 得唯一驻点 $x=1$. 当 $x\in[0,1]$ 时, $y'>0$, y 为单调递增;当 $x\in[1,+\infty)$ 时, $y'<0$, y 单调递减. 故 $x=1$ 为 y 在 $[0,+\infty)$ 上极大值, $f(0)=0$,所以 $x=1$ 为 $[0,+\infty)$ 上的最大值点,最大值为 $y(1)=\frac{1}{2}$. 又 y 在 $[0,+\infty)$ 上 $y\geqslant 0$, $y(0)=0$,故 $x=0$ 为 y 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值点,最小值为 0.

10 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋,现有存砖只够砌20m长的墙壁. 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?



第 10 题图

【解】 如图所示,设这间小屋的宽为 x,长为 y,则小屋的面积为 $S=xy$.

已知 $2x+y=20$,即 $y=20-2x$,故

$S=x(20-2x)=20x-2x^2$, $x\in(0,10)$.

$S'=20-4x$, $S''=-4$. 令 $S'=0$,得驻点 $x=5$.

由 $S''<0$ 知 $x=5$ 为极大值点,又驻点唯一,故极大值点就是最大值点,即当宽为 5m,长为 10m 时这间小屋的面积最大.

11 要造一圆柱形油罐,体积为 V,问当底半径 r 和高 h 各等于多少时,才能使表面积最小?这时底直径与高的比为多少?

【解】 由已知条件 $V=\pi r^2h$ 知 $h=\frac{V}{\pi r^2}$,故油罐表面积

$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{2V}{r}.$$

在 $r>0$ 时, $S'=4\pi r-\frac{2V}{r^2}=0$ 仅有一解 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$,此时 $h=\frac{V}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

根据问题的实际情况可知, $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $h=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 正是使油罐表面积最小的底半径和高,且此

时底直径 $2r$ 与高 h 的比为 1∶1.

12 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(如图),截面的面积为 5m^2. 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小,从而使建造时所用的材料最省?

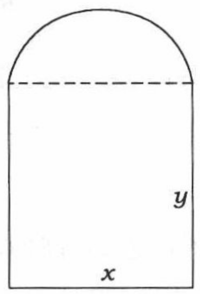
【解】 由题设知

$$xy + \frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 5, \Rightarrow \quad y = \frac{5 - \frac{1}{8}x^2\pi}{x} = \frac{5}{x} - \frac{1}{8}x\pi.$$

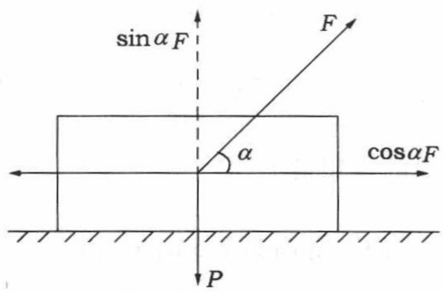
截面的周长

$$l(x) = x + 2y + \frac{1}{2}\pi\cdot x = x + \frac{10}{x} - \frac{1}{4}x\pi + \frac{1}{2}x\pi = x + \frac{10}{x} + \frac{1}{4}x\pi,$$

所以 $l'(x) = 1 + \frac{1}{4}\pi - \frac{10}{x^2}$,得唯一驻点 $x = \sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$. 又 $l(x)$ 的最小值一定存在,故 $x = \sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 为 $l(x)$ 的最小值点,即当 $x = \sqrt{\frac{40}{4+\pi}} \approx 2.366(\text{m})$ 时,建造时所用的材料最省.



第 12 题图



第 13 题图

13 设有质量为 5kg 的物体,置于水平面上,受力 F 的作用而开始移动(如图). 设摩擦系数 $\mu = 0.25$,问力 F 与水平线的交角 α 为多少时,才可使力 F 的大小为最小?

【解】 当水平方向的力 $\cos\alpha F$ 等于摩擦力时物体开始移动,即 $\cos\alpha F = (P - \sin\alpha F)\mu = (mg - \sin\alpha F)\mu$ 其中 m 为物体的重量,g 为重力加速度,也就是

$$F = \frac{mg\,\mu}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\left(0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}\right), \text{则} \quad F' = \frac{-(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

令 $F' = 0$,得唯一驻点 $\alpha = \arctan\mu$.

又由实际问题知存在最小的 F 使物体开始移动,故 $\alpha = \arctan\mu = \arctan 0.25 \approx 14°2'$ 时,可使力 F 最小.

14 有一杠杆,支点在它的一端,在距支点 0.1m 处挂一质量为 49kg 的物体,并加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平(如图). 如果杠杆的线密度为 5kg/m,求最省力的杆长?

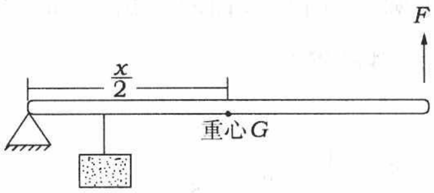
【解】 设所选杠杆长为 $x\text{m}(x \geqslant 0.1\text{m})$,$F$ 是垂直向上加于杠杆另一端使之保持水平平衡的力,由杠杆平衡原理,得

$$x\cdot F = 4.9\times 0.1 + 5x\cdot\frac{x}{2},$$

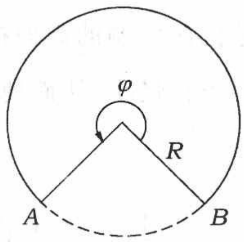
即 $\quad F = \frac{4.9}{x} + \frac{5}{2}x, \Rightarrow \quad F'(x) = \frac{5}{2} - \frac{4.9}{x^2}.$

令 $F'(x) = 0$,得唯一驻点 $x = 1.4(\text{m})$,故 $x = 1.4(\text{m})$ 能使 F 最小,也就是说最省力的杆

长为 1.4(m).



第 14 题图



第 15 题图

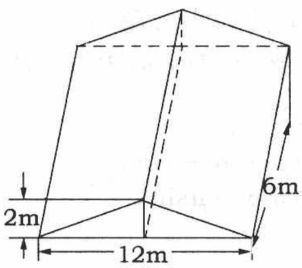
15 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一个漏斗,如图所示.问留下的扇形的中心角 φ 取多大时,做成的漏斗的容积最大?

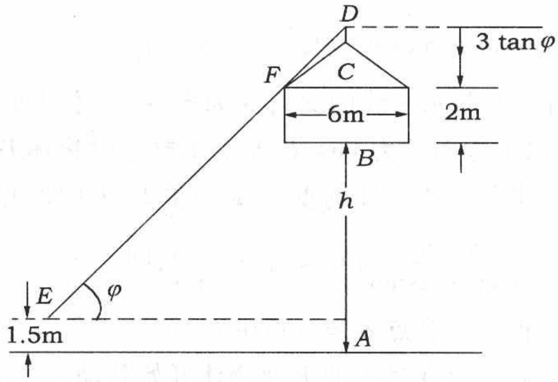
【解】 如图所示,把 OA 与 OB 粘在一起即成为一个漏斗,设所做成的漏斗口半径为 r,则漏斗的高度 $h=\sqrt{R^2-r^2}$.故漏斗的容积 V 为

$$V=\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}(0<r<R),\quad V'=\pi r\left(2\sqrt{R^2-r^2}-\frac{r^2}{\sqrt{R^2-r^2}}\right),$$

令 $V'=0$,得唯一驻点 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}R$.故当 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}R$ 时,V 最大.又 $\varphi R=2\pi r$,因此,当 $\varphi=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时,漏斗的容积最大.

16 某吊车的车身高为 1.5m,吊臂长 15m,现在要把一个 6m 宽、2m 高的屋架,水平地吊到 6m 高的柱子上去(如图),问能否吊得上去?





第 16 题图

【解】 如图所示,设吊臂对地面的倾角为 φ 时,屋架能够吊到的最大高度为 h,则

$$\sin\varphi=\frac{h-1.5+2+3\tan\varphi}{15},$$

即
$$h=15\sin\varphi-3\tan\varphi-0.5,\quad h'=15\cos\varphi-3\sec^2\varphi,$$

令 $h'=0$,得唯一驻点 $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.因此,当 $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{5}}=54°13'$ 时,屋架能够吊到的最大高度为 $h(\varphi)=7.506\text{m}$,而柱子高只有 6m,所以能吊得上去.

17 一房地产公司有 50 套公寓要出租.当月租金定为 4000 元时,公寓会全部租出去.当月租金每增加 200 元时,就会多一套公寓租不出去.而租出去的公寓平均每月需花费 400 元的维

修费．试问房租定为多少时可获得最大收入？

【解】 设每套月房租为 x 元，则租不出去的房子套数为 $\frac{x-4000}{200}=\frac{x}{200}-20$，租出去的套数为 $50-\left(\frac{x}{200}-20\right)=70-\frac{x}{200}$，租出的每套房子获利 $(x-400)$ 元．故总利润为

$$y=\left(70-\frac{x}{200}\right)(x-400)=-\frac{x^2}{200}+72x-28000$$

$$y'=-\frac{x}{100}+72,\quad y''=\frac{-1}{100}.$$

令 $y'=0$，得驻点 $x=7200$．由 $y''<0$ 知 $x=7200$ 为极大值点，又驻点惟一，这极大值点就是最大值点．即当每套月房租定在 7200 元时，可获得最大收入．

18 已知制作一个背包的成本为 40 元，如果每一个背包的售出价为 x 元，售出的背包数由

$$n=\frac{a}{x-40}+b(80-x)$$

给出，其中 a,b 为正常数．问什么样的售出价格能带来最大利润？

【解】 设利润函数为 $p(x)$，则

$$p(x)=(x-40)n=a+b(x-40)(80-x),\quad p'(x)=b(120-2x),$$

令 $p'(x)=0$，得 $x=60$(元)．

由 $p''(x)=-2b<0$ 知 $x=60$ 为极大值点，又驻点唯一，这极大值点就是最大值点，即售出价格定在 60 元时能带来最大利润．

习题 3－6 函数图形的描绘

1 描绘函数 $y=\frac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$ 的图形．

【解】 函数定义域：$(-\infty,+\infty)$，又

$$y'=\frac{4}{5}(x^3-3x^2+2)=\frac{4}{5}(x-1)^2(x+2),\quad y''=\frac{12}{5}(x^2-1)=\frac{12}{5}(x-1)(x+1),$$

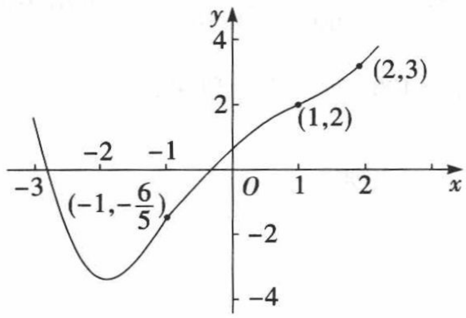
令 $y'=0$ 和 $y''=0$ 可得 $x=-2,-1$，和 1，这三个点将定义域划分为四个区间，列表如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	极小	↗	拐点	↖	拐点	↗

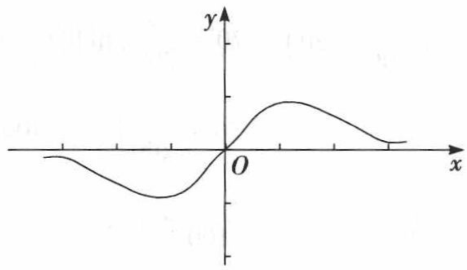
当 $x\to\pm\infty$ 时，$y\to+\infty$，$\frac{y}{x}\to\infty$，故曲线无渐近线．

$y(-2)=-\frac{17}{5}$ 为极小值；$\left(-1,-\frac{6}{5}\right)$，$(1,2)$ 为拐点．

曲线过点$\left(0,\frac{7}{5}\right)$,$(2,3)$,$\left(-2,-\frac{17}{5}\right)$,$\left(-1,-\frac{6}{5}\right)$等.图形如下所示.



第 1 题图



第 2 题图

2 描绘函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 的图形.

【解】 定义域:$(-\infty,+\infty)$,且为奇函数,又

$$y'=\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2},\quad y''=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

令 $y'=0$,可得 $x=\pm1$,令 $y''=0$,得 $x=0,\pm\sqrt{3}$.列表讨论如下:

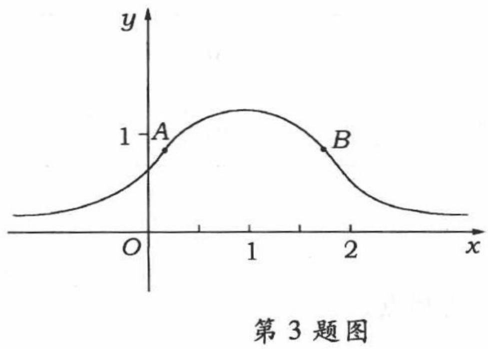
x	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'		+	0	−	−	−
y''		−	−	−	0	+
y		↗	极大	↘	拐点	↘

当 $x\to\infty$ 时,$y\to0$,故 $y=0$ 是一条水平渐近线.

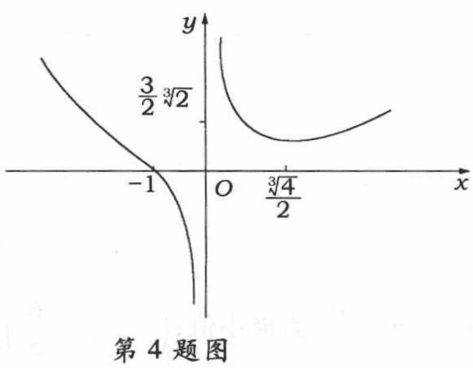
函数有极大值 $y(1)=2$ 和极小值 $y(-1)=-2$,有 3 个拐点,分别为$(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$,$(0,0)$,$(\sqrt{3},\sqrt{3})$,由于此函数为奇函数,作图如上所示.

3 描绘函数 $y=e^{-(x-1)^2}$ 的图形.

【解】 $y=e^{-(x-1)^2}$ 在$(-\infty,1]$内单调增加,在$[1,+\infty)$内单调减少;曲线在$\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,$\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$内是凹的,在$\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$上是凸的;极大值为 $y(1)=1$,拐点两个:$A\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$和 $B\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$;水平渐近线 $y=0$.如图.



第 3 题图



第 4 题图

4 描绘函数 $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$ 的图形.

【解】 $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$, $\left(0, \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right]$ 内单调减少,在 $\left[\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}, +\infty\right)$ 内单调增加;在 $(-\infty, -1]$, $(0, +\infty)$ 内是凹的,在 $[-1, 0)$ 内是凸的;极小值 $y\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right) = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$,拐点 $(-1, 0)$;有铅直渐近线 $x = 0$,如图.

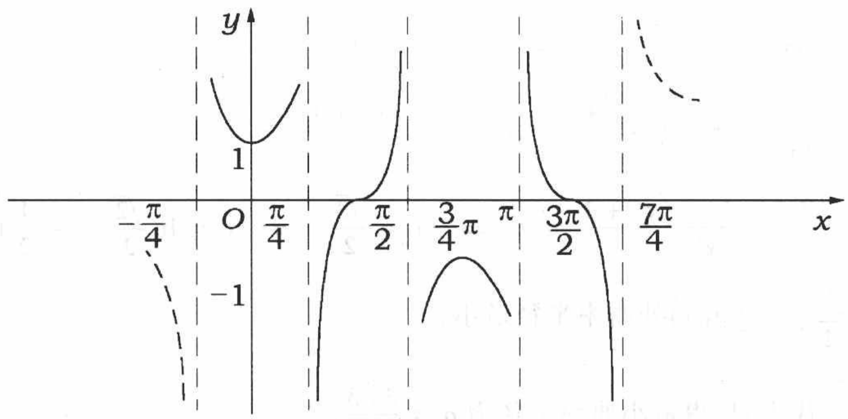
5 作出函数 $y = \dfrac{\cos x}{\cos 2x}$ 的图形.

【解】 所给函数是以 2π 为周期的周期函数,故可先在一个周期 $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$ 上讨论图像性态,然后延拓到整个平面. 利用导数可以知道该周期上性态如下:

x	$(-\frac{\pi}{4}, 0)$	0	$(0, \frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$	$(\frac{3}{4}\pi, \pi)$	π	$(\pi, \frac{5}{4}\pi)$	$(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$	$\frac{3\pi}{2}$	$(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4})$
y'	−	0	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−
y''	+	+	+	−	0	+	−	−	−	+	0	−
y	↘	极小	↗	↗	拐点	↗	↖	极大	↓	↘	拐点	↓

因 $x \to -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$ 时,都有 $y \to \infty$,故函数在这些点处有铅直渐近线 $x = -\dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{3\pi}{4}$, $x = \dfrac{5\pi}{4}$, $x = \dfrac{7\pi}{4}$.

极小值 $y(0) = 1$,极大值为 $y(\pi) = 1$;拐点坐标为 $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2}, 0\right)$. 如图.



第 5 题图

习题 3－7　曲　　率

1 求椭圆 $4x^2 + y^2 = 4$ 在点 $(0, 2)$ 处的曲率.

【解】 方程两边对 x 求导得

$$8x + 2yy' = 0. \qquad ①$$

将 $x = 0$, $y = 2$ 代入 ① 式得 $y' = 0$. 在 ① 式两边再对 x 求导得

$$8+2(y')^2+2yy''=0.\qquad ②$$

将 $x=0,y=2,y'=0$ 代入 ② 得 $y''=2$,则曲率

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=2.$$

2 求曲线 $y=\ln\sec x$ 在点 (x,y) 处的曲率及曲率半径.

【解】 $y'=\tan x,\quad y''=\sec^2 x,\quad k=\left|\dfrac{\sec^2 x}{(1+\tan^2 x)^{3/2}}\right|=|\cos x|,\quad \rho=\dfrac{1}{k}=|\sec x|.$

3 求抛物线 $y=x^2-4x+3$ 其顶点处的曲率及曲率半径.

【解】 $y=(x-2)^2-1$,故抛物线的顶点为 $(2,-1)$. 在 $x=2$ 时,$y'=0,y''=2$,设顶点处曲线的曲率为 k,曲率半径为 ρ,则

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=2,\quad \rho=\frac{1}{2}.$$

4 求曲线 $x=a\cos^3 t,y=a\sin^3 t$ 在 $t=t_0$ 处的曲率.

【解】 $y'_x=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t,\quad y''_x=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\dfrac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\dfrac{1}{3a\sin t\cos^4 t},$

$$k=\left|\frac{\dfrac{1}{3a\sin t\cos^4 t}}{[1+(-\tan t)^2]^{3/2}}\right|=\left|\frac{2}{3a\sin 2t}\right|.$$

在 $t=t_0$ 处的曲率为 $\quad k=\left|\dfrac{2}{3a\sin 2t_0}\right|.$

5 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小?求出该点处的曲率半径.

【解】 $y=\ln x(x>0)\quad\Rightarrow\quad y'=\dfrac{1}{x},$

$$y''=-\frac{1}{x^2}\quad\Rightarrow\quad \rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(x^2+1)^{3/2}}{x}.\qquad ①$$

令 $\quad\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{x^2+1}}{x^2}=0\quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad y=\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{1}{2}\ln 2.$

因此在点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$ 处曲率半径最小.

再将 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 代入 ① 得最小曲率半径为 $\rho=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}.$

6 证明曲线 $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ 在点 (x,y) 处的曲率半径为 $\dfrac{y^2}{a}$.

【证】 $y'=\operatorname{sh}\dfrac{x}{a},\quad y''=\dfrac{1}{a}\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$,因此曲率半径

$$\rho=\frac{1}{\dfrac{1}{a}\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}}\cdot\left(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}\right)^{3/2}=a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}=\frac{y^2}{a}.$$

7 一飞机沿抛物线路径 $y=\dfrac{x^2}{10000}$(y 轴铅直向上,单位为 m) 作俯冲飞行,在坐标原点 O

处飞机的速度为 $v=200\text{m/s}$,飞行员体重为 $G=70\text{kg}$,求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.

【解】 $y'\big|_{x=0}=0$, $y''\big|_{x=0}=\dfrac{1}{5000}$, $\rho=\left|\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|=5000$.

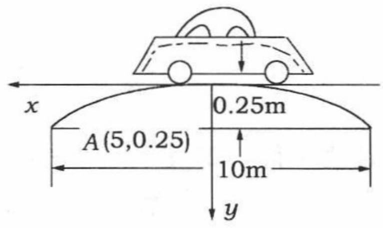
飞行员在飞机俯冲时受到的向心力

$$F=\frac{mv^2}{\rho}=\frac{70\cdot 200^2}{5000}=560(\text{牛顿}).$$

故座椅对飞行员的反力 $F=560+70\times 9.8=1246$(牛顿).

8 汽车连同载重共5t,在抛物线拱桥上行驶,速度为21.6km/h,桥的跨度为10m,拱的矢高(即拱桥的最高点对端点的相对高度)为0.25m(如图),求汽车越过桥顶时对桥的压力.

【解】 如图取直角坐标系,设抛物线方程为 $y=ax^2$,由于抛物线过点 A,由已知条件知 A 的坐标为(5,0.25),代入抛物线方程求得 $a=0.01$.



第 8 题图

$y'\big|_{x=0}=0$, $y''\big|_{x=0}=2a=0.02$,

$\rho\big|_{x=0}=\dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}\Big|_{x=0}=50$.

向心力 $F=\dfrac{mv^2}{\rho}=\dfrac{5000\times\left(\dfrac{21.6\times 10^3}{3600}\right)^2}{50}=3600$(牛顿).

5吨重汽车过桥顶时对桥的压力为 $5000\times 9.8-F=45400$(牛顿).

9 求曲线 $y=\ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆方程.

【解】 由 $\begin{cases}y=\ln x,\\ y=0,\end{cases}$ 得交点(1,0). $y'\big|_{x=1}=\dfrac{1}{x}\Big|_{x=1}=1$, $y''\big|_{x=1}=-\dfrac{1}{x^2}\Big|_{x=1}=-1$.

故曲率中心

$$\begin{cases}\alpha=\left[x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]\Big|_{x=1}=1-\dfrac{1\cdot(1+1^2)}{-1}=3,\\[2ex] \beta=\left(y+\dfrac{1+y'^2}{y''}\right)\Big|_{(1,0)}=0+\dfrac{1+1^2}{-1}=-2.\end{cases}$$

曲率半径 $\rho=\dfrac{[1+(y')^2]^{3/2}}{|y''|}\Big|_{x=1}=\sqrt{8}$.

所以曲率圆方程为 $(x-3)^2+(y+2)^2=8$.

10 求曲线 $y=\tan x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$ 处的曲率圆方程.

【解】 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{\cos^2 x}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=2$, $y''\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=2\sec^2 x\tan x\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=4$.

曲率中心

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2(1+2^2)}{4}=\dfrac{\pi-10}{4},\\[2ex] \beta=1+\dfrac{1+2^2}{4}=\dfrac{9}{4}.\end{cases}$$

曲率半径 $\rho = \left|\dfrac{(1+2^2)^{3/2}}{4}\right| = \dfrac{5}{4}\sqrt{5}$. 故所求曲率圆方程为

$$\left(x-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}.$$

11 求抛物线 $y^2 = 2px$ 的渐屈线方程.

【解】 因为曲率中心的轨迹是抛物线 $y^2 = 2px$ 的渐屈线方程.

由 $y^2 = 2px \Rightarrow 2yy' = 2p \Rightarrow y' = \dfrac{p}{y} \Rightarrow y'' = -\dfrac{p}{y^2}y' = -\dfrac{p^2}{y^3}$.

故所求渐屈线参数方程(y 为参数)为:

$$\begin{cases}\alpha = x-\dfrac{y'(1+y')^2}{y''}=\dfrac{y^2}{2p}-\dfrac{\dfrac{p}{y}\left[1+\left(\dfrac{p}{y}\right)^2\right]}{-p^2/y^3}=\dfrac{3y^2}{2p}+p,\\ \beta = y+\dfrac{1+y'^2}{y''}=-\dfrac{y^3}{p^2},\end{cases}$$

消去 y 得 $27p\beta^2 = 8(\alpha-p)^3$. 令 $\alpha = x,\beta = y$,即得渐屈线方程为

$$27py^2 = 8(x-p)^3.$$

习题 3-8 方程的近似解

1 试证明方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有唯一的实根,并用二分法求这个根的近似值,使误差不超过 0.01.

【解】 令 $f(x) = x^3-3x^2+6x-1$, $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 3 > 0$,由介值定理知 $f(x) = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一个实根. 但 $f'(x) = 3x^2-6x+6 = 3[(x-1)^2+1] > 0$, $f(x)$ 单调增加,因此证得方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根.

利用二分法求根的近似值的过程见下表:

次　数	隔离区间	左端点 f	区间中心 ξ	$f(\xi)$	精度 ε
1	(0,1)	-1	0.5	1.38	0.5
2	(0,0.5)	-1	0.25	+	0.25
3	(0,0.25)	-1	0.13	-	0.13
4	(0.13,0.25)	-	0.19	+	0.06
5	(0.13,0.19)	-	0.16	-	0.03
6	(0.16,0.19)	-	0.18	-	0.02
7	(0.18,0.19)	-	0.18	-	0.01

可知用 0.185 作为方程的近似解,其误差不超过 0.01.

2 试证明方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有唯一的实根,并用切线法求出根的近似值,使误差不超过 0.01.

【解】 令 $f(x)=x^5+5x+1$，它在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，无穷次可导，且 $f'(x)=5(x^4+1)>0$，$f(-1)=-5<0$，$f(0)=1>0$. 故知方程 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有唯一的实根. 且 $f''(x)<0$，故选 $x_0=-1$ 作初始值代入牛顿迭代式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^5+5x_k+1}{5(x_k^4+1)}\ (k=0,1,2,\cdots)$$

中可得：$x_1=-0.5$，$x_2=-0.21$，$x_3=-0.20$，$x_4=-0.20$.

而 $f(-0.2)<0$，$f(-0.19)>0$. 故方程的近似根为 $x=-0.195$，误差不超过 0.01.

3 求方程 $x^3+3x-1=0$ 的近似根，使误差不超过 0.01.

【解】 令 $f(x)=x^3+3x-1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，又 $f'(x)=3x^2+3>0$，因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有唯一实根.

$f(0)=-1<0$，$f(1)=1>0$，此实根在 $(0,1)$ 内用二分法.

x_i	0.5	0.25	0.375	0.3138	0.344	0.329	0.321	0.338	0.330	0.326
$f(x_i)$	+	−	+	−	+	+	−	+	+	+

取 $x=0.326$ 作方程的近似根即可.

4 求方程 $x\lg x=1$ 的近似根，使误差不超过 0.01.

【解】 令 $f(x)=x\lg x-1$，显然 $f(x)$ 的根在 $(1,4)$ 之间，采用二分法求根，$f(1)=-1<0$，$f(4)>0$.

x_i	2	3	2.5	2.6	2.55	2.51	
$f(x_i)$	−	+	−	+	+	+	

因此，取 $x=2.505$ 作为方程近似根.

总习题三

1 设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为________.

【解】 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-x}{xe}$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=e$.

当 $0<x<e$ 时 $f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $(0,e]$ 内单调增加；

当 $e<x<+\infty$ 时 $f'(x)<0$，故函数 $f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 内单调减少.

从而 $x=e$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点. 由于驻点唯一，极大值也是最大值且最大值 $f(e)=k>0$，又 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，故曲线 $y=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 与 x 轴有两个交点，因此函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点的个数为 2.

2 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 几个数的大小顺序为( ).

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

【解】 由拉格朗日中值定理知 $f(1)-f(0)=f'(\xi)$，其中 $\xi\in(0,1)$. 由于 $f''(x)>0$，$f'(x)$ 单调增加，故 $f'(0)<f'(\xi)<f'(1)$. 即 $f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$. 应选(B).

3 列举一个函数 $f(x)$ 满足：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内除某一点外处处可导，但在 (a,b) 内不存在点 ξ，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

【解】 取 $f(x)=|x|$，区间为 $[-1,1]$. 函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，在 $(-1,1)$ 内除点 $x=0$ 外处处可导，但 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不存在点 ξ，使 $f'(\xi)=0$，即不存在 $\xi\in(-1,1)$，使

$$f(1)-f(-1)=f'(\xi)[1-(-1)].$$

4 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$.

【解】 由于 $f'(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[x,x+a]$ 或 $[x+a,x]$ 上连续，且可导，由拉格朗日中值定理，得 $f(x+a)-f(x)=f'(\xi)(x+a-x)=af'(\xi)$，其中 ξ 位于 x 与 $x+a$ 之间. 又 $x\to\infty$ 且 a 为常数，则 $\xi\to\infty$. 从而

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=\lim_{x\to\infty}af'(\xi)=a\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)=ak.$$

5 证明多项式 $f(x)=x^3-3x+a$ 在 $[0,1]$ 上不可能有两个零点.

【证】 用反证法. 假设 $f(x)=x^3-3x+a$ 在 $[0,1]$ 上有两个零点 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$，即 $f(x_1)=f(x_2)=0$，$x_1,x_2\in[0,1]$. 显然 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，可导，且 $f'(x)=3(x^2-1)$. 由罗尔定理知，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使 $f'(\xi)=0$，即 $3(\xi^2-1)=0\Rightarrow\xi=\pm1$，这与 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$ 矛盾.

6 设 $a_0+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}a_2+\cdots+\frac{1}{n+1}a_n=0$，$n$ 为自然数，证明多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

【证】 考虑函数

$$F(x)=a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\frac{1}{3}a_2x^3+\cdots+\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1},$$

则由假设有 $F(0)=F(1)=0$，从而由罗尔定理，有 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f(\xi)=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\cdots+a_n\xi^n=0.$$

因此，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

7 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(a)=0$，证明存在一点 $\xi\in(0,a)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

【证】 作辅助函数 $\varphi(x)=xf(x)$. 由条件知，$\varphi(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $\varphi(0)=\varphi(a)=af(a)=0$. 应用罗尔定理得 $\varphi'(\xi)=0$，其中 $\xi\in(0,a)$. 又 $\varphi'(x)=f(x)+xf'(x)$，故 $\varphi'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

8 设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，试利用柯西中值定理，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

【证】 取 $F(x)=\ln x$，$f(x)$、$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F'(x)=\frac{1}{x}\neq0$，

$x \in (a,b)$. 由柯西中值定理知至少存在一点 $\xi \in (a,b)$,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},\quad 即\quad \frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\dfrac{1}{\xi}},$$

亦即 $$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

9 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是可导函数,且 $|f'(x)|<g'(x)$,证明:当 $x>a$ 时,$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

【证】 由 $|f'(x)|<g'(x)$,知 $g'(x)\neq 0$,且 $g'(x)>0$,故 $g(x)$ 为单增函数,即当 $x>a$ 时,$g(x)>g(a)$,从而 $g(x)-g(a)>0$.

又 $f(x)$, $g(x)$ 都是可导函数,$g'(x)\neq 0$,由柯西中值定理,得

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\ (a<\xi<x).$$

即 $$f(x)-f(a)=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(g(x)-g(a)).$$

于是 $$|f(x)-f(a)|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right||g(x)-g(a)|=\frac{|f'(\xi)|}{g'(\xi)}[g(x)-g(a)].$$

由于 $|f'(\xi)|<g'(\xi)$,故 $|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

10 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)/n\right]^{nx}$(其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$).

【解】 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^x(1+\ln x)}{-1+\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x\ln x+x^x-1}{x-1}\cdot x$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^x(\ln+1)\ln x+x^{x-1}+x^x(\ln x+1)}{1}=2.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2(1+x)}=\dfrac{1}{2}$.

(3) 原式 $=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}+\ln\arctan x}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}$

$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$.

(4) 原式 $=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}nx[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]}=\mathrm{e}^{n\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n}{\frac{1}{x}}}$

$=\mathrm{e}^{n\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}(a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n)(\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'}}$

$=\mathrm{e}^{n\cdot\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)}=\mathrm{e}^{\ln(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n)}=a_1a_2\cdots a_n$.

11 求下列函数在指定的 x_0 处具有指定阶数及余项的泰勒公式:

(1) $f(x) = x^3\ln x, x_0 = 1, n = 4$,拉格朗日余项;

(2) $f(x) = \arctan x, x_0 = 0, n = 3$,佩亚诺余项;

(3) $f(x) = e^{\sin x}, x_0 = 0, n = 3$,佩亚诺余项;

(4) $f(x) = \ln\cos x, x_0 = 0, n = 6$,佩亚诺余项.

【解】 (1) $f(1) = 0, f'(x) = 3x^2\ln x + x^2, f'(1) = 1$;

$$f''(x) = 6x\ln x + 5x, f''(1) = 5; f'''(x) = 6\ln x + 11, f'''(1) = 11;$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{6}{x}, f^{(4)}(1) = 6;$$

$$f^{(5)}(x) = -\frac{6}{x^2}, f^{(5)}(\xi) = -\frac{6}{\xi^2},$$

因此,

$$x^3\ln x = (x-1) + \frac{5}{2!}(x-1)^2 + \frac{11}{3!}(x-1)^3 + \frac{6}{4!}(x-1)^4 - \frac{6}{5!\xi^2}(x-1)^5,$$

其中 ξ 介于 1 和 x 之间.

(2) $f(0) = 0, f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, f'(0) = 1; f''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}, f''(0) = 0; f'''(x) = -\dfrac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}, f'''(0) = -2$;

因此,

$$\arctan x = x - \frac{x^2}{3} + o(x^4).$$

注:也可用下列方法求 $y = \arctan x$ 在 $x = 0$ 处的导数.

对 $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$,即 $(1+x^2)y' = 1$,求 n 阶导数:

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0,$$

令 $x = 0$ 得

$$y^{(n+1)}(0) = -n(n-1)y^{(n-1)}(0),$$

且 $y''(0) = 0, y'(0) = 1$ 得

$$y^{(2m)}(0) = 0,$$

$$y^{(2m+1)}(0) = -2m(2m-1)y^{(2m-1)}(0) = (-1)(2m)!.$$

(3) $e^{\sin x} = 1 + \sin x + \dfrac{1}{2!}\sin^2 x + \dfrac{1}{3!}\sin^3 x + o(x^3)$,又,$\sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$,故

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

(4) $\ln\cos x = \ln[1 + (\cos x - 1)] = \cos x - 1 - \dfrac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + \dfrac{1}{3}(\cos x - 1)^3 + o(x^6)$,又,

$\cos x - 1 = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4 - \dfrac{1}{720}x^6 + o(x^7)$,因此,

$$\begin{aligned}\ln\cos x &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6\right) + o(x^6)\\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6).\end{aligned}$$

12 证明下列不等式：

(1) 当 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$.　(2) 当 $x > 0$ 时，$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$;

(3) 当 $e < a < b < e^2$ 时，$\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

【证】 (1) 只要证 $\frac{\tan x_2}{x_2} > \frac{\tan x_1}{x_1}$. 设 $f(x) = \frac{\tan x}{x}$，则 $f'(x) = \frac{x - \frac{1}{2}\sin 2x}{x^2\cos^2 x}$.

令 $g(x) = x - \frac{1}{2}\sin 2x$，则 $g'(x) = 1 - \cos 2x \geqslant 0$，即 $g(x)$ 单增. 当 $x > 0$ 时，$g(x) > g(0) = 0$. 从而 $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2\cos^2 x} > 0$，故 $f(x)$ 也是单增函数.

由定义，当 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时，$f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow \frac{\tan x_2}{x_2} > \frac{\tan x_1}{x_1} \Rightarrow \frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$.

(2) 把原不等式变形为 $(1+x)\ln(1+x) > \arctan x$.

设 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$，则

$$f'(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x^2} > 0 \ (x > 0).$$

$f(x)$ 为 $x > 0$ 时的严格单调递增函数，从而 $f(x) > f(0) = 0$，即当 $x > 0$ 时，

$$(1+x)\ln(1+x) > \arctan x, \text{即} \quad \ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}.$$

(3) 设 $f(x) = \ln^2 x\,(e < a < x < b < e^2)$. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使

$$\ln^2 b - \ln^2 a = \frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a).$$

设 $\varphi(t) = \frac{\ln t}{t}$，则 $\quad \varphi'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$.

当 $t > e$ 时，$\varphi'(t) < 0$，所以 $\varphi(t)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调减少，而 $e < a < \xi < b < e^2$，从而 $\varphi(\xi) > \varphi(e^2)$，即

$$\frac{\ln\xi}{\xi} > \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2},$$

因此，$\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

13 设 $a > 1$，$f(x) = a^x - ax$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $x(a)$. 问 a 为何值时，$x(a)$ 最小？并求出最小值.

【解】 由 $f'(x) = a^x\ln a - a = 0$，得唯一驻点 $x(a) = 1 - \frac{\ln\ln a}{\ln a}$.

考察函数 $x(a) = 1 - \frac{\ln\ln a}{\ln a}$ 在 $a > 1$ 时的最小值. 令

$$x'(a) = -\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\ln\ln a}{(\ln a)^2} = \frac{1-\ln\ln a}{a(\ln a)^2} = 0,$$

得唯一驻点 $a = e^e$，当 $a > e^e$ 时，$x'(a) > 0$；当 $a < e^e$ 时，$x'(a) < 0$，因此 $x(e^e) = 1 - \frac{1}{e}$ 为极小值，也是最小值.

14 求椭圆 $x^2 - xy + y^2 = 3$ 上纵坐标最大和最小的点.

【解】 $2x - y - xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$. 令 $y' = 0$，解得 $y = 2x$，代入原方程，解得 $x = \pm 1, y = \pm 2$. 由于

$$y'' = \frac{(2 - y')/(x - 2y) - (1 - 2y')(2x - y)}{(x - 2y)^2}, y''\Bigg|_{\substack{x=1\\y=2\\y'=0}} < 0,\quad y''\Bigg|_{\substack{x=-1\\x=-2\\y'=0}} > 0,$$

所以纵坐标最大的点为 $(1,2)$，纵坐标最小的点为 $(-1, -2)$.

15 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

【解】 令 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}\ (x \geqslant 1) \Rightarrow f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x) \Rightarrow$ 驻点 $x = e$.

当 $x \in (1,e)$ 时，$f'(x) > 0$. 函数单调增加，当 $x \in (e, +\infty)$ 时，$f'(x) < 0$，函数单调减少 $\Rightarrow f(1) < f(2) < f(e) > f(3) > f(4) > \cdots$，而 $f(2) = \sqrt{2} < f(3) = \sqrt[3]{3}$，因此数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 最大项为 $\sqrt[3]{3}$.

16 曲线弧 $y = \sin x\ (0 < x < \pi)$ 上哪一点处的曲率半径最小?求出该点处曲率半径.

【解】 $y' = \cos x,\quad y'' = -\sin x \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}{\sin x}$,

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{\sin x}{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}. \qquad ①$$

显然 ρ 最小就是 k 最大. 又 $k' = \frac{2\cos x(1 + \sin^2 x)}{(1 + \cos^2 x)^{5/2}}$，令 $k' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}$（唯一驻点）.

在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内，$k' > 0$，在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内，$k' < 0$，所以 $x = \frac{\pi}{2}$ 为 k 的极大值点，从而也是最大值点.
同时最小曲率半径

$$\rho = \frac{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}{\sin x}\Bigg|_{x=\pi/2} = 1.$$

17 证明方程 $x^3 - 5x - 2 = 0$ 只有一个正根，并求此正根的近似值，使精确到 10^{-3}.

【证】 令 $f(x) = x^3 - 5x - 2$，$f'(x) = 3\left(x - \frac{\sqrt{15}}{3}\right)\left(x + \frac{\sqrt{15}}{3}\right)$. 当 $x > \frac{\sqrt{15}}{3}(\approx 1.3)$ 时，$f'(x) > 0$，从而 $f(x)$ 在 $(1.3, +\infty)$ 内如果有根，至少只有一个实根.

不难验证 $x \in (0,2)$ 都有 $f(x) < 0$，即无实根.

$f(2) = -4 < 0$，$f(3) = 10 > 0$. 因而唯一实根在 $(2,3)$ 之内，采用类似于二分法的十分法，计算如下表：

x_i	2.5	2.2	2.4	2.45	2.42	2.41	2.415	2.414	
$f(x_i)$	+	−	−	+	+	−	+	−	

取 $x = 2.4145$ 作为此正根的近似值，误差不超过 0.001.

18 设 $f''(x_0)$ 存在,证明 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$.

【证】 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f''(x_0)+f''(x_0)]=f''(x_0).$$

19 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导,且 $f''(x)\geqslant 0$,证明对于 (a,b) 内任意两点 x_1,x_2 及 $0\leqslant t\leqslant 1$,有 $f[(1-t)x_1+tx_2]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$.

【证】 记 $x_0=(1-t)x_1+tx_2$,将 $f(x)$ 在 x_0 处展开成一阶泰勒公式得

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$,其中 ξ 在 x 与 x_0 之间.

由于 $f''(x)\geqslant 0$,即 $f''(\xi)\geqslant 0$,从而有 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

取 $x=x_1$ 及 $x=x_2$,分别得

$$f(x_1)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0), \tag{①}$$

$$f(x_2)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0), \tag{②}$$

①$\times(1-t)+$②$\times t$,得 $(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)[(1-t)x_1+tx_2-x_0]=f(x_0)$,

故 $f[(1-t)x_1+tx_2]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$.

20 试确定常数 a 和 b,使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的5阶无穷小.

【解】 利用泰勒公式

$$\begin{aligned}f(x)&=x-a\sin x-\frac{b}{2}\sin 2x\\&=x-a\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right]-\frac{b}{2}\left[2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^5)\right]\\&=(1-a-b)x+\left(\frac{a}{6}+\frac{2b}{3}\right)x^3-\left(\frac{a}{120}+\frac{2b}{15}\right)x^5+o(x^5),\end{aligned}$$

按题意,应有 $\begin{cases}1-a-b=0,\\ \dfrac{a}{b}+\dfrac{2b}{3}=0,\\ \dfrac{a}{120}+\dfrac{2b}{15}\neq 0,\end{cases}$ 得 $a=\dfrac{4}{3},b=-\dfrac{1}{3}$.

因此,当 $a=\dfrac{4}{3},b=-\dfrac{1}{3}$ 时,$f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 是 $x\to 0$ 时关于 x 的5阶无穷小.

考研试题选解

1 已知当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小,则

(A) $k=1,c=4$.　　　　(B) $k=1,c=-4$.

(C) $k=3, c=4$.　　　　　　　　　　(D) $k=3, c=-4$.

【分析一】 用洛必达法则. 由

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3(\cos x-\cos 3x)}{ckx^{k-1}}=3\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+3\sin 3x}{ck(k-1)x^{k-2}}$$

$$\xlongequal{k=3}-\lim_{x\to 0}\frac{3}{6c}\frac{\sin x}{x}+9\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{6cx}=-\frac{1}{2c}+\frac{9}{2c}=1$$

$\Rightarrow$ $k=3, c=4$. 选(C).

【分析二】 用泰勒公式. 由

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3),\quad \sin 3x=3x-\frac{1}{6}(3x)^3+o(x^3)$$

$\Rightarrow f(x)=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{2}\right)x^3+o(x^3)\sim 4x^3$.

因此, $k=3, c=4$. 选(C).

2 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为

(A) 0.　　　　(B) 6.　　　　(C) 36.　　　　(D) ∞.

【分析一】 恒等变形后用洛必达法则. 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right],$$

而
$$\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}=36,$$

因此
$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=36.$$

【分析二】 用带皮亚诺余项泰勒公式. 题设相当于 $\sin 6x+xf(x)=o(x^3)$, 将

$$\sin 6x=6x-\frac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)$$

代入, 得 $6x-36x^3+xf(x)=o(x^3)$, 从而得

$$6+f(x)=36x^2+o(x^2),\quad \frac{6+f(x)}{x^2}=36+o(1),$$

于是
$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36.$$ 故应选(C).

【评注】 解此题最易犯的错误, 是不考虑 $f(x)$ 是否满足必要的条件而使用洛必达法则, 结果花费了不少时间还未必得到正确的结论. 其次不少考生选(A), 是认为

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{x}+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}.$$

在这里, 用 6 替换 $\dfrac{\sin 6x}{x}$ 是错误的!

3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$ ________.

【分析一】 原式 $\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1+x^2)\cos x}{3x^2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x^2}$

$$\xlongequal{\text{分解}} \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}-\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}.$$

【分析二】 先求出 $\arctan x-\sin x$ 在 $x=0$ 处的 3 阶泰勒公式.

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+o(x^2)\quad(x\to0),$$

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3),\quad \sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$

则
$$\arctan x-\sin x=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)=-\frac{1}{6}x^3+o(x^3).$$

于是原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}=-\dfrac{1}{6}.$

4 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【解法一】 $x\to0$ 时 $x\sim\sin x$,用等价无穷小因子替换得

$$I=\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{\sin^4x}.$$

作变量替换 $t=\sin x$ 后再用洛必达法则得

$$I=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{6}.$$

【解法二】 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x[1-\cos(\sin x)]}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)\cdot\cos x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

【解法三】 由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$,且

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3x+o(x^3),$$

所以原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\left[\sin x-\dfrac{1}{6}\sin^3x+o(x^3)\right]}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{6}\sin^3x+o(x^3)}{x^3}=\dfrac{1}{6}.$

【评注】 有的考生这样做:

$$\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin^2x}{x^4}-\frac{\sin(\sin x)\sin x}{x^4}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

这说明有的考生对最基本的极限运算法则和性质掌握不够.

还有的考生这样做:

$$\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\cdots=\frac{1}{6}.$$

这里用 $x-\sin x$ 代替 $\sin x-\sin(\sin x)$ 结论是正确的,但要计算出

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{[1-\cos(\sin x)]\cos x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2x}{\frac{1}{2}x^2}=1 \text{ 才行；}$$

如果因为当 $x\to0$ 时 $\sin x\sim x$，$\sin(\sin x)\sim\sin x$，就说 $\sin x-\sin(\sin x)\sim x-\sin x$ 则是错误的．

5 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0)\neq0$，$f'(0)\neq0$，$f''(0)\neq0$．证明：存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得当 $h\to0$ 时，$\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小．

【证法一】 用带皮亚诺余项泰勒公式．由

$$\begin{aligned}&\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)\\&=\lambda_1\left[f(0)+hf'(0)+h^2\frac{f''(0)}{2!}+o(h^2)\right]+\lambda_2\left[f(0)+2hf'(0)+4h^2\frac{f''(0)}{2!}+o(h^2)\right]\\&\quad+\lambda_3\left[f(0)+3hf'(0)+9h^2\frac{f''(0)}{2!}+o(h^2)\right]-f(0)\\&=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)f(0)+(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)\cdot f'(0)h+(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)\frac{f''(0)}{2!}h^2+o(h^2)\\&=o(h^2),\end{aligned}$$

得 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 必满足 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\\\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0,\\\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0,\end{cases}$ 因系数行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2\neq0$，于是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 可以唯一地确定．

【证法二】 用洛必达法则．由 $I=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)}{h^2}=0$

$$\Rightarrow\quad\lim_{h\to0}[\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)]=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)f(0)=0,$$

而 $f(0)\neq0$，应有 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$．

由洛必达法则，有 $I=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\lambda_1f'(h)+2\lambda_2f'(2h)+3\lambda_3f'(3h)}{2h}$，

又 $\lim\limits_{h\to0}[\lambda_1f'(h)+2\lambda_2f'(2h)+3\lambda_3f'(3h)]=(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)f'(0)$，

而 $f'(0)\neq0$，应有 $\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0$．

再用洛必达法则 $I=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\lambda_1f''(h)+4\lambda_2f''(2h)+9\lambda_3f''(3h)}{2}$，

又 $\lim\limits_{h\to0}[\lambda_1f''(h)+4\lambda_2f''(2h)+9\lambda_3f''(3h)]=(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0)$，

而 $f''(0)\neq0$，应有 $\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0$．

以下同【证法一】．

【评注】 用带皮亚诺余项泰勒公式，条件“$f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数”可以减弱成“$f(x)$ 在 $x=0$ 处有二阶导数”．

6 试确定常数 A,B,C 的值，使得

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to0$ 时比 x^3 高阶的无穷小．

【分析与求解一】 用泰勒公式.因为

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3),$$

将其代入题设等式,整理得

$$1 + (B+1)x + \left(\frac{1}{2} + B + C\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}B + C\right)x^3 + o(x^3) = 1 + Ax + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} B + 1 = A, \\ \frac{1}{2} + B + C = 0, \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}B + C = 0. \end{cases} \qquad 解得 A = \frac{1}{3}, B = -\frac{2}{3}, C = \frac{1}{6}.$$

【分析与求解二】 用洛必达法则.由

$$e^x(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3), \quad (x \to 0)$$

$$\Rightarrow \quad J \xlongequal{记} \lim_{x\to 0} \frac{(1 + Bx + Cx^2) - e^{-x}(1 + Ax)}{x^3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{B + 2Cx + e^{-x}[(1 - A) + Ax]}{3x^2} \quad (要求分子极限为0,即 1 + B - A = 0,否则 J = \infty)$$

$$\Rightarrow \quad J = \lim_{x\to 0} \frac{2C + e^{-x}(2A - 1 - Ax)}{6x} \quad (要求分子极限为0,即 2A + 2C - 1 = 0,否则 J = \infty)$$

$$\Rightarrow \quad J = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}(1 - 3A + Ax)}{6} = \frac{1 - 3A}{6} = 0,即 1 - 3A = 0.$$

$$解 \begin{cases} 1 + B - A = 0, \\ 2A + 2C - 1 = 0, \\ 1 - 3A = 0, \end{cases} \qquad 得 A = \frac{1}{3}, B = -\frac{2}{3}, C = \frac{1}{6}.$$

7 当 $x \to 0$ 时,$f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小,则

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$. (B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$.

(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$. (D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$.

【分析一】 由 $\ln(1 - bx) \sim -bx\,(x \to 0)$ 得

$$J \xlongequal{记} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin ax}{-bx^3} \xlongequal[洛必达法则]{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0} \frac{1 - a\cos ax}{-3bx^2}$$

$\Rightarrow a = 1$(否则 $J = \infty$)$\Rightarrow$

$$J = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{-3bx^2} = -\frac{1}{6b} = 1 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{6}.$$

因此选(A).

【分析二】 由泰勒公式

$$\sin ax = ax - \frac{1}{6}a^3x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

$$\Rightarrow \quad J \xlongequal{\text{记}} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x+\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)}{-bx^3} = 1$$

$\Rightarrow \quad a = 1,\ -\frac{1}{6b} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1, b = -\frac{1}{6}$. 因此选(A).

8 函数$f(x) = \frac{x-x^3}{\sin\pi x}$的可去间断点的个数为

(A)1.　　　　(B)2.　　　　(C)3.　　　　(D) 无穷多个.

【分析】 设$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$,由定义可知函数$f(x) = \frac{x-x^3}{\sin\pi x}$在每个区间$(n,n+1)$内连续. 又计算可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x^3}{\sin\pi x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\pi x}\lim_{x\to 0}(1-x^2) = \frac{1}{\pi},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x} = \lim_{x\to 1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x} = \frac{2}{\pi},\quad \lim_{x\to -1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x} = \lim_{x\to -1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos\pi x} = \frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{x\to n}\frac{x-x^3}{\sin\pi x} = \infty \ (n = \pm 2, \pm 3, \cdots),$$

故函数$f(x) = \frac{x-x^3}{\sin\pi x}$恰有三个可去间断点,应选(C).

【评注】 此题有相当多的考生选择(D),认为使$\sin\pi x = 0$成立的点有无穷多个;同时审题不细,没有利用函数$f(x)$的极限值以确定可去间断点的个数,故错误率较高.

9 求极限$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

【解】 这是求1^∞型的极限.

方法1°

$$J \xlongequal{\text{记}} \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}} = \lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)\frac{1}{e^x-1}}$$

$$= e^A,$$

其中

$$A = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\frac{1}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)} = -\frac{1}{2},$$

因此,$J = e^{-\frac{1}{2}}$.

方法2° 求$J = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{e^x-1}\ln\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}$转化为求

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x-1}\ln\left[\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)+1\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right] \xlongequal[\text{(同前)}]{} -\frac{1}{2},$$

其中用到了等价无穷小因子替换:$\ln(1+t) \sim t(t\to 0)$.

10 求极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

【解法一】 利用当$x\to 0$时的等价无穷小关系$\ln(1+x) \sim x$与洛必达法则可得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x\sqrt{1+2\sin x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+2\sin x}}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(-\sin x-\frac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}\right)=-\frac{1}{2}.$$

【解法二】 在得到等式

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$$

之后计算过程可以与【解法一】中有所不同,例如可如下进行:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+2\sin x-(x+1)^2}{x^2(\sqrt{1+2\sin x}+x+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-x^2-2x}{x^2}=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{2x}=-\frac{1}{2}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2}=-\frac{1}{2}.$$

11 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

【解法一】 利用洛必达法则可得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}}{1}=1$,于是又有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1-e^{-x}}=1$.

从而 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x(1+x)-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x(1-e^{-x})}+\lim_{x\to0}\frac{x-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{1-e^{-x}}+\lim_{x\to0}\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\lim_{x\to0}\frac{x}{1-e^{-x}}$$

$$=1+\lim_{x\to0}\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}=1+\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x}}{2x}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

【解法二】 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left[\frac{e^x(1+x)}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+x-1)e^x+1}{x(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+x-1)e^x+1}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2+x-1+2x+1}{x}e^x$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}(x+3)=\frac{3}{2}.$$

【评注】 在分母中应用了当 $x\to0$ 时的等价无穷小因子代换,即 $e^x-1\sim x$.

12 设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}$,$x>0,y>0$,求

(Ⅰ) $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$; (Ⅱ) $\lim\limits_{x\to0+}g(x)$.

【解】 (Ⅰ) 因为求极限 $\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$ 时 x 是固定的正数,从而

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{1+xy}=\frac{1}{x},\quad \lim_{y\to+\infty}y\sin\frac{\pi x}{y}=\pi x\lim_{y\to+\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\dfrac{\pi x}{y}}=\pi x$$

($\forall x > 0$)成立,故

$$g(x) = \lim_{y \to +\infty} f(x,y) = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{1 + xy} - \frac{1}{\arctan x} \lim_{y \to +\infty} \left(1 - y\sin\frac{\pi x}{y}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1 - \pi x}{\arctan x}.$$

(Ⅱ) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1 - \pi x}{\arctan x}\right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arctan x}\right) + \pi \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{\arctan x}$,

上式中第一个极限是 $\infty - \infty$ 型未定式,第二个极限是$\frac{0}{0}$型未定式,由于

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arctan x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan x - x}{x\arctan x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan x - x}{x^2} \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\arctan x} \quad \text{(用洛必达法则)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{1 + x^2} - 1}{2x} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{1 + x^2}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1 + x^2} \lim_{x \to 0^+} (1 + x^2) = -\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 0,$$

故 $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \pi \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{\arctan x} = \pi$.

13 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3}(\sin x + \cos x) =$ ________.

【分析】 注意 $\frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} = \frac{x^3}{2^x} \cdot \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + x^3 2^{-x}}$,且由洛必达法则知

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{2^x \ln 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{2^x \ln^2 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{2^x \ln^3 2} = 0.$$

于是 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + x^3 2^{-x}} = 1$,即 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} = 0$.

又因 $|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}$,利用无穷小量与有界变量的乘积是无穷小量可得

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3}(\sin x + \cos x) = 0.$$

14 求极限$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$.

【解法一】 所求极限是"$\frac{0}{0}$"型未定式,用洛必达法则可得

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{x^2} = -\frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}.$$

【解法二】 利用当 $\square \to 0$ 时的等价无穷小因子代换 $\ln(\square + 1) \sim \square$ 与 $1 - \cos\square \sim \frac{\square^2}{2}$,并结合洛必达法则可得

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{6x^2} = -\frac{1}{6}.$$

15 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$ ________.

【分析】 本题是求“$\dfrac{0}{0}$”型未定式的极限，用洛必达法则可得

$$\lim_{x\to0}\frac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\cos x}\sin x}{\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to0}e^{\cos x}\sqrt[3]{(1+x^2)^2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{3}{2}e.$$

【评注】 利用等价无穷小因子替换可以简化本题的求解过程.具体做法如下：

由于当 $x\to0$ 时 $\sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\dfrac{1}{3}x^2$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ 以及当 $\varphi(x)\to0$ 时 $e^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)$，从而

$$\lim_{x\to0}\frac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=e\lim_{x\to0}\frac{1-e^{\cos x-1}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=-e\lim_{x\to0}\frac{e^{\cos x-1}-1}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$$

$$=-3e\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=3e\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{3}{2}e.$$

16 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【解】 设 $f(x)=\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$，则 $\ln f(x)=\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}$，且由洛必达法则可得

$$J=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'}{\dfrac{1}{x}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(e^{\frac{\ln x}{x}}\right)'}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{\ln x}{x}}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，于是当 $x\to+\infty$ 时有 $e^{\frac{\ln x}{x}}-1\sim\dfrac{\ln x}{x}$.代入上式即得

$$J=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}=-1.$$

故所求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^J=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

【评注】 在得到 $J=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\ln x}{x\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}$ 后可不用当 $x\to+\infty$ 时的等价无穷小代换 $e^{\frac{\ln x}{x}}-1\sim\dfrac{\ln x}{x}$，而继续用洛必达法则求极限.

17 设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}$，$x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$，试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续.

【解】 利用 $\sin\pi x=\sin[\pi-\pi(1-x)]=\sin\pi(1-x)$，并令 $y=\pi(1-x)$，有

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}$$
$$=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to0^+}\frac{y-\sin y}{y\sin y}=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to0^+}\frac{y-\sin y}{y^2}$$
$$=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to0^+}\frac{1-\cos y}{2y}=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to0^+}\frac{\sin y}{2}=\frac{1}{\pi}.$$

由于 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 上连续，因此定义 $f(1)=\frac{1}{\pi}$，就可使 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续.

【评注】 本题主要考查连续性的概念与洛必达法则求极限，但应注意本题中令 $y=\pi(1-x)$ 可使问题简化.

18 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1,g'(0)=-1$.（1）求 $f'(x)$；（2）讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

【分析】 由于 $g(x)$ 有二阶连续导数，故当 $x\neq0$ 时，$f(x)$ 也具有二阶连续导数，此时，$f'(x)$ 可直接计算，且 $f'(x)$ 连续；当 $x=0$ 时，须用导数的定义求 $f'(0)$，$f'(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性也要用定义来判定.

【解】（1）当 $x\neq0$ 时，

$$f'(x)=\frac{x[g'(x)+e^{-x}]-g(x)+e^{-x}}{x^2}=\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}.$$

当 $x=0$ 时，由导数定义及洛必达法则，有

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}.$$

所以
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}, & x\neq0,\\ \dfrac{g''(0)-1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

（2）因为在 $x=0$ 处，有

$$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)+xg''(x)-g'(x)+e^{-x}-(x+1)e^{-x}}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}=f'(0).$$

而 $f'(x)$ 在 $x\neq0$ 处是连续函数，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为连续函数.

【评注】 本题综合考查连续的概念、导数的定义和运算以及洛必达法则.

该题中条件"$g(x)$ 具有二阶连续导数"是过强的，实际上只要 $g(x)$ 具有一阶连续导数，$g''(0)$ 存在即可. 这时在解答过程中，求 $f'(0)$ 时只能用一次洛必达法则，然后要用导数定义，在求 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)$ 时也不能用洛必达法则，而要用导数定义.

19 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续，且 $f(a)$ 为其极大值，则存在 $\delta>0$，当

$x \in (a-\delta, a+\delta)$ 时,必有

(A) $(x-a)[f(x)-f(a)] \geqslant 0$. (B) $(x-a)[f(x)-f(a)] \leqslant 0$.

(C) $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2} \geqslant 0 (x \neq a)$. (D) $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2} \leqslant 0 (x \neq a)$.

【分析】 由 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点,知 $\exists \delta > 0$,当 $x \in (a-\delta, a+\delta)$ 时,$f(x) \leqslant f(a)$,即 $f(a)-f(x) \geqslant 0$;又由 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续,

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2} = \frac{f(a)-f(x)}{(a-x)^2} \geqslant 0 \ (x \neq a).$$

应选(C).

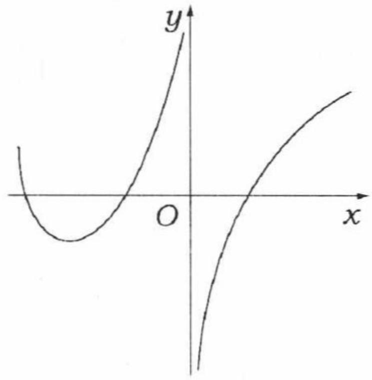
20 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,其导函数的图形如右图所示,则 $f(x)$ 有

(A) 一个极小值点和两个极大值点.

(B) 两个极小值点和一个极大值点.

(C) 两个极小值点和两个极大值点.

(D) 三个极小值点和一个极大值点.



第 20 题图

【分析】 由右图,$f(x)$ 有三个驻点和一个不可导点 $x=0$. $f'(x)$ 在三个驻点处,一个由正变负,两个由负变正,因而这三个驻点中一个是极大值点,两个是极小值点;而点 $x=0$($f(x)$ 的连续点)的左侧 $f'(x)>0$,右侧 $f'(x)<0$,$x=0$ 是 $f(x)$ 由增变减的交界点,因而是极大值点.

故应选(C).

【评注】 求极值点时,除了考察驻点外还应注意考察不可导点.若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续,但 $f'(x_0)$ 不存在,极值的第一判别法对它仍适用.

21 函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为________.

【分析】 先判断 $y=x^{2x}$ 在 $(0,1]$ 的单调性.由于

$$y' = (e^{2x\ln x})' = e^{2x} \cdot 2(\ln x + 1) \begin{cases} <0, & 0<x<e^{-1}, \\ =0, & x=e^{-1}, \\ >0, & e^{-1}<x<1, \end{cases}$$

因此 $y=x^{2x}$ 在 $(0,1]$ 的最小值为 $y(e^{-1}) = e^{-2e^{-1}}$.

22 设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶导数,且 $g''(x)<0$.若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值,则 $f[g(x)]$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是

(A) $f'(a)<0$. (B) $f'(a)>0$.

(C) $f''(a)<0$. (D) $f''(a)>0$.

【分析】 利用二阶可导函数 $F(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取得极大值的一个充分条件是 $F'(x_0)=0$ 且 $F''(x_0)<0$ 来解决本题.

设 $F(x)=f[g(x)]$,由题设知 $F(x)$ 二阶可导,且

$$F'(x_0) = [f(g(x))]'\Big|_{x=x_0} = f'[g(x_0)]g'(x_0) = f'(a)g'(x_0) = 0,$$

$$F''(x_0) = [f(g(x))]''\Big|_{x=x_0} = f''[g(x_0)][g'(x_0)]^2 + f'[g(x_0)]g''(x_0) = f'(a)g''(x_0),$$

因为 $g''(x_0) < 0$,即 $F''(x_0)$ 与 $f'(a)$ 反号,从而当 $f'(a) > 0$ 时就有 $F'(x_0) = 0$ 且 $F''(x_0) < 0$,即 $x = x_0$ 是 $F(x) = f[g(x)]$ 的一个极大值点,故应选(B).

23 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t^3 + t + \dfrac{1}{3}, \\ y = \dfrac{1}{3}t^3 - t + \dfrac{1}{3} \end{cases}$ 确定,求 $y = y(x)$ 的极值和曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

【解】 先求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}.$$

再求
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right)'_t \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{2t(t^2 + 1) - 2t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}\frac{1}{t^2 + 1}$$
$$= \frac{4t}{(t^2 + 1)^3}\begin{cases} < 0, & t < 0, \\ = 0, & t = 0, \\ > 0, & t > 0. \end{cases}$$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1} > 0$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=-1} < 0$.

$t = 1$ 对应 $y = \dfrac{-1}{3}$,它是极小值;$t = -1$ 对应 $y = 1$,它是极大值.

$t = 0$ 对应 $x = \dfrac{1}{3}$,$t > 0$ 对应 $x \in \left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$,$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} > 0$;$t < 0$ 对应 $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$,$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} < 0$.

因此凸区间是 $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$,凹区间是 $\left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$,拐点是 $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

24 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$,且 $f'(0) = 0$,则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

【分析】 由 $f'(0) = 0$ 知 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的一个驻点;由关系式知 $f''(0) = 0$,即 $(0, f(0))$ 可能是拐点,如何判断?或者分别考察 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 在点 $x = 0$ 的左右附近是否变号,但在本题中这不容易做到.于是去求 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处的更高阶的导数.将原关系式两边求导后,令 $x = 0$ 可得 $f'''(0) = 1$.从而得知点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.故应选(C).

【评注】 ① 函数 $f(x)$ 的三阶导数是存在的.这是因为等式 $f''(x) = x - [f'(x)]^2$ 的右端可导.

② 一般的判别法则是:若 $f(x)$ 在点 x_0 处的第一个非零导数为 $f^{(k)}(x_0)$ $(k > 2)$,若 k 为奇数,则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点;若 k 为偶数,则 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点.

25 设 $f(x) = |x(1 - x)|$,则

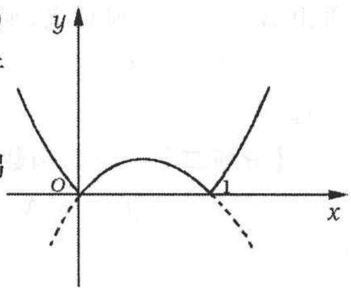
(A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(B)$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C)$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D)$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【分析一】 $y=x(1-x)$ 是过点 $(0,0)$，$(1,0)$ 的二次曲线，$f(x)=|y|$，当 $y\geqslant 0$ 时 $f(x)$ 与 y 相同，当 $y<0$ 时 $f(x)$ 与 y 的图形关于 x 轴对称，于是易画出图形如右图所示.



第 25 题图

由图中可知：$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点且 $(0,0)$ 是 $y=f(x)$ 的拐点. 应选(C).

【分析二】 显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

$$f(x)=\begin{cases} x(1-x), & 0\leqslant x<1, \\ -x(1-x), & x<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad f'(x)=\begin{cases} 1-2x, & 0<x<1, \\ -1+2x, & x<0, \end{cases}$$

$$f'(x)\begin{cases} >0, & 0<x<\dfrac{1}{2}, \\ <0, & x<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点. 又

$$f''(x)=\begin{cases} -2, & 0<x<1, \\ 2, & x<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f''(x)$ 在 $x=0$ 两侧异号. 故 $(0,0)$ 是 $y=f(x)$ 的拐点. 应选(C).

【评注】 *考察 $x=a$ 是否是函数 $y=f(x)$ 的极值点，$(a,f(a))$ 是否是 $y=f(x)$ 的拐点时，要求 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处连续这是重要的，然后考察 $f'(x)$ 在 $x=a$ 两侧是否变号，$f''(x)$ 在 $x=a$ 两侧是否变号，而 $f'(a)$，$f''(a)$ 是否存在这一点并不重要(可以不要求 $f'(a)$，$f''(a)$ 存在)，该试题中，$f'(0)$ 与 $f''(0)$ 均不存在.*

26 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^3+3t+1, \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为________.

【分析】 用参数求导法先求 $\dfrac{dy}{dx}$，再求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}=\frac{t^2-1}{t^2+1}=1-\frac{2}{t^2+1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)'_t\frac{dt}{dx}=\frac{4t}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}<0 \quad (t<0),$$

而 $t<0$ 对应于 $x<1$，因此 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为 $(-\infty,1)$(或 $(-\infty,1]$).

【评注】 *对由参数方程给定的函数判断其凹凸性，实质上就是用参数求导法.*

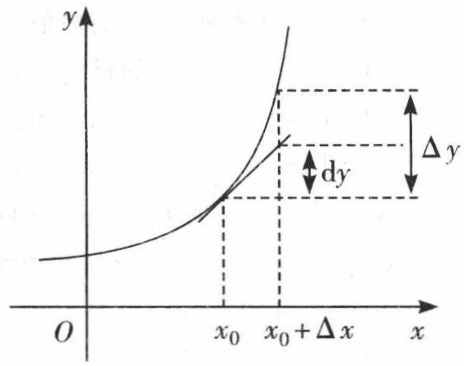
27 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则

(A)$0<dy<\Delta y$.

(B)$0<\Delta y<dy$.

(C) $\Delta y < \mathrm{d}y < 0$.

(D) $\mathrm{d}y < \Delta y < 0$.



第 27 题图

【分析一】 由条件知,$y = f(x)$ 单调上升且是凹的.再由 $\Delta y, \mathrm{d}y$ 的几何意义,如右图所示,有

$$0 < \mathrm{d}y < \Delta y.$$

故选(A).

【分析二】 由凹函数的性质

$$f(x_0 + \Delta x) > f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \quad (\Delta x \neq 0)$$

即 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > f'(x_0)\Delta x > 0$, $(\Delta x > 0)$

亦即 $\Delta y > \mathrm{d}y > 0$. $(\Delta x > 0)$ 故选(A).

28 曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是

(A)(1,0). (B)(2,0). (C)(3,0). (D)(4,0).

【分析】 将 y 表为

$$y = g(x)(x-3)^3, \quad g(x) \xlongequal{\text{记}} (x-1)(x-2)^2(x-4)^4,$$

则

$$y' = g'(x)(x-3)^3 + 3g(x)(x-3)^2,$$
$$y'' = g''(x)(x-3)^3 + 6g'(x)(x-3)^2 + 6g(x)(x-3),$$
$$y^{(3)} = g^{(3)}(x)(x-3)^3 + 9g''(x)(x-3)^2 + 18g'(x)(x-3) + 6g(x)$$

$\Rightarrow$ $y''(3) = 0, y^{(3)}(3) = 6g(3) \neq 0$.

$\Rightarrow$(3,0) 是拐点.

因此,由四选一原则应选(C).

29 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y\ln y - x + y = 0$ 确定,试判断曲线 $y = y(x)$ 在点(1,1)附近的凹凸性.

【分析】 所求隐函数 $y = y(x)$ 满足方程 $y\ln y - x + y = 0$ 与条件 $y(1) = 1$,由方程知 $y(x)$ 具有二阶连续导数,从而要判断 $y = y(x)$ 在点(1,1)附近的凹凸性,只需求出 $y''(1)$.

【解】 将方程看成关于 x 的恒等式,两端对 x 求导数得

$$y'\ln y + y' - 1 + y' = 0,$$

整理得 $$y'(2 + \ln y) = 1, \qquad (*)$$

在(*)式中令 $x = 1, y = 1$ 可得 $y'(1) = \frac{1}{2}$.将(*)式两端再对 x 求导数,得

$$y''(2 + \ln y) + y' \cdot \frac{y'}{y} = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{(y')^2}{y(2 + \ln y)}.$$

在上式中令 $x = 1, y = 1, y' = \frac{1}{2}$ 即得 $y''(1) = -\frac{1}{8} < 0$.由 $y''(x)$ 的连续性知存在 $x = 1$ 的一个邻域,在此邻域中 $y''(x) < 0$,即曲线 $y = y(x)$ 在点(1,1)附近是凸弧.

30 讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数.

【解】 问题等价于讨论 $\varphi(x) = \ln^4 x - 4\ln x + 4x - k$ 在 $(0, +\infty)$ 有几个零点.由

$$\varphi'(x)=\frac{4}{x}(\ln^3 x-1+x),$$

不难看出 $x=1$ 是 $\varphi(x)$ 的驻点，而且，当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$．由此，$x=1$ 是 $\varphi(x)$ 的最小值点，$\varphi(1)=4-k$ 是 $\varphi(x)$ 的最小值．

当 $\varphi(1)>0$ 即当 $k<4$ 时，$\varphi(x)\geqslant\varphi(1)>0$，$\varphi(x)$ 没有零点；

当 $\varphi(1)=0$ 即当 $k=4$ 时，$\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=0$，$\varphi(x)$ 有唯一零点；

当 $\varphi(1)<0$ 即当 $k>4$ 时，由于

$$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to0^+}[\ln x(\ln^3 x-4)+4x-k]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}[\ln x(\ln^3 x-4)+4x-k]=+\infty,$$

故 $\varphi(x)$ 有两个零点．

综上所述，当 $k<4$ 时，两曲线没有交点；当 $k=4$ 时，两曲线仅有一个交点；当 $k>4$ 时，两曲线有两个交点．

31 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$．

【分析与证明一】 令 $F(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，在题设条件下，要证存在 $\xi\in(a,b)$，$F''(\xi)=0$．已知 $F(a)=F(b)=0$，只需由题设再证 $\exists c\in(a,b)$，$F(c)=0$．

(1) 由题设 $\exists x_1\in(a,b)$，$M=\max\limits_{[a,b]}f(x)=f(x_1)$，$\exists x_2\in(a,b)$，$M=\max\limits_{[a,b]}g(x)=g(x_2)$．若 $x_1=x_2$，取 $c=x_1=x_2$，$F(c)=0$．

若 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，则

$$F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\geqslant0,F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\leqslant0.$$

$\Rightarrow\exists c\in[x_1,x_2]$，$F(c)=0$．

(2) 由 $F(a)=F(c)=F(b)=0$，对 $F(x)$ 分别在 $[a,c]$，$[c,b]$ 用罗尔定理 $\Rightarrow\exists\xi_1\in(a,c)$，$\exists\xi_2\in(c,b)$，使得 $F'(\xi_1)=0$，$F'(\xi_2)=0$．

再对 $F'(x)$ 用罗尔定理 $\Rightarrow\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $F''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$．

【分析与证明二】 （利用以下两个已知的结论：

1° 设 $h(x)$ 在 (a,b) 可导，若 $h'(x)$ 在 (a,b) 恒不为零，则 $h'(x)>0\,(x\in(a,b))$ 或 $h'(x)<0\,(x\in(a,b))$．

2° 设 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，若 $h(a)=h(b)=0$，$h(x)$ 在 $[a,b]$ 为凸（凹）函数，则 $h(x)>0\,(<0)\,(x\in(a,b))$．）

同前，由题设 $\exists x_1\in(a,b)$，$M=\max\limits_{[a,b]}f(x)=f(x_1)$，$\exists x_2\in(a,b)$，$M=\max\limits_{[a,b]}g(x)=g(x_2)$．

令 $F(x)=f(x)-g(x)$．现用反证法．若结论不对，则 $F''(x)>0$ 或 $F''(x)<0\quad(x\in(a,b))$．

(1) 若 $F''(x)>0\,(x\in(a,b))\Rightarrow F(x)$ 在 $[a,b]$ 为凹函数，又 $F(a)=F(b)=0\Rightarrow F(x)<0\,(x\in(a,b))$，但 $F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\geqslant0$，得矛盾．

(2) 若 $F''(x)<0\,(x\in(a,b))\Rightarrow F(x)$ 在 $[a,b]$ 为凸函数，又 $F(a)=F(b)=0\Rightarrow F(x)$

$>0\ (x\in(a,b))$，但 $F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\leqslant 0$，也得矛盾．

因此必 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$．

【评注】 ① 有的考生将题设"存在相等的最大值"误解为"不但最大值相等，并且取得最大值处的 x 也相等"，即存在 $x_1\in(a,b)$，使

$$f(x_1)=\max_{[a,b]}f(x)=g(x_1)=\max_{[a,b]}g(x),$$

于是立即有 $\varphi(x_1)=0$．这样一种误解，使得证明变得十分简单，失去了原题的意义．也有的考生将题设"存在相等的最大值"误解为"存在相等的最大值点"，而最大值并不一定相等．这样一来就无法往下做了．

② 有的考生一见到题中涉及两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，立即采用柯西中值公式．有的考生见到题目条件有二阶可导，就想到采用泰勒公式．这些都反映了部分考生只会套用某种套路，而没有深刻掌握实质．柯西中值公式要求某函数的导数不为零，泰勒公式要求某函数在某点的函数值及一阶导数值能方便地求得(或消去)．无法获得以上要求的这些信息，自然就做不下去了．

32 (Ⅰ) 证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$．

(Ⅱ) 证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$．

【分析与证明】 (Ⅰ) 即证

$$f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ \text{在}(a,b)\ \exists\ \text{零点}$$

$$\Leftrightarrow\quad\left[f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]'\ \text{在}(a,b)\ \exists\ \text{零点}.$$

引进辅助函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，又

$$F(a)=F(b)(=f(a)),$$

由罗尔定理得知，$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$．

(Ⅱ) 按右导数定义，只须考察 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$．

方法 1° $\forall x\in(0,\delta)$，在 $[0,x]$ 上由拉格朗日中值定理得，$\exists\xi\in(0,x)$，

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(\xi).$$

当 $x\to0+$ 时 $\xi\to0+$，于是

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}f'(\xi)=\lim_{x\to0+}f'(x)=A.$$

方法 2° 当 $x\to0+$ 时，对 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ 可以用洛必达法则.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\ \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}}\ \lim_{x\to0+}f'(x)=A.$$

【评注】 题(Ⅱ)中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续改为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续也可以.

33 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导,则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

【分析一】 排除法.由于当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to0$ 可能是无穷振荡的,$f'(x)$ 可能没有极限,如 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x^2$,$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\sin x^2+2\cos x^2$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 不存在.故(A)不对;例如 $f(x)=\sin x\to0\,(x\to0^+)$,但 $f'(x)=\cos x\to1\neq0$,故(C)、(D)不对.应选(B).

【分析二】 证明(B)对.反证法:假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=a\neq0$,则由拉格朗日中值定理,有

$$f(2x)-f(x)=f'(\xi)x\to\infty\quad(x\to+\infty)$$

(当 $x\to+\infty$ 时,$\xi\to+\infty$,因为 $x<\xi<2x$);但这与 $|f(2x)-f(x)|\leqslant|f(2x)|+|f(x)|\leqslant2M$ 矛盾($|f(x)|\leqslant M$).

【评注】 用拉格朗日中值定理可以证明:设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导,$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$.若 $A>0$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$;若 $A<0$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

34 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数,且 $f(-1)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$,证明:在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ,使 $f'''(\xi)=3$.

【证明】 由 $f(x)$ 有三阶导数,可考虑用泰勒公式;又注意到 $f'(0)=0$,应在 $x=0$ 处展开:

$$f(x)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\eta)}{3!}x^3$$

(η 在 x,0 之间).当 $x=\pm1$ 时,有

$$1=f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f'''(\eta_1)}{3!}\ (0<\eta_1<1),$$

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}-\frac{f'''(\eta_2)}{3!}\ (-1<\eta_2<0).$$

两式相减得 $\quad f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$.

由 $f'''(x)$ 的连续性,$f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_1,\eta_2]$ 上有最大值和最小值,设它们分别为 M 和 m,则

$$m\leqslant\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]\leqslant M.$$

再由连续函数的介值定理知,至少存在一点 $\xi\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$,使

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3.$$

【评注】 这个证明题有一定的综合性,除了要利用泰勒展开式,还要用闭区间上连续函数的两条性质,故有一定的难度.从考试结果看,得分率较低,主要错误有以下几种:

① 泰勒公式只展开到第3项,试图通过再利用一次中值定理达到目的,这显然是不可能的,于是做不下去只好作罢.

② 在将 $x=-1$ 和1代入泰勒展开式后,把 η_1 和 η_2 不加区别都写成 ξ,似乎很快便得到了证

明．但这是一个原则性错误．由上面的证明容易看到，η_1 和 η_2 分别位于不同的区间，是绝不会相等的．

③ 构造辅助函数 $F(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^3$，试图连续使用罗尔中值定理达到目的．但他们忽略了题目中并未给出 $f(x)$ 的二阶导数的情况，所以也做不下去．由此看，做一个证明题一定要把条件分析清楚才能找到正确的证明途径．

35 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{3}$．证明：存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$．

【分析与证明】 这是证明 $f(x)$ 的导函数存在某种特征点，要证：$\exists\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$使得

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2,$$

即

$$[f'(\xi)-\xi^2]+[f'(\eta)-\eta^2]=0,$$

即证

$$\left[f(x)-\frac{1}{3}x^3\right]'\bigg|_{x=\xi}+\left[f(x)-\frac{1}{3}x^3\right]'\bigg|_{x=\eta}=0.$$

依题设 ξ,η 分别位于$\left(0,\frac{1}{2}\right)$与$\left(\frac{1}{2},1\right)$区间，因此我们对 $F(x)\xlongequal{\text{记}}f(x)-\frac{1}{3}x^3$ 分别在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$与$\left[\frac{1}{2},1\right]$上用拉格朗日中值定理，有

$\exists\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得

$$\frac{F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)}{\frac{1}{2}}=F'(\xi),\text{即}\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{1}{2}}=f'(\xi)-\xi^2\quad(f(0)=0);$$

$\exists\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得

$$\frac{F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}=F'(\eta),\text{即}\frac{-\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]}{\frac{1}{2}}=f'(\eta)-\eta^2\quad\left(f(1)=\frac{1}{3}\right).$$

两式相加即得

$$f'(\xi)-\xi^2+f'(\eta)-\eta^2=0,\text{即}\quad f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2.$$

36 求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数．

【解】 这是确定连续函数 $f(x)\xlongequal{\text{记}}k\arctan x-x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上零点个数的问题．我们用单调性分析方法．

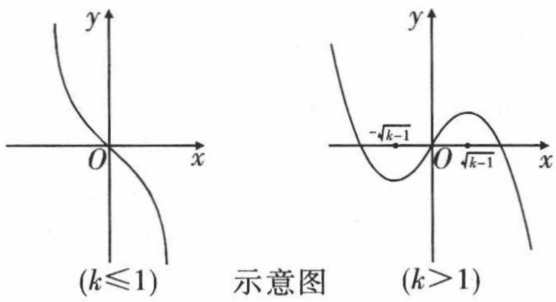
由于 $f(x)$ 是奇函数，只需考察 $x\in[0,+\infty)$．

显然 $\forall k$，均有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,f(0)=0.$$

再考察单调性区间：求导可得

$$f'(x)=\frac{k}{1+x^2}-1.$$



1° $k\leqslant 1$ 时 $f'(x)<0(\forall x>0)\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,+\infty)\searrow\Rightarrow f(x)<f(0)=0(x>0)\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 无零点.

因此 $k\leqslant 1$ 时方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有唯一根即 $x=0$.

2° $k>1$ 时，由

$$f'(x)=\frac{(k-1)-x^2}{1+x^2}\begin{cases}>0, & 0<x<\sqrt{k-1},\\ =0, & x=\sqrt{k-1},\\ <0, & x>\sqrt{k-1}\end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,\sqrt{k-1}]\nearrow$，在 $[\sqrt{k-1},+\infty)\searrow$.

由 $f(0)=0\Rightarrow f(x)>f(0)=0(0<x<\sqrt{k-1})\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,\sqrt{k-1})$ 无零点. 因 $f(\sqrt{k-1})>0$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ 异号，又 $f(x)$ 在 $(\sqrt{k-1},+\infty)\searrow\Rightarrow f(x)$ 在 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 有唯一零点.

因此 $k>1$ 时方程 $f(x)=0$ 有三个根（其中一个是 $x=0$）.

37 设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数，且 $f''(x)\neq 0$，试证：

(1) 对于 $(-1,1)$ 内的任一 $x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x]$ 成立；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

【证明】 (1) 由拉格朗日中值定理，$\forall x\in(-1,1)$，$x\neq 0$，$\exists\theta\in(0,1)$，使

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta x)$$

(θ 与 x 有关)；又由 $f''(x)$ 连续而 $f''(x)\neq 0$，$f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 不变号，$f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 严格单调，θ 唯一.

(2) **方法 1°** 对 $f'(\theta x)$ 再用拉格朗日中值定理，然后就可解出 $\theta(x)$. 以

$$f'(\theta x)=f'(0)+f''(\xi)\cdot\theta x\ (\xi \text{ 在 } \theta x \text{ 与 } 0 \text{ 之间})$$

代入题(1)中式子得 $f(x)=f(0)+xf'(0)+f''(\xi)\cdot\theta\cdot x^2$.

解得 $$\theta=\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}\cdot\frac{1}{f''(\xi)}.$$

由此 $$\lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{f''(0)}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\frac{1}{f''(0)}\cdot\frac{f''(0)}{2}=\frac{1}{2}.$$

方法 2° 对 $f'(\theta x)$ 使用 $f''(0)$ 的定义. 由题(1)中的式子先解出 $f'(\theta x)$，则有

$$f'(\theta x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}.$$

再改写成 $$f'(\theta x)-f'(0)=\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x},$$

$$\frac{f'(\theta x)-f'(0)}{\theta x}\cdot\theta=\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2},$$

解出 θ,令 $x\to 0$ 取极限得

$$\lim_{x\to0}\theta=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}\Big/\lim_{x\to0}\frac{f'(\theta x)-f'(0)}{\theta x}=\frac{\frac{1}{2}f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2}.$$

方法 3° 由 $f(x)=f(0)+f'(\theta(x)x)x$,将 $f'(\theta(x)x)$ 再展开,有

$$f'[\theta(x)x]=f'(0)+f''(0)\theta(x)x+o(\theta(x)x).$$

代入上式,得 $f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\theta(x)x^2+o(\theta(x)x)x.$

所以 $$\theta(x)=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x-o(\theta(x)x)x}{f''(0)x^2}.$$

令 $x\to0$ 取极限,有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\frac{1}{2}f''(0),\quad \lim_{x\to0}\frac{o(\theta(x)x)x}{x^2}=0,$$

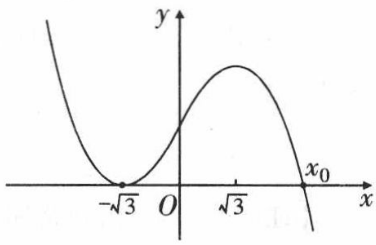
所以 $$\lim_{x\to0}\theta(x)=\frac{1}{2}.$$

【评注】 本题考查三点:① 拉格朗日中值定理;② 会用 $f''(x)\neq0$ 证明 $f'(x)$ 单调,或用 $f''(x)\neq0$ 证明 $f'(x)$ 至多有一个零点;③ 会根据导数定义凑出某极限式,或会用一阶泰勒展式与拉格朗日中值定理对照求极限.

38 证明方程 $4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有两个实根.

【证明】 令 $f(x)=4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$ 可知

$$f'(x)=\left(\frac{4}{1+x^2}-1\right)\begin{cases}>0, & |x|<\sqrt{3},\\ =0, & |x|=\sqrt{3},\\ <0, & |x|>\sqrt{3},\end{cases}$$



第 38 题图

又 $f(-\sqrt{3})=0,\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,由此可知 $f(x)$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上的增减情况如下表:

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty\searrow$	0	$\nearrow$	$2\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$	$\searrow-\infty$

从而除 $f(-\sqrt{3})=0$ 之外在区间 $(\sqrt{3},+\infty)$ 中还有一点 x_0 使得 $f(x_0)=0$,除这两点外 $f(x)$ 再没有零点. 因此方程 $f(x)=4\arctan x-x+\frac{3}{4}\pi-\sqrt{3}$ 恰有两个实根得证.

39 当 a 取下列哪个值时,函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点.

(A)2 . (B)4 . (C)6 . (D)8 .

【分析】 令函数 $g(x)=2x^3-9x^2+12x$,由 $g'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)=0$,可得函数 $g(x)$ 恰有两个驻点 $x=1$ 与 $x=2$,利用 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$,即知 $g(1)$

$= 5$, $g(2) = 4$ 分别是函数 $g(x)$ 的唯一极大值与唯一极小值，且函数 $g(x)$ 的单调性如下表：

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1,2)$	2	$(2, +\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	从 $-\infty$ ↑	极大值 5	↓	极小值 4	↑ 到 $+\infty$

由此可见曲线 $y = g(x)$ 与水平直线 $y = 4$ 恰有两个不同的交点，即当 $a = 4$ 时，函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$ 恰有两个不同的零点，故应选(B)．

40 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内可导，则

(A) 当 $f(a)f(b) < 0$ 时，存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = 0$.

(B) 对任何 $\xi \in (a,b)$，有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x) - f(\xi)] = 0$.

(C) 当 $f(a) = f(b)$ 时，存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi) = 0$.

(D) 存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

【分析】 由于 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，$\xi \in (a,b)$，则 $f(x)$ 在 ξ 点可导，因而在 ξ 点连续，故 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x) - f(\xi)] = 0$. 所以应选(B).

注意本题也可用排除法求解．例如：

由函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & a \leqslant x < b, \\ 1, & x = b \end{cases}$ 可知结论(A)不正确．

由函数 $f(x) = \begin{cases} x, & a \leqslant x < b, \\ a, & x = b \end{cases}$ 可知结论(C)和(D)都不正确．

【评注】 本题主要考查连续函数介值定理，罗尔定理及拉格朗日中值定理的条件．事实上，若将本题中的条件"设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义"改为"设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续"，则本题中四个选项都对．

41 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3$, $f(3) = 1$. 试证必存在 $\xi \in (0,3)$，使 $f'(\xi) = 0$.

【分析】 本题关键是证明存在一点 $c \in [0,3)$，使 $f(c) = 1$，然后由 $f(3) = 1$，用罗尔定理即可．

【证明】 因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且在 $[0,2]$ 上必有最大值 M 和最小值 m，于是 $m \leqslant f(0) \leqslant M$, $m \leqslant f(1) \leqslant M$, $m \leqslant f(2) \leqslant M$. 故

$$m \leqslant \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} = 1 \leqslant M.$$

这表明 $\frac{1}{3}[f(0) + f(1) + f(2)]$ 是函数 $f(x)$ 当 $x \in [0,2]$ 时的值域 $[m,M]$ 上的一个点．由闭区间上连续函数的最大、最小值定理与介值定理知，至少存在一点 $c \in [0,2]$，使

$$f(c) = \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} = 1.$$

因为 $f(c) = 1 = f(3)$，且 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续，在 $(c,3)$ 内可导，所以由罗尔定理知，必存在 $\xi \in (c,3) \subset (0,3)$，使 $f'(\xi) = 0$.

【评注】 本题主要考查罗尔定理和介值定理．注意证明存在 $c \in [0,3)$，使 $f(c) = 1$ 的方法

很多,请读者尝试写出一种与本题证明不同的证法作为练习.

42 (Ⅰ) 证明:对任意的正整数 n,都有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立;

(Ⅱ) 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$,证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

【证明】 (Ⅰ)这是证明数列不等式.

方法 1° 利用微分中值定理.将要证的不等式改写成

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}<\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 1}{\frac{1}{n}}<1.$$

现对 $f(x)=\ln x$ 在 $\left[1,1+\frac{1}{n}\right]$ 上用拉格朗日中值定理得

$$\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)}{\frac{1}{n}}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 1}{\frac{1}{n}}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

$$=f'(\xi)=\frac{1}{\xi},\text{其中 } 1<\xi<1+\frac{1}{n}.$$

于是
$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}<\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}<1,\text{即}\quad \frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

方法 2° 证明数列不等式转化为证明函数不等式,用单调性方法.

令 $f(x)=x-\ln(1+x)(x\geqslant 0)\Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0(x>0),f'(0)=0\Rightarrow f(x)$ 在$[0,+\infty)\nearrow\Rightarrow f(x)>f(0)=0(x>0)$.

因此,$f\left(\frac{1}{n}\right)>0$ 即 $\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$($\forall$ 正整数 n).

令 $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}(x>0)\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}<0(x>0)\Rightarrow g(x)$ 在$(0,+\infty)\searrow$,又 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0\Rightarrow g(x)>0(x>0)$.

因此,$g(n)>0$,即 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}$($\forall$ 正整数 n).

(Ⅱ)证明 a_n 单调有界(用题(Ⅰ)).

由
$$a_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1),$$

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

$$\Rightarrow\quad a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0(n=1,2,3,\cdots)$$

$$\Rightarrow\quad a_n\searrow.$$

又由题(Ⅰ),$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots)$,即

$$\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)=\ln2-\ln1<\frac{1}{1},$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)=\ln3-\ln2<\frac{1}{2},$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)=\ln4-\ln3<\frac{1}{3},$$

……

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n},$$

将它们相加得

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1),$$

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0,$$

即 a_n 有下界.

因为 a_n 单调下降有下界,所以 a_n 收敛.

43 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数,$f'(x)$ 单调减少;且 $f(1)=f'(1)=1$,则

(A) 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$.

(B) 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$.

(C) 在 $(1-\delta,1)$ 内,$f(x)<x$;在 $(1,1+\delta)$ 内,$f(x)>x$.

(D) 在 $(1-\delta,1)$ 内,$f(x)>x$;在 $(1,1+\delta)$ 内,$f(x)<x$.

【分析一】 用最值证不等式.在 $(1-\delta,1+\delta)$ 区间内,令 $\varphi(x)=f(x)-x$,则

$$\varphi'(x)=f'(x)-1=f'(x)-f'(1).$$

由 $f'(x)$ 单调减,$\varphi(x)$ 有唯一驻点 $x=1$;而且 φ' 在 $x=1$ 处由正变负,$x=1$ 是极大值点也是最大值点,因而 $\varphi(x)\leqslant\varphi(1)=f(1)-1=0$,即 $f(x)-x<0$(当 $x\neq1$).应选(A).

【分析二】 用拉格朗日中值定理.考察 $x-f(x)$,改写后用拉格朗日中值定理得

$$\begin{aligned}x-f(x)&=(x-1)-[f(x)-f(1)]=(x-1)-f'(\xi)(x-1)\\&=(x-1)[f'(1)-f'(\xi)]>0\,(x\in(1-\delta,1+\delta),x\neq1),\end{aligned}$$

其中 ξ 在 x 与 1 之间.应选(A).

【分析三】 由于 $f'(x)$ 在 $(1-\delta,1+\delta)$ 单调减少 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(1-\delta,1+\delta)$ 是凸的.由凸函数的性质 $\Rightarrow$

$$f(x)<f(1)+f'(1)+f'(1)(x-1)=1+(x-1)=x\quad(x\in(1-\delta,1+\delta),x\neq1).$$

【评注】 用泰勒公式只能得到 $f(x)\leqslant x$:

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-1)^2=x+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-1)^2.$$

由 $f'(x)$ 单调减,$f''(x)\leqslant0$,因而 $f(x)\leqslant x$(当 $x\neq1$).

44 证明:当 $0<a<b<\pi$ 时,$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

【分析与证明】 考察 $f(x) = x\sin x + 2\cos x + \pi x, x \in [0,\pi]$.

$$\Rightarrow \quad f'(x) = x\cos x + \sin x - 2\sin x + \pi = x\cos x - \sin x + \pi,$$

$$f''(x) = -x\sin x + \cos x - \cos x = -x\sin x < 0 \quad (x \in (0,\pi))$$

$\Rightarrow f'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 单调下降, $f'(x) > f'(\pi) = 0, x \in [0,\pi)$.

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 单调上升. 因此, 当 $0 < a < b < \pi$ 时, $f(b) > f(a)$, 即

$$b\sin b + 2\cos b + \pi b > a\sin a + 2\cos a + \pi a.$$

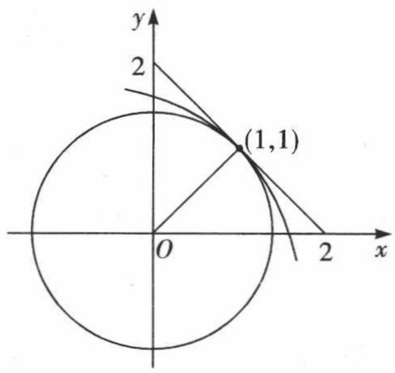
45 若 $f''(x)$ 不变号, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆为 $x^2 + y^2 = 2$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内

(A) 有极值点, 无零点.

(B) 无极值点, 有零点.

(C) 有极值点, 有零点.

(D) 无极值点, 无零点.



第 45 题图

【分析】 $x^2 + y^2 = 2$ 是 $y = f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆, 按曲率圆概念, $y = f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处与曲率圆相切 $(f'(1) = -1)$ 且曲率圆在曲线凹的一侧, 如右图.

由于 $f''(x)$ 不变号, 所以 $y = f(x)$ 在 $[1,2]$ 是凸函数 $(f''(x) < 0) \Rightarrow f'(x)$ 单调下降, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[1,2]\searrow$, 在 $(1,2)$ 无极值点. 又曲线 $y = f(x)$ 在切线的下方(除切点外), 点 $(1,1)$ 处圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 的切线 $(y = -x + 2)$ 与 x 轴交于点 $(0,2)$, 因此 $y = f(x)$ 在 $(0,2)$ 有零点.

综上分析, 应选(B).

【评注】 ① 本题是一道综合题, 涉及曲率圆、极值点判定、单调性等概念以及零点定理, 有一定的难度. 首先, 由曲率圆知曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处与 $x^2 + y^2 = 2$ 有相同的切线和曲率, 从而可求出 $f'(1)$ 与 $f''(1)$; 其次, 由 $f''(x)$ 不变号既可知曲线 $y = f(x)$ 的凹凸性不改变, 也可判断函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内的单调性; 最后, 利用零点定理即可得出正确的选项.

② 有相当多的考生选(A)或(C), 主要原因是对曲率圆的概念不熟悉, 不知道由它可得到什么结论; 其次是对 $f''(x)$ 不变号这个条件理解不透彻.

③ 如上分析, 由几何直观, 易选出正确答案(B).

下面给出证明. $x^2 + y^2 = 2$ 是 $y = f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆.

由 $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow x + yy' = 0,\ 1 + y'^2 + yy'' = 0 \Rightarrow$

$$y'(1) = -1,\ y''(1) = -2.$$

由曲率圆概念, $f'(1) = -1, f''(1) = -2$, 又 $f''(x)$ 不变号 $\Rightarrow f''(x) < 0(x \in [1,2]) \Rightarrow f'(x) \leqslant f'(1) < 0(x \in [1,2]) \Rightarrow f(x)$ 在 $[1,2]\searrow$, 无极值点. 再由凸函数性质 $\Rightarrow$

$$f(x) < f(1) + f'(1)(x-1) \quad (x \in (1,2]).$$

特别地, 有 $f(2) < 1 - (2-1) = 0$, 又 $f(1) = 1 > 0$, 则 $\exists c \in (1,2), f(c) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 有零点.

第四章　不定积分

习题 4－1　不定积分的概念与性质

1 利用导数验证下列等式:

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$;

(2) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$;

(3) $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}dx = \arctan x+\frac{1}{x+1}+C$;

(4) $\int \sec x dx = \ln|\tan x+\sec x|+C$;

(5) $\int x\cos x dx = x\sin x+\cos x+C$;

(6) $\int e^x\sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$.

【解】 (1) $\frac{d}{dx}[\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C] = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(2) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C\right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot x-\sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

(3) $\frac{d}{dx}\left(\arctan x+\frac{1}{x+1}+C\right) = \frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}$.

(4) $\frac{d}{dx}(\ln|\tan x+\sec x|+C) = \frac{1}{\tan x+\sec x}\cdot(\sec^2 x+\sec x\tan x) = \sec x$.

(5) $\frac{d}{dx}(x\sin x+\cos x+C) = \sin x+x\cos x-\sin x = x\cos x$.

(6) $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C\right] = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x) = e^x\sin x$.

2 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{x^2}$;　　(2) $\int x\sqrt{x}dx$;

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$;　　(4) $\int x^2\sqrt[3]{x}dx$;

(5) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$;　　(6) $\int \sqrt[m]{x^n}dx$;

(7) $\int 5x^3 \mathrm{d}x$;

(8) $\int (x^2 - 3x + 2)\mathrm{d}x$;

(9) $\int \dfrac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2gh}}$ (g 为常数);

(10) $\int (x^2 + 1)^2 \mathrm{d}x$;

(11) $\int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3} - 1)\mathrm{d}x$;

(12) $\int \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(13) $\int \left(2\mathrm{e}^x + \dfrac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$;

(14) $\int \left(\dfrac{3}{1+x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$;

(15) $\int \mathrm{e}^x\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$;

(16) $\int 3^x \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$;

(17) $\int \dfrac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x$;

(18) $\int \sec x(\sec x - \tan x)\mathrm{d}x$;

(19) $\int \cos^2 \dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$;

(20) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1 + \cos 2x}$;

(21) $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\mathrm{d}x$;

(22) $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}\mathrm{d}x$;

(23) $\int \cot^2 x \mathrm{d}x$;

(24) $\int \cos\theta(\tan\theta + \sec\theta)\mathrm{d}\theta$;

(25) $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(26) $\int \dfrac{3x^4 + 2x^2}{x^2 + 1}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 原式 $= -\dfrac{1}{x} + C$.

(2) 原式 $= \int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$.

(3) 原式 $= 2\sqrt{x} + C$.

(4) 原式 $= \int x^{\frac{7}{3}}\mathrm{d}x = \dfrac{3}{10}x^{\frac{10}{3}} + C$.

(5) 原式 $= \int x^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}x = -\dfrac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} + C$.

(6) 原式 $= \int x^{\frac{n}{m}}\mathrm{d}x = \dfrac{m}{m+n}x^{\frac{m+n}{m}} + C$.

(7) 原式 $= \dfrac{5}{4}x^4 + C$.

(8) 原式 $= \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

(9) 原式 $= \sqrt{\dfrac{2h}{g}} + C$.

(10) 原式 $= \int (x^4 + 2x^2 + 1)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{2}{3}x^3 + x + C$.

(11) 原式 $= \int (x^2 + x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} - 1)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C$.

(12) 原式 $= \int \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + x^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} - \dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$.

(13) 原式 $= 2\mathrm{e}^x + 3\ln|x| + C$.

(14) 原式 $= 3\arctan x - 2\arcsin x + C$.

(15) 原式 $= \int \left(\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - 2\sqrt{x} + C$.

(16) 原式 $= \int (3\mathrm{e})^x \mathrm{d}x = \dfrac{(3\mathrm{e})^x}{\ln(3\mathrm{e})} + C = \dfrac{3^x\mathrm{e}^x}{\ln 3 + 1} + C$.

(17) 原式 $=\int\left[2-5\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]\mathrm{d}x=2x-\frac{5}{\ln2-\ln3}\left(\frac{2}{3}\right)^x+C$.

(18) 原式 $=\int(\sec^2x-\sec x\tan x)\mathrm{d}x=\tan x-\sec x+C$.

(19) 原式 $=\int\frac{1}{2}(1+\cos x)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x+C$.

(20) 原式 $=\int\frac{1}{2\cos^2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan x+C$.

(21) 原式 $=\int(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x=\sin x-\cos x+C$.

(22) 原式 $=\int\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{\cos^2x}\right)\mathrm{d}x=-\cot x-\tan x+C$.

(23) 原式 $=\int\csc^2x\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x=-\cot x-x+C$.

(24) 原式 $=\int\sin\theta\mathrm{d}\theta+\int\mathrm{d}\theta=-\cos\theta+\theta+C$.

(25) 原式 $=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=x-\arctan x+C$.

(26) 原式 $=\int3x^2\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=x^3-x+\arctan x+C$.

3 含有未知函数的导数的方程称为微分方程,例如方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$,其中$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$为未知函数的导数,$f(x)$为已知函数.如果函数$y=\varphi(x)$代入微分方程,使微分方程成为恒等式,那么函数$y=\varphi(x)$就称为这个微分方程的解.求下列微分方程满足所给条件的解:

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x-2)^2$, $y\big|_{x=2}=0$; (2) $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{2}{t^3}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=1}=1$, $x\big|_{t=1}=1$.

【解】 (1) $y=\int(x-2)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(x-2)^3+C$,由$y\big|_{x=2}=0$,得$C=0$,于是所求的解为

$$y=\frac{1}{3}(x-2)^3.$$

(2) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\int\frac{2}{t^3}\mathrm{d}t=-\frac{1}{t^2}+C_1$,由$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=1}=1$,得$C_1=2$,故$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{t^2}+2$,于是

$$x=\int\left(-\frac{1}{t^2}+2\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{t}+2t+C_2,$$

由$x\big|_{t=1}=1$,得$C_2=-2$,于是所求的解为$x=\frac{1}{t}+2t-2$.

4 汽车以20m/s的速度行驶,刹车后匀减速行驶了50m停住,求刹车加速度.可执行下列步骤:

(1) 求微分方程$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-k$满足条件$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}=20$及$s\big|_{t=0}=0$的解;

(2) 求使$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0$的$t$值;

(3) 求使$s=50$的k值.

【解】 (1) $\frac{ds}{dt}=\int -k\mathrm{d}t=-kt+C_1$,由$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=20$,得 $C_1=20$,故

$$\frac{ds}{dt}=-kt+20,\quad s=\int(-kt+20)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}kt^2+20t+C_2,$$

由 $s\big|_{t=0}=0$,得 $C_2=0$,于是所求的解为 $s=-\frac{1}{2}kt^2+20t$.

(2) 令$\frac{ds}{dt}=0$,解得 $t=\frac{20}{k}$.

(3) 根据题意,当 $t=\frac{20}{k}$ 时,$s=50$,即 $-\frac{1}{2}k\left(\frac{20}{k}\right)^2+\frac{400}{k}=50$,解得 $k=4$,即得刹车加速度为 $-4\mathrm{m/s^2}$.

5 一曲线通过点$(e^2,3)$,且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数,求该曲线的方程.

【解】 设曲线方程为 $y=f(x)$,由于 $f'(x)=\frac{1}{x}$,因此

$$y=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C.$$

将 $x=e^2$,$y=3$ 代入上式解得 $C=1$,故所求曲线方程为 $y=\ln x+1$.

6 一物体由静止开始运动,经 t 秒后的速度是 $3t^2$ 米/秒.问:

(1) 在 3 秒后物体离开出发点的距离是多少? (2) 此物体走完 360 米需要多少时间?

【解】 设此物体自坐标原点沿横轴正向由静止开始运动,位移函数为 $s=s(t)$,$s(0)=0$,t 秒后 速度为 $3t^2$ 米/秒,即 $s'(t)=3t^2$,则

$$s(t)=\int s'(t)\mathrm{d}t=\int 3t^2\mathrm{d}t=t^3+C.$$

由 $s(0)=0$ 得 $C=0$,于是 $s(t)=t^3$.因此

(1)3 秒后物体离开出发点的距离为 $s(3)=27$(米).

(2) 当 $s(t)=360$(米)时,所需要的时间为 $t=\sqrt[3]{s}=\sqrt[3]{360}\approx 7.11$(秒).

7 证明函数 $\arcsin(2x-1)$,$\arccos(1-2x)$ 和 $2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 都是$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$的原函数.

【证】 $$[\arcsin(2x-1)]'=\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

$$[\arccos(1-2x)]'=-\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(-2)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

$$\left(2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)'=2\frac{1}{1+\frac{x}{1-x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$$

故结论成立.

习题 4-2 换元积分法

1 在下列各式等号右端的空白处填入适当的系数,使等式成立(例如:$\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{d}(4x+$

7)):

(1) $\mathrm{d}x = \_\_\_\_ \mathrm{d}(ax)$;

(2) $\mathrm{d}x = \_\_\_\_ \mathrm{d}(7x-3)$;

(3) $x\mathrm{d}x = \_\_\_\_ \mathrm{d}(x^2)$;

(4) $x\mathrm{d}x = \_\_\_\_ \mathrm{d}(5x^2)$;

(5) $x\mathrm{d}x = \_\_\_\_ \mathrm{d}(1-x^2)$;

(6) $x^3\mathrm{d}x = \_\_\_\_ \mathrm{d}(3x^4-2)$;

(7) $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \_\_\_\_ \mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})$;

(8) $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \_\_\_\_ \mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})$;

(9) $\sin\frac{3}{2}x\mathrm{d}x = \_\_\_\_ \mathrm{d}\left(\cos\frac{3}{2}x\right)$;

(10) $\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \_\_\_\_ \mathrm{d}(5\ln|x|)$;

(11) $\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \_\_\_\_ \mathrm{d}(3-5\ln|x|)$;

(12) $\frac{\mathrm{d}x}{1+9x^2} = \_\_\_\_ \mathrm{d}(\arctan 3x)$;

(13) $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \_\_\_\_ \mathrm{d}(1-\arcsin x)$;

(14) $\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \_\_\_\_ \mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$.

【答】

(1) $\frac{1}{a}$.　(2) $\frac{1}{7}$.　(3) $\frac{1}{2}$.　(4) $\frac{1}{10}$.　(5) $-\frac{1}{2}$.

(6) $\frac{1}{12}$.　(7) $\frac{1}{2}$.　(8) -2.　(9) $-\frac{2}{3}$.　(10) $\frac{1}{5}$.

(11) $-\frac{1}{5}$.　(12) $\frac{1}{3}$.　(13) -1.　(14) -1.

2 计算下列不定积分(其中 a,b,w,φ 均为常数):

(1) $\int \mathrm{e}^{5t}\mathrm{d}t$;

(2) $\int (3-2x)^3\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-2x}$;

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-3x}}$;

(5) $\int (\sin ax - \mathrm{e}^{\frac{x}{b}})\mathrm{d}x$;

(6) $\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$;

(7) $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$;

(8) $\int x\cos(x^2)\mathrm{d}x$;

(9) $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\mathrm{d}x$;

(10) $\int \frac{3x^3}{1-x^4}\mathrm{d}x$;

(11) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$;

(12) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$;

(13) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$;

(14) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$;

(15) $\int \tan^{10}x\sec^2 x\mathrm{d}x$;

(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}$;

(17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$;

(18) $\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(19) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(20) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$;

(21) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\,dx$;

(22) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$;

(23) $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx$;

(24) $\int \cos^3 x dx$;

(25) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)dt$;

(26) $\int \sin 2x\cos 3x dx$;

(27) $\int \cos x\cos\frac{x}{2}dx$;

(28) $\int \sin 5x\sin 7x dx$;

(29) $\int \tan^3 x\sec x dx$;

(30) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

(31) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$;

(32) $\int \frac{x^3}{9+x^2}dx$;

(33) $\int \frac{dx}{2x^2-1}$;

(34) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$;

(35) $\int \frac{x}{x^2-x-2}dx$;

(36) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(a>0)$;

(37) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(38) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$;

(39) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$;

(40) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$;

(41) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

(42) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$;

(43) $\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx$;

(44) $\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}dx$.

【解】 (1) 原式 $=\frac{1}{5}\int e^{5t}d(5t)=\frac{1}{5}e^{5t}+C$.

(2) 原式 $=-\frac{1}{2}\int(3-2x)^3d(3-2x)=-\frac{1}{8}(3-2x)^4+C$.

(3) 原式 $=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-2x}d(1-2x)=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$.

(4) 原式 $=-\frac{1}{3}\int(2-3x)^{-\frac{1}{3}}d(2-3x)=-\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C$.

(5) 原式 $=\frac{1}{a}\int\sin ax d(ax)-b\int e^{\frac{x}{b}}d\left(\frac{x}{b}\right)=-\frac{1}{a}\cos ax-be^{\frac{x}{b}}+C$.

(6) 原式 $=2\int\sin\sqrt{t}d(\sqrt{t})=-2\cos\sqrt{t}+C$.

(7) 原式 $=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$.

(8) 原式 $=\frac{1}{2}\int\cos(x^2)d(x^2)=\frac{1}{2}\sin(x^2)+C$.

(9) 原式 $=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{2\sqrt{2-3x^2}}d(2-3x^2)=-\frac{1}{3}\sqrt{2-3x^2}+C$.

(10) 原式 $= -\dfrac{3}{4}\displaystyle\int \dfrac{1}{1-x^4}d(1-x^4) = -\dfrac{3}{4}\ln|1-x^4| + C.$

(11) 原式 $= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + C.$

(12) 原式 $= -\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int \cos^2(\omega t+\varphi)d[\cos(\omega t+\varphi)] = -\dfrac{1}{3\omega}\cos^3(\omega t+\varphi) + C.$

(13) 原式 $= -\displaystyle\int \cos^{-3}x d(\cos x) = \dfrac{1}{2}\cos^{-2}x + C = \dfrac{1}{2\cos^2 x} + C.$

(14) 原式 $= \displaystyle\int (\sin x - \cos x)^{-\frac{1}{3}}d(\sin x - \cos x) = \dfrac{3}{2}(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C.$

(15) 原式 $= \displaystyle\int \tan^{10}x d(\tan x) = \dfrac{1}{11}\tan^{11}x + C.$

(16) 原式 $= \displaystyle\int \dfrac{1}{\ln\ln x}d(\ln\ln x) = \ln|\ln\ln x| + C.$

(17) 原式 $= \displaystyle\int (\arcsin x)^{-2}d(\arcsin x) = -\dfrac{1}{\arcsin x} + C.$

(18) 原式 $= -\dfrac{1}{2\ln 10}\displaystyle\int 10^{2\arccos x}d(10^{2\arccos x}) = -\dfrac{1}{2\ln 10}10^{2\arccos x} + C.$

(19) 原式 $= -\displaystyle\int \dfrac{1}{\cos\sqrt{1+x^2}}d(\cos\sqrt{1+x^2}) = -\ln\left|\cos\sqrt{1+x^2}\right| + C.$

(20) 原式 $= 2\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}d(\arctan\sqrt{x}) = (\arctan\sqrt{x})^2 + C.$

(21) 原式 $= \displaystyle\int \dfrac{d(x\ln x)}{(x\ln x)^2} = -\dfrac{1}{x\ln x} + C.$

(22) 原式 $= \displaystyle\int \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x}dx = \int\left(\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}\right)dx = -\int \dfrac{1}{\cos x}d(\cos x) + \int \dfrac{1}{\sin x}d(\sin x)$

$= -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| + C = \ln|\tan x| + C.$

(23) 原式 $= \displaystyle\int \ln\tan x d(\ln\tan x) = \dfrac{1}{2}(\ln\tan x)^2 + C.$

(24) 原式 $= \displaystyle\int (1-\sin^2 x)d(\sin x) = \sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x + C.$

(25) 原式 $= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int [1+\cos 2(\omega t+\varphi)]dt = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4\omega}\sin 2(\omega t+\varphi) + C.$

(26) 原式 $= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (\sin 5x - \sin x)dx = -\dfrac{1}{10}\cos 5x + \dfrac{1}{2}\cos x + C.$

(27) 原式 $= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\left(\cos\dfrac{3}{2}x + \cos\dfrac{x}{2}\right)dx = \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{3}{2}x + \sin\dfrac{x}{2} + C.$

(28) 原式 $= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (\cos 2x - \cos 12x)dx = \dfrac{1}{4}\sin 2x - \dfrac{1}{24}\sin 12x + C.$

(29) 原式 $= \displaystyle\int (\sec^2 x - 1)d(\sec x) = \dfrac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C.$

(30) 原式 $= \displaystyle\int \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \dfrac{1}{1+(e^x)^2}d(e^x) = \arctan e^x + C.$

(31) 原式 $= \int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} - \int \frac{x dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}}dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}d(9-4x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2} + C.$$

(32) 原式 $= \int\left(x - \frac{9x}{9+x^2}\right)dx = \int x dx - \frac{9}{2}\int \frac{1}{9+x^2}d(9+x^2)$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}\ln(9+x^2) + C.$$

(33) 原式 $= \int \frac{dx}{(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{2}x-1} - \frac{1}{\sqrt{2}x+1}\right)dx$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{2}x-1}d(\sqrt{2}x-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{2}x+1}d(\sqrt{2}x+1)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right| + C.$$

(34) 原式 $= \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$

(35) 原式 $= \int \frac{x}{(x-2)(x+1)}dx = \int \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= \frac{2}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + C.$$

(36) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \xlongequal{x = a\sin u} \int a^2\sin^2 u du = a^2\int \frac{1-\cos 2u}{2}du$

$$= \frac{a^2}{2}\left(u - \frac{\sin 2u}{2}\right) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + C.$$

(37) 当 $x > 0$ 时，$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{x = \frac{1}{t}} -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C$

$$= -\arcsin\frac{1}{x} + C,$$

当 $x < 0$ 时，$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{x = \frac{1}{t}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{1}{x} + C.$

故可统一写作 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$

(38) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \xlongequal{x = \tan u} \int \cos u du = \sin u + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$

(39) 当 $x > 0$ 时，令 $x = 3\sec u \left(0 \leqslant u < \frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x=-\int 3\tan^2 u\mathrm{d}u=3\int(\sec^2 u-1)\mathrm{d}u=3\tan u-3u+C$$

$$=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C;$$

当 $x<0$ 时,令 $x=3\sec u\left(\frac{\pi}{2}<u\leqslant\pi\right)$,则

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x=-\int 3\tan^2 u\mathrm{d}u=-3\int(\sec^2 u-1)\mathrm{d}u=-3\tan u+3u+C$$

$$=\sqrt{x^2-9}+3\arccos\frac{3}{x}+C'=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{-x}+C'+3\pi,$$

故可统一写作 $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{|x|}+C$.

(40) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}\xlongequal{x=\frac{u^2}{2}}\int\frac{u\mathrm{d}u}{1+u}=u-\ln(1+u)+C=\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C.$

(41) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}\xlongequal{x=\sin t}\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{1+\cos t}=\int\frac{\left(2\cos^2\frac{t}{2}-1\right)\mathrm{d}t}{2\cos^2\frac{t}{2}}=t-\tan\frac{t}{2}+C$

$$=\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C.$$

(42) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}\xlongequal{x=\sin t}\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$,记 $I_1=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$,$I_2=\int\frac{\sin t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$,利用 $I_1+I_2=\int\mathrm{d}t=t+C$,$I_1-I_2=\int\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t}=\ln|\sin t+\cos t|+C$,

求得 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}=\frac{\arcsin x+\ln\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|}{2}+C.$

对积分 $I_1=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$ 也可利用 $\sin t+\cos t=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$,再作换元 $t=u-\frac{\pi}{4}$ 来求得.

(43) 原式 $=\int\frac{x+1-2}{(x+1)^2+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}[(x+1)^2+2]}{(x+1)^2+2}-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

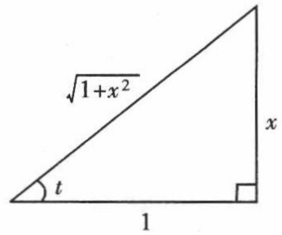
(44) 设 $x=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$,则 $x^2+1=\sec^2 t$,$\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$,于是

原式 $=\int\frac{\tan^3 t+1}{\sec^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\cos^2 t-1}{\cos t}\mathrm{d}(\cos t)+\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}\cos^2 t-\ln\cos t+\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2 t - \ln\cos t + \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C.$$

按 $\tan t = x$ 作辅助三角形(如图),便有



$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

于是 $$\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1+x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

习题4-3 分部积分法

求下列不定积分:

(1) $\int x\sin x dx$; (2) $\int \ln x dx$; (3) $\int \arcsin x dx$;

(4) $\int x e^{-x} dx$; (5) $\int x^2 \ln x dx$; (6) $\int e^{-x}\cos x dx$;

(7) $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx$; (8) $\int x\cos\frac{x}{2}dx$; (9) $\int x^2\arctan x dx$;

(10) $\int x\tan^2 x dx$; (11) $\int x^2\cos x dx$; (12) $\int t e^{-2t}dt$;

(13) $\int \ln^2 x dx$; (14) $\int x\sin x\cos x dx$; (15) $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}dx$;

(16) $\int x\ln(x-1)dx$; (17) $\int (x^2-1)\sin 2x dx$; (18) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$;

(19) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$; (20) $\int \cos\ln x dx$; (21) $\int (\arcsin x)^2 dx$;

(22) $\int e^x\sin^2 x dx$; (23) $\int x\ln^2 x dx$; (24) $\int e^{\sqrt{3x+9}}dx$.

【解】 (1) 原式 $= -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$

(2) 原式 $= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$

(3) 原式 $= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

(4) 原式 $= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$

(5) 原式 $= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$

(6) $\int e^{-x}\cos x dx = e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x dx = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x dx,$

移项整理得 $\int e^{-x}\cos x dx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C.$

(7) $$\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx = -2e^{-2x}\cos\frac{x}{2} - 4\int e^{-2x}\cos\frac{x}{2}dx$$

$$= -2e^{-2x}\cos\frac{x}{2} - 8e^{-2x}\sin\frac{x}{2} - 16\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx,$$

移项整理得 $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx=-\frac{2}{17}e^{-2x}\cos\frac{x}{2}-\frac{8}{17}e^{-2x}\sin\frac{x}{2}+C.$

(8) 原式 $=2x\sin\frac{x}{2}-2\int\sin\frac{x}{2}dx=2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C.$

(9) 原式 $=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$

$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C.$

(10) 原式 $=\int x(\sec^2x-1)dx=-\frac{1}{2}x^2+\int x\sec^2xdx$

$=-\frac{1}{2}x^2+x\tan x-\int\tan xdx=-\frac{1}{2}x^2+x\tan x-\ln|\cos x|+C.$

(11) 原式 $=x^2\sin x-2\int x\sin xdx=x^2\sin x+2x\cos x-2\int\cos xdx$

$=(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C.$

(12) 原式 $=-\frac{1}{2}te^{-2t}+\frac{1}{2}\int e^{-2t}dt=-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+C.$

(13) 原式 $=x\ln^2x-2\int\ln xdx=x\ln^2x-2x\ln x+2\int dx=x(\ln^2x-2\ln x+2)+C.$

(14) 原式 $=\frac{1}{2}\int x\sin2xdx=-\frac{1}{4}x\cos2x+\frac{1}{4}\int\cos2xdx$

$=-\frac{1}{4}x\cos2x+\frac{1}{8}\sin2x+C.$

(15) 原式 $=\frac{1}{2}\int x^2(1+\cos x)dx=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x-\int x\sin xdx$

$=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\sin x+C.$

(16) 原式 $=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x-1}dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$

(17) 原式 $=\frac{1}{2}\cos2x+\int x^2\sin2xdx=\frac{1}{2}\cos2x-\frac{1}{2}x^2\cos2x+\int x\cos2xdx$

$=\frac{1}{2}\cos2x-\frac{1}{2}x^2\cos2x+\frac{1}{2}x\sin2x-\frac{1}{2}\int\sin2xdx$

$=\frac{3}{4}\cos2x-\frac{1}{2}x^2\cos2x+\frac{1}{2}x\sin2x+C.$

(18) 原式 $=-\frac{1}{x}\ln^3x+3\int\frac{\ln^2x}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\ln^3x-\frac{3}{x}\ln^2x+6\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

$=-\frac{1}{x}\ln^3x-\frac{3}{x}\ln^2x-\frac{6}{x}\ln x+6\int\frac{1}{x^2}dx$

$=-\frac{1}{x}\ln^3x-\frac{3}{x}\ln^2x-\frac{6}{x}\ln x-\frac{6}{x}+C.$

(19) 令$\sqrt[3]{x}=t$,则 $x=t^3$, $dx=3t^2dt$,于是

$$\text{原式}=\int e^t 3t^2 dt=3t^2e^t-6\int te^t dt=3t^2e^t-6te^t+6\int e^t dt$$

$$=3t^2e^t-6te^t+6e^t+C=3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C.$$

(20) $\int \cos\ln x dx = x\cos\ln x+\int \sin\ln x dx = x\cos\ln x + x\sin\ln x-\int\cos\ln x dx$,

移项整理得 $\int\cos\ln x dx=\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C.$

(21) $\text{原式}=x(\arcsin x)^2-\int\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x dx$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2\int dx$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$$

(22) $\text{原式}=\frac{1}{2}\int e^x(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}\int e^x\cos 2x dx$, ①

$\int e^x\cos 2x dx=e^x\cos 2x+2\int e^x\sin 2x dx=e^x\cos 2x+2e^x\sin 2x-4\int e^x\sin 2x dx.$

移项整理得 $\int e^x\cos 2x dx=\frac{1}{5}e^x(\cos 2x+2\sin 2x)+C$, ②

将②代入①得 $\text{原式}=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{10}e^x(\cos 2x+2\sin 2x)+C.$

(23) $\text{原式}=\int\ln^2 x d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\int x\ln x dx$

$$=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\int\ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\int\frac{x}{2}dx$$

$$=\frac{x^2}{4}(2\ln^2 x-2\ln x+1)+C.$$

(24) 设$\sqrt{3x+9}=u$,即 $x=\frac{1}{3}(u^2-9)$, $dx=\frac{2}{3}udu$,则

$$\text{原式}=\int\frac{2}{3}ue^u du=\int\frac{2}{3}ud(e^u)=\frac{2}{3}ue^u-\int\frac{2}{3}e^u du$$

$$=\frac{2}{3}ue^u-\frac{2}{3}e^u+C=\frac{2}{3}e^{\sqrt{3x+9}}(\sqrt{3x+9}-1)+C.$$

习题4－4 有理函数的积分

求下列不定积分:

(1) $\int\frac{x^3}{x+3}dx$;

(2) $\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$;

(3) $\int\frac{x+1}{x^2-2x+5}dx$;

(4) $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$;

(5) $\int\frac{3}{x^3+1}dx$;

(6) $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$;

(7) $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$;

(8) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx$;

(9) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$;

(10) $\int \frac{dx}{x^4-1}$;

(11) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$;

(12) $\int \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}dx$;

(13) $\int \frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx$;

(14) $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$;

(15) $\int \frac{dx}{3+\cos x}$;

(16) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$;

(17) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$;

(18) $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$;

(19) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

(20) $\int \frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}+1}dx$;

(21) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$;

(22) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

(23) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$;

(24) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

【解】 (1) 当分子中 x 的最高次数大于或等于分母中 x 的最高次数时,需用除法.

原式 $=\int\left[(x^2-3x+9)-\frac{27}{x+3}\right]dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$.

(2) 因为 $x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$,所以

原式 $=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+5}\right)dx=\ln|x-2|+\ln|x+5|+C=\ln|x^2+3x-10|+C$.

(3) 原式 $=\int\frac{x-1}{(x-1)^2+4}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}dx$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+\arctan\frac{x-1}{2}+C.$$

(4) 原式 $=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

(5) 令 $\frac{3}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$,通分后比较两边的系数可得 $A=1,B=-1,C=2$.

原式 $=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

(6) 原式 $=\int\left[\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]dx$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

(7) 因为$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+3}$,

所以 原式 $= 2\int\frac{dx}{x+2} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+3}$

$$= 2\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C.$$

(8) 因为 $x^5 + x^4 - 8 = (x^3 - x)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x - 8)$

所以 $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} = x^2 + x + 1 + \frac{x^2+x-8}{x(x+1)(x-1)}$.

令$\frac{x^2+x-8}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$,通分后比较两边的系数可得 $A = 8, B = -4$, $C = -3$.

于是 原式 $= \int\left(x^2 + x + 1 + \frac{8}{x} - \frac{4}{x+1} - \frac{3}{x-1}\right)dx$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 8\ln|x| - 4\ln|x+1| - 3\ln|x-1| + C.$$

(9) 原式 $= \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= \int\frac{1}{x}dx - \frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1) - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

(10) 原式 $= \int\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}dx$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

(11) 原式 $= \int\left(-\frac{x}{x^2+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}\right)dx$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

(12) 原式 $= \int\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}dx + \int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2} = \arctan x - \frac{1}{x^2+1} + C.$

(13) 原式 $= \int\left[\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{x^2+x+1}\right]dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} - \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= -\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

(14) 原式 $= \int \frac{dx}{\sin^2 x(3\cot^2 x+4)} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{d\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cot x\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cot x\right)^2+1} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}\cot x}{2} + C.$

(15) 令 $\tan\frac{x}{2} = t$，则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$

原式 $= \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C.$$

(16) 原式 $= \int \frac{dx}{2+2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}\left(\sec^2\frac{x}{2}+1\right)} = \int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\frac{x}{2}+2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C.$$

(17) 令 $\tan\frac{x}{2} = t$，则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$

原式 $= \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| + C.$

(18) 原式 $= \int \frac{dx}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+(1-\cos x)+4}$

$$= \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}\left(2\tan\frac{x}{2}+\tan^2\frac{x}{2}+2\sec^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)}{\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C.$$

(19) 令 $u = \sqrt[3]{x+1}$，即 $x = u^3-1$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}} = \int \frac{3u^2}{1+u}\mathrm{d}u = \int\left(3u-3+\frac{3}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{3}{2}u^2 - 3u + 3\ln|1+u| + C$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right| + C.$$

(20) 原式 $= \int\left(x-\sqrt{x}+1-\frac{2}{\sqrt{x}+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x-\int\frac{4t}{t+1}\mathrm{d}t$

$$= \frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x-4\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x-4\sqrt{x}+4\ln(\sqrt{x}+1)+C.$$

(21) 令 $u=\sqrt{x+1}$,即 $x=u^2-1$,则

$$\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x = \int\frac{u-1}{u+1}\cdot 2u\mathrm{d}u = 2\int\left(u-2+\frac{2}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$= u^2-4u+4\ln|u+1|+C_1$$

$$= x-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C.$$

(22) 令 $u=\sqrt[4]{x}$,即 $x=u^4$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \int\frac{1}{u^2+u}\cdot 4u^3\mathrm{d}u = 4\int\left(u-1+\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$= 2u^2-4u+4\ln|u+1|+C$$

$$= 2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C.$$

(23) **方法** 1° 令 $u=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,即 $x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$,则

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int u\cdot\frac{1+u^2}{1-u^2}\cdot\frac{-4u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u = \int\frac{-4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}\mathrm{d}u$$

$$= \int\left(\frac{2}{1+u^2}-\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$= 2\arctan u+\ln|1-u|-\ln|1+u|+C$$

$$= 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+C.$$

方法 2°

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int\frac{1-x}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin u} \int\frac{1-\sin u}{\sin u}\mathrm{d}u = \int\csc u\mathrm{d}u-\int\mathrm{d}u$$

$$= \ln|\csc u-\cot u|-u+C = \ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|}-\arcsin x+C.$$

(24) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int\frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$, 令 $u=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$,即 $x=\frac{u^3+1}{u^3-1}$,得到

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{u}{\left(\frac{u^3+1}{u^3-1}\right)^2 - 1} \cdot \frac{-6u^2}{(u^3-1)^2}du = -\frac{3}{2}\int du$$

$$= -\frac{3}{2}u + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

习题4－5　积分表的使用

利用积分表计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$；　(2) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$；　(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}$；

(4) $\int \sqrt{2x^2+9}dx$；　(5) $\int \sqrt{3x^2-2}dx$；　(6) $\int e^{2x}\cos x dx$；

(7) $\int x\arcsin \frac{x}{2}dx$；　(8) $\int \frac{1}{(x^2+9)^2}dx$；　(9) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$；

(10) $\int e^{-2x}\sin 3x dx$；　(11) $\int \sin 3x \sin 5x dx$；　(12) $\int \ln^3 x dx$；

(13) $\int \frac{dx}{x^2(1-x)}$；　(14) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$；　(15) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$；

(16) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$；　(17) $\int \frac{x}{(2+3x)^2}dx$；　(18) $\int \cos^6 x dx$；

(19) $\int x^2\sqrt{x^2-2}dx$；　(20) $\int \frac{dx}{2+5\cos x}$；　(21) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-1}}$；

(22) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$；　(23) $\int \frac{x+5}{x^2-2x-1}dx$；　(24) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$；

(25) $\int \frac{x^4}{25+4x^2}dx$.

【解】 (1) 令 $t=2x$，则 $dx=\frac{1}{2}dt$.

原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-3^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-9}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right| + C.$

(2) 原式 $= \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C.$

(3) 原式 $= \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+1}} = \ln\left|(x-2)+\sqrt{x^2-4x+5}\right| + C.$

(4) 原式 $= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sqrt{(\sqrt{2}x)^2+3^2}d(\sqrt{2}x)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}x\sqrt{2x^2+9} + \frac{9}{2}\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+9})\right] + C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{2x^2+9} + \frac{9\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+9}) + C.$$

(5) 原式 $= \frac{1}{\sqrt{3}}\int\sqrt{(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2})^2}\mathrm{d}(\sqrt{3}x)$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x\ \sqrt{3x^2-2}-\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right|\right]+C$$

$$= \frac{x}{2}\ \sqrt{3x^2-2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right|+C.$$

(6) 原式 $= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}(\sin x+2\cos x)+C.$

(7) 原式 $= \left(\frac{x^2}{2}-1\right)\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}+C.$

(8) 原式 $= \frac{1}{18(x^2+9)}+\frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3}+C.$

(9) 原式 $= -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln|\csc x-\cot x|+C.$

(10) 原式 $= \frac{1}{13}\mathrm{e}^{-2x}(-2\sin 3x-3\cos 3x)+C.$

(11) 原式 $= -\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

(12) 原式 $= x(\ln x)^3-3\int(\ln x)^2\mathrm{d}x = x(\ln x)^3-3x(\ln x)^2+6\int\ln x\mathrm{d}x$

$$= x\ln^3 x-3x\ln^2 x+6x\ln x-6x+C.$$

(13) 原式 $= -\frac{1}{x}-\ln\left|\frac{1-x}{x}\right|+C.$

(14) 原式 $= 2\sqrt{x-1}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}-2\arctan\sqrt{x-1}+C.$

(15) 原式 $= \frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$

(16) 原式 $= \arccos\frac{1}{|x|}+C.$

(17) 原式 $= \frac{1}{9}\left(\ln|2+3x|+\frac{2}{2+3x}\right)+C.$

(18) 原式 $= \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x+\frac{5}{6}\int\cos^4 x\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x+\frac{5}{24}\cos^3 x\sin x+\frac{15}{24}\int\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\cos^5 x\sin x+\frac{5}{24}\cos^3 x\sin x+\frac{5}{16}\cos x\sin x+\frac{5}{16}x+C.$$

(19) 原式 $= \frac{x}{4}(x^2-1)\sqrt{x^2-2}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+C.$

(20) 原式 $= \frac{\sqrt{21}}{21}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{7}{3}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{7}{3}}}\right|+C.$

(21) 原式 $= \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x} + \int \dfrac{dx}{x\sqrt{2x-1}} = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x} + 2\arctan\sqrt{2x-1} + C.$

(22) 原式 $= \int\sqrt{\dfrac{x-1}{-1-x}}dx = (x+1)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} - 2\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} + C.$

(23) 原式 $= \dfrac{1}{2}\int\dfrac{2x-2+12}{x^2-2x-1}dx = \dfrac{1}{2}\ln|x^2-2x-1| + 6\int\dfrac{1}{x^2-2x-1}dx$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1| + \frac{6}{\sqrt{8}}\ln\left|\frac{2x-2-\sqrt{8}}{2x-2+\sqrt{8}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1| + \frac{3\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}\right| + C.$$

(24) 原式 $= -\sqrt{1+x-x^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.$

(25) 原式 $= \int\left(\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{25}{16}\right)dx + \dfrac{625}{16}\int\dfrac{dx}{4x^2+25}$

$$= \frac{1}{12}x^3 - \frac{25}{16}x + \frac{625}{32}\int\frac{d(2x)}{(2x)^2+5^2} = \frac{1}{12}x^3 - \frac{25}{16}x + \frac{25}{32}\arctan\frac{2x}{5} + C.$$

总习题四

1 填空:

(1) $\int x^3e^x dx =$ ________.

(2) $\int\dfrac{x+5}{x^2-6x+13}dx =$ ________.

【解】 (1) $\int x^3e^xdx = \int x^3d(e^x) = x^3e^x - 3\int x^2d(e^x) = x^3e^x - 3\left[x^2e^x - \int 2xd(e^x)\right]$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\left(xe^x - \int e^xdx\right) = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + c,$$

因此,应填 $x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C$.

(2) $\int\dfrac{x+5}{x^2-6x+13}dx = \dfrac{1}{2}\int\dfrac{(x^2-6x+13)'}{x^2-6x+13}dx + \int\dfrac{8}{x^2-6x+13}dx$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + \int\frac{8}{(x-3)^2+4}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + 4\arctan\frac{x-3}{2} + C,$$

因此,应填 $\dfrac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + 4\arctan\dfrac{x-3}{2} + C$.

2 以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

(1) 已知 $f'(x) = \dfrac{1}{x(1+2\ln x)}$,且 $f(1) = 1$,则 $f(x)$ 等于( ).

(A) $\ln(1+2\ln x)+1$ (B) $\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+1$

(C) $\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+\frac{1}{2}$ (D) $2\ln(1+2\ln x)+1$

(2) 在下列等式中,正确的结果是( ).

(A) $\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$ (B) $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$

(C) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$ (D) $\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$

【解】 (1) 由微积分基本定理,有

$$f(x)-f(1)=\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{1}{t(1+2\ln t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^x\frac{1}{1+2\ln t}\mathrm{d}(1+2\ln t)$$
$$=\frac{1}{2}[\ln(1+2\ln t)]_1^x=\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x).$$

根据条件 $f(1)=1$,得 $f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+1$. 故选(B).

(2) 根据微分运算与积分运算的关系,可知

$$\int \mathrm{d}f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)+C,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x),$$
$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x=f(x)\,\mathrm{d}x,$$

故选(C).

3 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,求 $\int x^3f'(x)\,\mathrm{d}x$.

【解】 根据条件,有 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{x}+C$,即 $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$,因此

$$\int x^3f'(x)\,\mathrm{d}x=x^3f(x)-\int 3x^2f(x)\,\mathrm{d}x=x(x\cos x-\sin x)-3\int x^2\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$=x^2\cos x-x\sin x-3\left(x^2\cdot\frac{\sin x}{x}-\int\frac{\sin x}{x}\cdot 2x\,\mathrm{d}x\right)$$
$$=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C.$$

4 求下列不定积分(其中 a、b 为常数):

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$. (2) $\int\frac{x}{(1-x)^3}\mathrm{d}x$. (3) $\int\frac{x^2}{a^6-x^6}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

(4) $\int\frac{1+\cos x}{x+\sin x}\mathrm{d}x$. (5) $\int\frac{\ln\ln x}{x}\mathrm{d}x$. (6) $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4x}\mathrm{d}x$.

(7) $\int\tan^4x\,\mathrm{d}x$. (8) $\int\sin x\sin 2x\sin 3x\,\mathrm{d}x$. (9) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}$.

(10) $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x\ (a>0)$. (11) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}$. (12) $\int x\cos^2x\,\mathrm{d}x$.

(13) $\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$.　　(14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}}$.　　(15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{5/2}}$.　　(17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.　　(18) $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

(19) $\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$.　　(20) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$.　　(21) $\int \arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

(22) $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\mathrm{d}x$.　　(23) $\int \frac{x^3}{(1+x^8)^2}\mathrm{d}x$.　　(24) $\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}\mathrm{d}x$.

(25) $\int \frac{\mathrm{d}x}{16-x^4}$.　　(26) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.　　(27) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

(28) $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.　　(29) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$.　　(30) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+e^x)^2}$.

(31) $\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}\mathrm{d}x$.　　(32) $\int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}\mathrm{d}x$.　　(33) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$.

(34) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.　　(35) $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x$.　　(36) $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

(37) $\int \frac{\cot x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.　　(38) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos x}$.　　(39) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$.

(40) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x-e^{-x}}=\int \frac{e^x\mathrm{d}x}{e^{2x}-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^x+1}\right)\mathrm{d}(e^x)=\frac{1}{2}\ln\frac{|e^x-1|}{e^x+1}+C$.

(2) $\int \frac{x}{(1-x)^3}\mathrm{d}x \xlongequal{u=1-x} \int\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^3}\right)\mathrm{d}u=-\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}+C$

$$=-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2(1-x)^2}+C.$$

(3) $\int \frac{x^2}{a^6-x^6}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(x^3)}{3(a^6-x^6)}\xlongequal{u=x^3}\int \frac{\mathrm{d}u}{3(a^6-u^2)}=\frac{1}{6a^3}\int\left(\frac{1}{a^3+u}+\frac{1}{a^3-u}\right)\mathrm{d}u$

$$=\frac{1}{6a^3}\ln\left|\frac{a^3+u}{a^3-u}\right|+C=\frac{1}{6a^3}\ln\left|\frac{a^3+x^3}{x^3-x^3}\right|+C.$$

(4) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(x+\sin x)}{x+\sin x}=\ln|x+\sin x|+C$.

(5) $\int \frac{\ln\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int \ln\ln x\mathrm{d}(\ln x)=\ln x\ln\ln x-\int \ln x\cdot\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\ln x(\ln\ln x-1)+C$.

(6) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\sin^2 x)}{1+\sin^4 x}=\frac{\arctan(\sin^2 x)}{2}+C$.

(7) $\int \tan^4 x\mathrm{d}x=\int \tan^2 x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\int \tan^2 x\mathrm{d}(\tan x)-\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C.$$

(8) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x\mathrm{d}x=\int \frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)\sin 3x\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \cos x\sin 3x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 3x\sin 3x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\int (\sin 2x + \sin 4x)\mathrm{d}x - \frac{1}{12}\sin^2 3x$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{12}\sin^2 3x + C.$$

(9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)} \xlongequal{x=\frac{1}{u}} \int \frac{-u^5\mathrm{d}u}{1+4u^6} = -\frac{1}{24}\int \frac{\mathrm{d}(1+4u^6)}{1+4u^6}$

$$= -\frac{1}{24}\ln(1+4u^6) + C = -\frac{1}{24}\ln\frac{x^6+4}{x^6} + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{24}\ln(x^6+4) + C.$$

(10) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x = \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = a\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$= a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

(11) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} \xlongequal{x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sec u} \int \sec u\mathrm{d}u$

$$= \ln|\sec u + \tan u| + C = \ln\left|2x+1+2\sqrt{x(1+x)}\right| + C.$$

(12) $\displaystyle\int x\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int x\mathrm{d}(2x+\sin 2x)$

$$= \frac{x(2x+\sin 2x)}{4} - \frac{1}{4}\int (2x+\sin 2x)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4} + \frac{x\sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + C.$$

(13) 当 $a \neq 0$ 时，

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \cos bx\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax}) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int \sin bx\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax})$$

$$= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x.$$

因此有 $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + C.$

当 $a = 0$ 时，$\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\sin bx}{b} + C, & b \neq 0, \\ x + C, & b = 0. \end{cases}$

(14) 令 $u = \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$，即作换元 $x = \ln(u^2-1)$，得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}} = \int \frac{2\mathrm{d}u}{u^2-1} = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1} + C.$$

$$(15)\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\xlongequal{x=\frac{1}{u}}-\int\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=\sqrt{1-u^2}+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C,$$

易知当 $x<0$ 和 $x>0$ 时的结果相同.

$$(16)\int\frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{5/2}}\xlongequal{x=a\sin u}\frac{1}{a^4}\int\sec^4u\mathrm{d}u=\frac{1}{a^4}\int(\tan^2u+1)\mathrm{d}(\tan u)$$

$$=\frac{\tan^3u}{3a^4}+\frac{\tan u}{a^4}+C=\frac{1}{3a^4}\left[\frac{x^3}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}+\frac{3x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]+C.$$

$$(17)\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}\xlongequal{x=\frac{1}{u}}\int\frac{-u^3\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=-\int\left(u\sqrt{1+u^2}-\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{3}(1+u^2)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{1+u^2}+C=-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}C,$$

易知当 $x<0$ 和 $x>0$ 时结果相同.

$$(18)\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x\xlongequal{x=u^2}\int2u^2\sin u\mathrm{d}u=-\int2u^2\mathrm{d}(\cos u)=-2u^2\cos u+\int4u\cos u\mathrm{d}u$$

$$=-2u^2\cos u+\int4u\mathrm{d}(\sin u)=-2u^2\cos u+4u\sin u-\int4\sin u\mathrm{d}u$$

$$=-2u^2\cos u+4u\sin u+4\cos u+C$$

$$=-2x\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+4\cos\sqrt{x}+C.$$

$$(19)\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=x\ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C.$$

$$(20)\int\frac{\sin^2x}{\cos^3x}\mathrm{d}x=\int\tan^2x\sec x\mathrm{d}x=\int\sec^3x\mathrm{d}x-\int\sec x\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\int\sec x\mathrm{d}x\right)-\int\sec x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec x\tan x-\frac{1}{2}\int\sec x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\sec x\tan x-\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C.$$

$$(21)\int\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}(1+x)=(1+x)\arctan\sqrt{x}-\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$=(1+x)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C.$$

$$(22)\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\pm\sqrt{2}\int\csc\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=\pm\sqrt{2}\ln\left|\csc\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}\right|+C,$$

上式当 $\cos\frac{x}{2}>0$ 时取正,当 $\cos\frac{x}{2}<0$ 时取负.

当 $\cos\frac{x}{2}>0$ 时,$\ln\left|\csc\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}\right|=\ln\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|-\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right)$;

当 $\cos\frac{x}{2}<0$ 时，$\ln\left|\csc\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}\right| = \ln\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = \ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|+\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right)$

$$= -\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|-\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right),$$

因此有 $\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx = \sqrt{2}\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|-\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right)+C.$

(23) $\int\frac{x^3}{(1+x^8)^2}dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{(1+x^8)^2}d(x^4) \xlongequal{u=x^4} \frac{1}{4}\int\frac{1}{(1+u^2)^2}du$

$$\xlongequal{u=\tan t} \frac{1}{4}\int\cos^2 t dt = \frac{2t+\sin 2t}{16}+C$$

$$= \frac{\arctan x^4}{8}+\frac{x^4}{8(1+x^8)}+C.$$

(24) $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^3+2}dx \xlongequal{u=x^4} \frac{1}{4}\int\frac{u^2}{u^2+3u+2}du = \frac{1}{4}\int\left(1+\frac{1}{u+1}-\frac{4}{u+2}\right)du$

$$= \frac{1}{4}u+\frac{1}{4}\ln|1+u|-\ln|2+u|+C$$

$$= \frac{x^4}{4}+\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{2+x^4}+C.$$

(25) $\int\frac{dx}{16-x^4} = \int\frac{1}{(2-x)(2+x)(4+x^2)}dx$

$$= \int\left[\frac{1}{32(2-x)}+\frac{1}{32(2+x)}+\frac{1}{8(4+x^2)}\right]dx$$

$$= \frac{1}{32}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+\frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2}+C.$$

(26) $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int\frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}dx = -\int\frac{1}{\cos^2 x}d(\cos x)-\int(\sec^2 x-1)dx$

$$= \sec x-\tan x+x+C.$$

(27) $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx = \int\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx+\int\tan\frac{x}{2}dx = \int x d\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\tan\frac{x}{2}dx$

$$= x\tan\frac{x}{2}+C.$$

(28) $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx = \int xe^{\sin x}\cos x dx-\int e^{\sin x}\tan x\sec x dx$

$$= \int x d(e^{\sin x})-\int e^{\sin x}d(\sec x)$$

$$= xe^{\sin x}-\int e^{\sin x}dx-\left(\sec x e^{\sin x}-\int e^{\sin x}dx\right)$$

$$= (x-\sec x)e^{\sin x}+C.$$

(29) $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx \xlongequal{x=u^6} \int\frac{6}{u(u+1)}du = 6\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du$

$$= 6\ln\left|\frac{u}{1+u}\right| + C = \ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6} + C.$$

(30) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \xlongequal{x=\ln u} \int\frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)^2} = \int\left[\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2}\right]\mathrm{d}u$

$$= \ln u - \ln(1+u) + \frac{1}{1+u} + C = x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + C.$$

(31) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{4x}-\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}-1+\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2+1}$

$$= \arctan(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) + C.$$

(32) $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\mathrm{d}x = -\int x\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right) = -\frac{x}{\mathrm{e}^x+1} + \int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$

$$= -\frac{x}{\mathrm{e}^x+1} + \int\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}} = -\frac{x}{\mathrm{e}^x+1} - \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) + C.$$

(33) $\displaystyle\int\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - \int\frac{2x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - \int 2\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C.$$

(34) $\displaystyle\int\frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{1}{u}} \int\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u = -\int\ln u\mathrm{d}[(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}]$

$$= -\frac{\ln u}{\sqrt{1+u^2}} + \int\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

(35) $\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin u} \int u\cos^2 u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int u(1+\cos 2u)\mathrm{d}u$

$$= \frac{1}{4}\int u\mathrm{d}(2u+\sin 2u)$$

$$= \frac{u(2u+\sin 2u)}{4} - \frac{1}{4}\int(2u+\sin 2u)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{u^2}{4} + \frac{u}{4}\sin 2u - \frac{\sin^2 u}{4} + C$$

$$= \frac{(\arcsin x)^2}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{x^2}{4} + C.$$

(36) $\displaystyle\int\frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\cos u} -\int u\cos^3 u\mathrm{d}u = -\int u\mathrm{d}\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right)$

$$= -u\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right) + \int\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right)\mathrm{d}u$$

$$= -u\left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u\right) - \frac{1}{3}\int(2+\cos^2 u)\mathrm{d}(\cos u)$$

$$= -u\left(\sin u-\frac{1}{3}\sin^3 u\right)-\frac{2}{3}\cos u-\frac{1}{9}\cos^3 u+C$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(2+x^2)\arccos x-\frac{1}{9}x(6+x^2)+C.$$

(37) $\displaystyle\int\frac{\cot x}{1+\sin x}dx=\int\frac{\cos x}{\sin x(1+\sin x)}dx=\int\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{1+\sin x}\right)d(\sin x)$

$$=\ln\left|\frac{\sin x}{1+\sin x}\right|+C.$$

(38) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}=-\int\cot x\sec^2 x\,d(\cot x)\xlongequal{u=\cot x}-\int u\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du$

$$=-\frac{u^2}{2}-\ln|u|+C=-\frac{\cot^2 x}{2}-\ln|\cot x|+C.$$

(39) $\displaystyle\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{d(\cos x)}{(2+\cos x)(\cos^2 x-1)}\xlongequal{u=\cos x}\int\frac{du}{(2+u)(u^2-1)}$

$$=\int\left[\frac{1}{6(u-1)}-\frac{1}{2(u+1)}+\frac{1}{3(u+2)}\right]du$$

$$=\frac{1}{6}\ln|u-1|-\frac{1}{2}\ln|u+1|+\frac{1}{3}\ln|u+2|+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln(1-\cos x)-\frac{1}{2}\ln(1+\cos x)+\frac{1}{3}\ln(2+\cos x)+C.$$

(40) $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx\xlongequal{u=x+\frac{\pi}{4}}\int\frac{2\sin^2 u-1}{2\sqrt{2}\sin u}du$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\sin u\,du-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\csc u\,du$$

$$=-\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

考研试题选解

1 设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,计算 $\int f(x)\,dx$.

【分析】 本题的关键是求出$f(x)$的一般表达式.在积分中,若能充分利用凑微分和初等方法可以减少不少工作量.

【解法一】 设 $\ln x=t$,则 $x=e^t$,$f(t)=\dfrac{\ln(1+e^t)}{e^t}$.于是

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx=\int\ln(1+e^x)\,d(-e^{-x})$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\frac{1}{1+e^x}dx=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+x-\ln(1+e^x)+C$$

$$= x - (1 + e^{-x})\ln(1 + e^{x}) + C.$$

【解法二】 $\int f(x)\,dx \xlongequal{x = \ln t} \int f(\ln t)\frac{dt}{t} = \int \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt = \int \ln(1+t)\,d\left(-\frac{1}{t}\right)$

$$= -\frac{\ln(1+t)}{t} + \int \frac{1}{t(1+t)}dt = -\frac{\ln(1+t)}{t} + \int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= -\frac{\ln(1+t)}{t} + \ln t - \ln(1+t) + C = x - (e^{-x} + 1)\ln(1+e^{x}) + C.$$

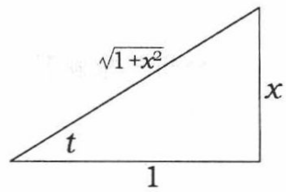
2 求 $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

【解】 设 $x = \tan t\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$,则 $dx = \sec^2 t\,dt$. 于是

$$原式 = \int \frac{dt}{\cos t(2\tan^2 t + 1)} = \int \frac{\cos t\,dt}{2\sin^2 t + \cos^2 t}$$

$$= \int \frac{d\sin t}{1 + \sin^2 t} = \arctan(\sin t) + C$$

$$\xlongequal[见右图]{变量还原} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C.$$



第 2 题图

3 计算不定积分 $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.

【解法一】 $原式 \xlongequal[\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)]{x = \tan t} \int \frac{e^t \tan t}{(1+\tan^2 t)^{3/2}}\sec^2 t\,dt = \int e^t \sin t\,dt.$

又由 $\int e^t \sin t\,dt = \int \sin t\,de^t = e^t\sin t - \int e^t\cos t\,dt = e^t \sin t - \int \cos t\,de^t$

$$= e^t\sin t - e^t\cos t - \int e^t \sin t\,dt,$$

解得 $\int e^t \sin t\,dt = \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + C.$

故变量还原得

$$原式 = \frac{1}{2}e^{\arctan x}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$$

【解法二】 $原式 = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}d\left(e^{\arctan x}\right) = \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$

$$= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d\left(e^{\arctan x}\right)$$

$$= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx,$$

由此解得 $原式 = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$

4 求 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$.

【解】 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx = -\int \arcsin e^x\,de^{-x} = -e^{-x}\arcsin e^x + \int e^{-x}\frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

$$= -e^{-x}\arcsin e^{x} - \int \frac{\mathrm{d}e^{-x}}{\sqrt{(e^{-x})^2-1}}$$

$$= -e^{-x}\arcsin e^{x} - \ln\left| e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}-1} \right| + C .$$

【评注】 用了积分公式 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2-a^2} \right| + C$.

5 计算不定积分$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\,(x>0)$.

【分析与求解】 先作变量替换,然后分部积分. 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$,解得 $x=\frac{1}{t^2-1}\Rightarrow$

$$J=\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x = \int \ln(1+t)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t .$$

再用分解法求

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2-1)(t+1)} &= -\frac{1}{2}\int \frac{(t-1)-(t+1)}{(t-1)(t+1)^2}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2} + \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{t+1} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C,\end{aligned}$$

代入上式得 $J=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1} + C .$

变量还原$\left(t=\sqrt{\frac{1+x}{x}},\ t^2-1=\frac{1}{x},\ \frac{1}{t+1}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}=x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right),\ \frac{t-1}{t+1}=\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1}=\right.$

$\left. x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1\right)^2 = \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^2\right)$

$\Rightarrow\ J = x\ln\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) - \frac{1}{2}x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1\right) + C$, C 为 $\forall$ 常数.

【评注】 本题是不定积分计算题,主要考查换元积分法、分部积分法和有理函数积分法等. 本题既可以先换元后分部积分(如本题的解法),也可以先分部积分再换元(留给读者自己完成).

6 求 $\int \frac{\arctan e^{x}}{e^{2x}}\mathrm{d}x$.

【解】 原式 $= -\frac{1}{2}\int \arctan e^{x}\,\mathrm{d}(e^{-2x}) = -\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\arctan e^{x} - \int\frac{\mathrm{d}e^{x}}{e^{2x}(1+e^{2x})}\right]$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^{x} - \int\frac{\mathrm{d}e^{x}}{e^{2x}} + \int\frac{\mathrm{d}e^{x}}{1+e^{2x}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^{x} + e^{-x} + \arctan e^{x}\right) + C .$$

7 已知$f'(e^{x}) = xe^{-x}$,且$f(1)=0$,则$f(x)=$ ________.

【分析一】 令 $t = e^x \Rightarrow f'(t) = \dfrac{\ln t}{t} \Rightarrow$

$$f(t) = f(1) + \int_1^t f'(s)\mathrm{d}s = \int_1^t \frac{\ln s}{s}\mathrm{d}s = \int_1^t \ln s \mathrm{d}(\ln s) = \frac{1}{2}\ln^2 t.$$

因此 $$f(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x.$$

【分析二】 由于 $f'(e^x) = xe^{-x}$,所以 $[f(e^x)]'_x = e^x f'(e^x) = x$,从而

$$f(e^x) = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

令 $e^x = t$,便得 $f(t) = \dfrac{1}{2}(\ln t)^2 + C$,故 $f(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C$,根据 $f(1) = 0$ 知 $C = 0$,则

$$f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

8 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

【解】 令 $\sqrt{x} = t$ 作换元可得

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= 2\int \arcsin t \mathrm{d}t = 2\left[t\arcsin t - \int t\mathrm{d}(\arcsin t)\right] \\ &= 2\left(t\arcsin t - \int \frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\right) = 2(t\arcsin t + \sqrt{1-t^2}) + C_1 \\ &= 2(\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) + C_1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \int \frac{2\ln t}{t}\mathrm{d}(t^2) = 4\int \ln t\mathrm{d}t = 4\left[t\ln t - \int t\mathrm{d}(\ln t)\right] = 4\left(t\ln t - \int \mathrm{d}t\right) \\ &= 4(t\ln t - t) + C_2 = 4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - \sqrt{x}) + C_2 = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C_2.\end{aligned}$$

故 $$\int \frac{\arcsin\sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C,$$

其中 C 是任意常数.

9 设 $f(\sin^2 x) = \dfrac{x}{\sin x}$,求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

【分析】 本题有两种思路求解:一种是利用 $f(\sin^2 x) = \dfrac{x}{\sin x}$ 先求出 $f(x)$,代入 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$ 再求此积分;另一种思路是在积分 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$ 中令 $x = \sin^2 t$,再将 $f(\sin^2 x) = \dfrac{x}{\sin x}$ 代入该积分求解.

【解法一】 由题设的积分知 $x \in [0,1) \subset \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$,于是令 $u = \sin^2 x$,则有 $\sin x = \sqrt{u}$ $\Rightarrow x = \arcsin\sqrt{u}$, $f(x) = \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,于是

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x = -2\int \arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}\sqrt{1-x}$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\int\sqrt{1-x}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$$

【解法二】 因 $0 \leqslant x < 1$,于是可令 $x = \sin^2 t$,且 $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$,故

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\,\mathrm{d}x = \int\frac{\sin t}{\cos t}f(\sin^2 t)2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = 2\int t\sin t\,\mathrm{d}t = -2t\cos t + 2\int\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= -2t\cos t + 2\sin t + C = -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$$

第五章 定积分

习题 5－1 定积分的概念与性质

1 利用定积分定义计算由抛物线 $y = x^2 + 1$，两直线 $x = a, x = b\ (b > a)$ 及 x 轴所围成的图形的面积.

【解】 因为 $y = x^2 + 1$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，而连续函数是可积的，所以积分与区间 $[a,b]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关. 因此，不妨把区间 $[a,b]$ n 等分，分点为 $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}(i = 1,2,\cdots,n-1)$；每个小区间长度为 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}(i = 1,2,\cdots n)$；取 $\xi_i = x_i\ (i = 1,2,\cdots,n)$，于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}\left\{\left[a + \frac{i(b-a)}{n}\right]^2 + 1\right\}\cdot\frac{b-a}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[a + \frac{i(b-a)}{n}\right]^2 \cdot \frac{b-a}{n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left[a^2n^2 + 2an(b-a)i + (b-a)^2 i^2\right] + b - a \\ &= a^2(b-a) + \frac{a(b-a)^2(n+1)n^2}{n^3} + \frac{(b-a)^3 n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + b - a.\end{aligned}$$

因此 $\int_a^b (x^2+1)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[a^2(b-a) + \frac{a(b-a)^2(n+1)n^2}{n^3} + \frac{(b-a)^3 n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + b - a\right]$$

$$= \frac{1}{3}(b^3 - a^3) + b - a.$$

故所求图形的面积为 $\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + b - a$（平方单位）.

2 利用定积分定义计算下列积分：

(1) $\int_a^b x\mathrm{d}x\ (a < b)$； (2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 将区间 $[a,b]$ n 等分，分点为 $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, i = 1,2,\cdots,n-1$；记每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 长度为 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$，取 $\xi_i = x_i, i = 1,2,\cdots,n$，则得和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left[a + \frac{i}{n}(b-a)\right]\cdot\frac{b-a}{n} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2 n(n+1)}{2n^2}$$

由定积分定义得

$$\int_a^b x\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left[a(b-a) + \frac{(b-a)^2 n(n+1)}{2n^2}\right] = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

(2) 将区间$[0,1]$ n 等分,分点为 $x_i = \frac{i}{n}(i = 1,2,\cdots,n-1)$,记每个小区间长度 $\Delta x_i = \frac{1}{n}$,取 $\xi_i = x_i(i = 1,2,\cdots,n)$,则和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}$.

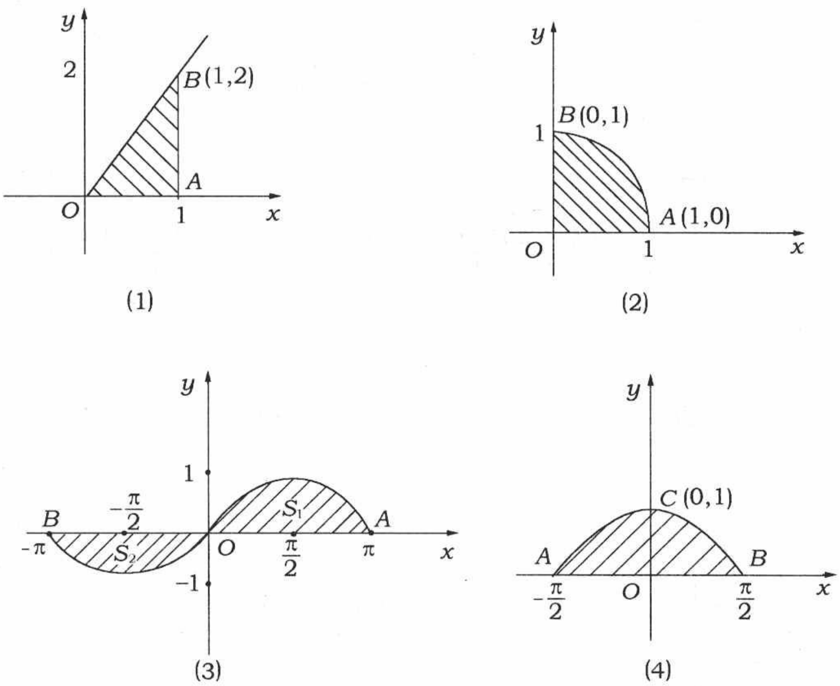
$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{i}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\frac{n}{n}}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}(1-\mathrm{e}^{\frac{n}{n}})}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}(\mathrm{e}-1)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}(\mathrm{e}-1)}{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}-1.$$

3 利用定积分的几何意义,证明下列等式:

(1) $\int_0^1 2x\mathrm{d}x = 1$; (2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x = 0$; (4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x$.



第 3 题图

【证】 (1) 定积分$\int_0^1 2x\mathrm{d}x$可看做 $y = f(x) = 2x$ 及 $x = 0, x = 1, x$ 轴所围成的面积 $S_{\triangle OAB}$(如图(1)),而 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot AB = \frac{1}{2}\times 1\times 2 = 1$. 因此$\int_0^1 2x\mathrm{d}x = S_{\triangle OAB} = 1$.

(2) 定积分可看做 $y = \sqrt{1-x^2}$ 及 $x = 0, x = 1, x$ 轴所围成的扇形面积 S_{OAB}(如图(2)),即单位圆面积的$\frac{1}{4}$,于是

$S_{OAB} = \frac{1}{4}\pi OA^2 = \frac{1}{4}\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}$,故 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = S_{OAB} = \frac{\pi}{4}$.

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$ 表示如图(3) 面积 S_1 与面积 S_2 的相反数之和,而 $S_1 = S_2$,因此

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = S_1 + (-S_2) = S_1 - S_1 = 0.$$

(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$ 表示如图(4) 所示阴影面积 S_{OACB},而 $S_{OACB} = 2S_{OCB}$,S_{OCB} 可看作 $y = \cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的定积分,因此,$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x = S_{OACB} = 2S_{OCB} = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$.

4 利用定积分的几何意义,求下列积分:

(1) $\int_0^t x\mathrm{d}x(t>0)$;　　(2) $\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 根据定积分的几何意义,$\int_0^t x\mathrm{d}x$ 表示的是由直线 $y = x$,$x = t$ 以及 x 轴所围成的直角三角形面积,该直角三角形的两条直角边的长均为 t,因此面积为$\frac{t^2}{2}$,故有$\int_0^t x\mathrm{d}x = \frac{t^2}{2}$.

(2) 根据定积分的几何意义,$\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x$ 表示的是由直线 $y = \frac{x}{2}+3$,$x = -2$,$x = 4$ 以及 x 轴所围成的梯形的面积,该梯形的两底长分别为$\frac{-2}{2}+3 = 2$ 和$\frac{4}{2}+3 = 5$,梯形的高为 $4-(-2) = 6$,因此面积为 21,故有$\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x = 21$.

(3) 根据定积分的几何意义,$\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x$ 表示的是由直线 $y = |x|$,$x = -1$,$x = 2$ 以及 x 轴所围成的图形的面积,该图形由两个等腰直角三角形组成,分别由直线 $y = -x$,$x = -1$ 和 x 轴所围成,其直角边长 1,面积为$\frac{1}{2}$;由直线 $y = x$,$x = 2$ 和 x 轴所围成,其直角边长为 2,面积为 2. 因此$\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$.

(4) 根据定积分的几何意义,$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$ 表示的是由上半圆周 $y = \sqrt{9-x^2}$ 以及 x 轴所围成的半圆的面积,因此有$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\pi$.

5 设 $a < b$,问 a、b 取什么值时,积分$\int_a^b(x-x^2)\mathrm{d}x$ 取得最大值?

【解】 根据定积分几何意义,$\int_a^b(x-x^2)\mathrm{d}x$ 表示的是由 $y = x - x^2$,$x = a$,$x = b$,以及 x 轴所围成的图形在 x 轴上方部分的面积减去 x 轴下方部分面积. 因此如果下方部分面积为 0,上方部分面积为最大时,$\int_a^b(x-x^2)\mathrm{d}x$ 的值最大,即当 $a = 0$,$b = 1$ 时,积分$\int_a^b(x-x^2)\mathrm{d}x$ 取得最大值.

6 已知 $\ln2 = \int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$,试用抛物线法公式(6) 求出 ln2 的近似值(取 $n = 10$,计算时取

4 位小数).

【解】 计算 y_i 并列表

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
y_i	1.0000	0.9091	0.8333	0.7692	0.7143	0.6667	0.6250	0.5882	0.5556	0.5263	0.5000

按抛物线法公式(6),求得

$$s = \frac{1}{30}[(y_0 + y_{10}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)]$$
$$\approx 0.6931.$$

7 设 $\int_{-1}^{1} 3f(x)\mathrm{d}x = 18, \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 4, \int_{-1}^{3} g(x)\mathrm{d}x = 3$. 求

(1) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$; (2) $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{3}^{-1} g(x)\mathrm{d}x$; (4) $\int_{-1}^{3} \frac{1}{5}[4f(x) + 3g(x)]\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} 3f(x)\mathrm{d}x = 6$.

(2) $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -2$.

(3) $\int_{3}^{-1} g(x)\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{3} g(x)\mathrm{d}x = -3$.

(4) $\int_{-1}^{3} \frac{1}{5}[4f(x) + 3g(x)]\mathrm{d}x = \frac{4}{5}\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x + \frac{3}{5}\int_{-1}^{3} g(x)\mathrm{d}x = 5$.

8 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力. 已知闸门上水的压强 p(单位面积上的压力大小)与水深 h 存在函数关系,且有 $p = 9.8h$(千牛/米^2). 若闸门高 $H = 3$ 米,宽 $L = 2$ 米. 求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力 P.

【解】 依题意得所求水压力 $P = \int_0^H Lp\mathrm{d}h = \int_0^3 2 \times 9.8h\mathrm{d}h$.

即可看做函数 $P(h) = 2 \times 9.8h$ 在区间 $[0,H]$ $(H = 3)$ 上的定积分. 不妨将 $[0,H]$ n 等分,分点为 $h_i = \frac{i}{n}H, i = 1,2,\cdots,n-1$,每个小区间长度 $\Delta h_i = \frac{H}{n}$,且取 $\xi_i = h_i, i = 1,2,\cdots,n$,于是和式

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i)\Delta h_i = \sum_{i=1}^{n}\left(2 \times 9.8 \times \frac{i}{n}H \times \frac{H}{n}\right) = 9.8H^2 \times \frac{n(n+1)}{n^2},$$

$$P = \int_0^3 2 \times 9.8h\mathrm{d}h = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} P(h_i)\Delta h_i = \lim_{n\to\infty}\left[9.8H^2 \times \frac{n(n+1)}{n^2}\right]$$
$$= 9.8H^2 = 9.8 \times 3^2 = 88.2.$$

故所求水压力 P 为 88.2 千牛.

9 证明定积分性质:

(1) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k 是常数); (2) $\int_a^b 1 \cdot \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$.

【证】 (1) 任取分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,记 n 个小区间长度 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,\cdots,n,\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$,在 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i,i=1,2,\cdots,n)$ 作和

$$S=\sum_{i=1}^{n}kf(\xi_i)\Delta x_i=k\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i .$$

则
$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}kf(\xi_i)\Delta x_i=k\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 类似题(1) 的作法,并注意到 $f(\xi_i)=1\ (i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}(b-a)=b-a.$$

10 估计下列各积分的值:

(1) $\int_1^4(x^2+1)\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2x)\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3}x\arctan x\,\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_2^0\mathrm{e}^{x^2-x}\,\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 因为 $2\leqslant x^2+1\leqslant17,x\in[1,4]$,所以

$2(4-1)\leqslant\int_1^4(x^2+1)\,\mathrm{d}x\leqslant17(4-1)$,即　$6\leqslant\int_1^4(x^2+1)\,\mathrm{d}x\leqslant51$.

(2) 因为 $0\leqslant\sin^2x\leqslant1,x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$,所以

$$1\cdot\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2x)\,\mathrm{d}x\leqslant2\cdot\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right),$$

即
$$\pi\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2x)\,\mathrm{d}x\leqslant2\pi.$$

(3) 因为 $\frac{\pi}{6\sqrt3}\leqslant x\arctan x\leqslant\frac{\sqrt3\pi}{3},x\in\left[\frac{1}{\sqrt3},\sqrt3\right]$,所以

$$\frac{\pi}{6\sqrt3}\left(\sqrt3-\frac{1}{\sqrt3}\right)\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3}x\arctan x\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt3\pi}{3}\left(\sqrt3-\frac{1}{\sqrt3}\right),$$

故
$$\frac{\pi}{9}\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3}x\arctan x\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{2\pi}{3}.$$

(4) $x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\leqslant x^2-x\leqslant2,x\in[0,2],\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\leqslant\mathrm{e}^{x^2-x}\leqslant\mathrm{e}^2,x\in[0,2]$,

所以 $2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\leqslant\int_0^2\mathrm{e}^{x^2-x}\,\mathrm{d}x\leqslant2\mathrm{e}^2,x\in[0,2]$. 故　$-2\mathrm{e}^2\leqslant\int_2^0\mathrm{e}^{x^2-x}\,\mathrm{d}x\leqslant-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$.

11 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,证明 $\int_0^1f^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left[\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$.

【证】 记 $a=\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x$,则由定积分性质5,得 $\int_0^1[f(x)-a]^2\,\mathrm{d}x\geqslant0$,即

$$\int_0^1[f(x)-a]^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1f^2(x)\,\mathrm{d}x-2a\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x+a^2=\int_0^1f^2(x)\,\mathrm{d}x-\left[\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\geqslant0,$$

由此结论成立.

12 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明:

(1) 若在 $[a,b]$ 上,$f(x)\geqslant 0$,且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,则在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 0$;

(2) 若在 $[a,b]$ 上,$f(x)\geqslant 0$,且 $f(x)\not\equiv 0$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$;

(3) 若在 $[a,b]$ 上,$f(x)\leqslant g(x)$,且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,则在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv g(x)$.

【证】 (1) 用反证法. 若 $f(x)\not\equiv 0$,不失一般性设存在一点 $x_0\in(a,b)$,使 $f(x_0)\neq 0$,则 $f(x_0)>0$. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则存在正数 δ,当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时,有 $f(x)>0$. 故

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^{x_0-\delta}f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^{b}f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\cdot 2\delta>0,\xi\in(x_0-\delta,x_0+\delta),\end{aligned}$$

这与 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾,因此 $f(x)\equiv 0$.

(2) 因为在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$,由定积分的性质,所以有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

用反证法. 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,由上面(1) 的结论有 $f(x)\equiv 0$,与已知条件矛盾,故 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

(3) 令 $h(x)=g(x)-f(x)$,则 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $h(x)\geqslant 0$,$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=\int_a^b[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,因此由(1) 便有:$h(x)\equiv 0$,即 $g(x)-f(x)\equiv 0$,所以 $f(x)\equiv g(x)$.

13 根据定积分的性质及第 12 题的结论说明下列各对积分哪一个的值较大:

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$? (2) $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$ 还是 $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$?

(3) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_1^2(\ln x)^2\mathrm{d}x$? (4) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$?

(5)) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x$?.

【解】 (1) 当 $x\in[0,1]$ 时,$x^3\leqslant x^2$. 由定积分的性质有 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$,但 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\neq\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$,故 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x>\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$.

(2) 当 $x\in[1,2]$ 时,$x^2\leqslant x^3$,所以 $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x<\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$.

(3) 当 $x\in[1,2]$ 时,$0\leqslant\ln x<1$,所以 $\ln x\geqslant(\ln x)^2$,故 $\int_1^2\ln x\mathrm{d}x>\int_1^2(\ln x)^2\mathrm{d}x$.

(4) 令 $f(x)=\ln(1+x)-x$, $f'(x)=\dfrac{-x}{1+x}<0,x\in(0,1)$,

所以 $\ln(1+x) \leqslant x, x \in [0,1]$，故 $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x < \int_0^1 x\mathrm{d}x$.

(5) 令 $f(x) = \mathrm{e}^x - (1+x)$，$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0, x \in [0,1]$，

所以 $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x, x \in [0,1]$，故 $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x > \int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$.

习题 5－2 微积分基本公式

1 试求函数 $y = \int_0^x \sin t\mathrm{d}t$ 当 $x = 0$ 及 $x = \frac{\pi}{4}$ 时的导数.

【解】 $y'\big|_{x=0} = \sin x\big|_{x=0} = 0$，$y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sin x\big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2 求由参数表达式 $x = \int_0^t \sin u\mathrm{d}u, y = \int_0^t \cos u\mathrm{d}u$ 所确定的函数对 x 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

【解】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t$.

3 求由 $\int_0^y \mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \int_0^x \cos t\mathrm{d}t = 0$ 所决定的隐函数对 x 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

【解】 方程两边对 x 求导得

$$\mathrm{e}^y y' + \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{\cos x}{\mathrm{e}^y}.$$

又 $0 = \mathrm{e}^t\Big|_0^y + \sin t\Big|_0^x = \mathrm{e}^y - 1 + \sin x$，所以 $\mathrm{e}^y = 1 - \sin x$，故 $y' = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$.

4 当 x 为何值时，函数 $I(x) = \int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 有极值？

【解】 $I'(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$，令 $I'(x) = 0$，解得 $x = 0$. $I''(x) = \mathrm{e}^{-x^2} - 2x^2\mathrm{e}^{-x^2}$，$I''(0) = 1 > 0$，因此 $I(x)$ 当 $x = 0$ 时有极小值，且极小值为 $I(0) = 0$.

5 计算下列各导数：

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$；　(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$；　(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$.

【解】 (1) 原式 $= \sqrt{1+x^4}\cdot(2x) = 2x\sqrt{1+x^4}$.

(2) 原式 $= \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$.

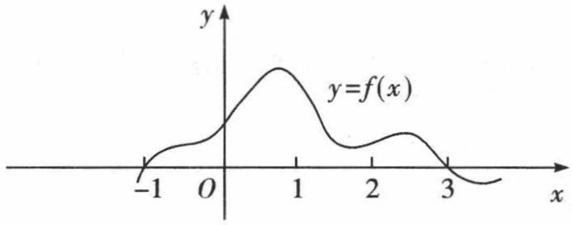
(3) 原式
$$\begin{aligned}
&= \cos(\pi\cos^2 x)(-\sin x) - \cos(\pi\sin^2 x)\cdot\cos x \\
&= \cos[\pi(1-\sin^2 x)](-\sin x) - \cos(\pi\sin^2 x)\cdot\cos x \\
&= \cos(\pi\sin^2 x)(\sin x - \cos x).
\end{aligned}$$

6 证明 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^3}\mathrm{d}t$ 在 $[-1,+\infty)$ 上是单调增加函数，并求 $(f^{-1})'(0)$.

【证】 显然 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上可导，且当 $x > -1$ 时，$f'(x) = \sqrt{1+x^3} > 0$，因此 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 是单调增加函数.

注意到$f(1)=0$,故$(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7 设$f(x)$具有三阶连续导数,$y=f(x)$的图形如图5-1所示.问下列积分中的哪一个积分值为负?



第7题图

(A)$\int_{-1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$ (B)$\int_{-1}^{3}f'(x)\mathrm{d}x$ (C)$\int_{-1}^{3}f''(x)\mathrm{d}x$ (D)$\int_{-1}^{3}f'''(x)\mathrm{d}x$

【解】 根据$y=f(x)$的图形可知,在区间$[-1,3]$上$f(x)\geqslant 0$,且$f(-1)=f(3)=0$, $f'(-1)>0$, $f''(-1)<0$, $f'(3)<0$, $f''(3)>0$.因此

$$\int_{-1}^{3}f(x)\mathrm{d}x>0,\quad \int_{-1}^{3}f'(x)\mathrm{d}x=f(3)-f(-1)=0,$$

$\int_{-1}^{3}f''(x)\mathrm{d}x=f'(3)-f'(-1)<0$, $\int_{-1}^{3}f'''(x)\mathrm{d}x=f''(3)-f''(-1)>0$.故选(C).

8 计算下列积分:

(1) $\int_{0}^{a}(3x^2-x+1)\mathrm{d}x$; (2) $\int_{1}^{2}\left(x^2+\dfrac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x$; (3) $\int_{4}^{9}\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$;

(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; (5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; (6) $\int_{0}^{\sqrt{3}a}\dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$;

(7) $\int_{0}^{1}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$; (8) $\int_{-1}^{0}\dfrac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$; (9) $\int_{-e-1}^{-2}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x}$;

(10) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\mathrm{d}\theta$; (11) $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$;

(12) $\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x$,其中$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}x^2, & x>1.\end{cases}$

【解】 (1) $\int_{0}^{a}(3x^2-x+1)\mathrm{d}x=\left(x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_{0}^{a}=a^3-\dfrac{1}{2}a^2+a$.

(2) $\int_{1}^{2}\left(x^2+\dfrac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}x^{-3}\right)\Big|_{1}^{2}=2\dfrac{5}{8}$.

(3) $\int_{4}^{9}\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x=\int_{4}^{9}(\sqrt{x}+x)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_{4}^{9}=45\dfrac{1}{6}$.

(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$.

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\dfrac{\pi}{3}$.

(6) $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_0^{\sqrt{3}a} = \frac{\pi}{3a}$.

(7) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$.

(8) $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x = 3\int_{-1}^0 x^2\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = (x^3+\arctan x)\Big|_{-1}^0 = 1+\frac{\pi}{4}$.

(9) $\int_{-e-1}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln|1+x|\Big|_{-e-1}^{-2} = -1$.

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)\mathrm{d}\theta = (\tan\theta-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1-\frac{\pi}{4}$.

(11) $\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4$.

(12) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1(x+1)\mathrm{d}x + \int_1^2\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x = \frac{(x+1)^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{6}x^3\Big|_1^2 = \frac{8}{3}$.

9 设 $k\in N^+$,试证下列各题:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x = 0$;

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x = 0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x = \pi$;

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x = \pi$.

【证】 (1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

(2) 因为 $\sin kx$ 是奇函数,所以$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x = 0$.

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2k}\sin 2kx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$.

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2k}\sin 2kx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$.

10 设 k 及 $l\in N^+$,且 $k\neq l$. 证明:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx\mathrm{d}x = 0$;

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx\mathrm{d}x = 0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\mathrm{d}x = 0$.

【证】 (1) 因为 $\cos kx\sin lx$ 是奇函数,所以 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx\mathrm{d}x = 0$.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x+\cos(k-l)x]\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k+l}\sin(k+l)x - \frac{1}{k-l}\sin(k-l)x\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x-\cos(k-l)x]\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k+l}\sin(k+l)x - \frac{1}{k-l}\sin(k-l)x\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

11 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{x}$；　　　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$.

【解】 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x^2}{1}=1$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^{x^2}\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{2x^2}}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=2$.

12 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1),\\ x, & x\in[1,2],\end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 在 $[0,2]$ 上的表达式，并讨论 $\Phi(x)$ 在 $(0,2)$ 内的连续性.

【解】 当 $x\in[0,1)$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x t^2dt=\dfrac{1}{3}x^3$，

当 $x\in[1,2]$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1 t^2dt+\int_1^x tdt=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}$，

故
$$\Phi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, & x\in[0,1),\\ \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}, & x\in[1,2].\end{cases}$$

因为 $\Phi(1-0)=\Phi(1+0)=\Phi(1)=\dfrac{1}{3}$，所以 $\Phi(x)$ 在 $(0,2)$ 内连续.

13 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & x<0\text{ 或 }x>\pi,\end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

【解】 当 $x<0$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x 0dt=0$；

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x\dfrac{1}{2}\sin t\,dt=-\dfrac{1}{2}\cos t\Big|_0^x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos x$；

当 $x>\pi$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^\pi\dfrac{1}{2}\sin t\,dt+\int_\pi^x 0dt=-\dfrac{1}{2}\cos t\Big|_0^\pi=1$，

所以
$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

14 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\leqslant0$，$F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt$. 证明：在 (a,b) 内有 $F'(x)\leqslant0$.

【证】 $F'(x)=\dfrac{(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\,dt}{(x-a)^2}=\dfrac{f(x)}{(x-a)^2}-\dfrac{1}{(x-a)^2}f(\xi)\cdot(x-a)$

$$=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a},\xi\in[a,x].$$

因为$f'(x)\leqslant 0$,则$f(x)$在$[a,b]$上单调减少．又$a\leqslant\xi\leqslant x$,所以有$f(x)-f(\xi)\leqslant 0$, $x-a>0$,从而$F'(x)\leqslant 0$.

15 设$F(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,求$F'(0)$.

【解】 $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{1}=1.$

16 设$f(x)$在$[0,+\infty)$内连续,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.证明函数

$$y=\mathrm{e}^{-x}\int_0^x\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t$$

满足微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=f(x)$,并求$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$.

【证】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\mathrm{e}^{-x}\int_0^x\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^x f(x)=-y+f(x)$,

因此$y(x)$满足微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=f(x)$.

由条件$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$,从而存在$X_0>0$,当$x>X_0$时,有$f(x)>\frac{1}{2}$.

因此,
$$\begin{aligned}\int_0^x\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t&=\int_0^{X_0}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\int_{X_0}^x\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_0^{X_0}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\int_{X_0}^x\frac{1}{2}\mathrm{e}^{X_0}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{X_0}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{X_0}(x-X_0),\end{aligned}$$

故,当$x\to+\infty$时,$\int_0^x\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\to+\infty$,从而利用洛必达法则,有

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x f(x)}{\mathrm{e}^x}=1.$$

习题5－3　定积分的换元法和分部积分法

1 计算下列定积分($a>0$为常数):

(1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x$;　(2) $\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3}$;　(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi$;

(4) $\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta$;　(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\mathrm{d}u$;　(6) $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}\mathrm{d}y$;　(8) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$;　(9) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$;

(10) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;　(11) $\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x$;　(12) $\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$;

(13) $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}$; (14) $\int_{0}^{\sqrt{2}a}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^{2}-x^{2}}}$; (15) $\int_{0}^{1}te^{-\frac{t^{2}}{2}}\mathrm{d}t$;

(16) $\int_{1}^{e^{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$; (17) $\int_{-2}^{0}\frac{x+2}{x^{2}+2x+2}\mathrm{d}x$; (18) $\int_{0}^{2}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^{2}-2x+2)^{2}}$;

(19) $\int_{-\pi}^{\pi}x^{4}\sin x\mathrm{d}x$; (20) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^{4}\theta\mathrm{d}\theta$; (21) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(\arcsin x)^{2}}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x$;

(22) $\int_{-5}^{5}\frac{x^{3}\sin^{2}x}{x^{4}+2x^{2}+1}\mathrm{d}x$; (23) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x\mathrm{d}x$; (24) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^{3}x}\mathrm{d}x$;

(25) $\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$; (26) $\int_{0}^{2\pi}|\sin(x+1)|\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 原式 $=-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=0$.

(2) $\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^{3}}=\frac{1}{5}\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}(11+5x)}{(11+5x)^{3}}=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{(11+5x)^{2}}\Big|_{-2}^{1}=\frac{51}{512}$.

(3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^{3}\varphi\mathrm{d}\varphi=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{3}\varphi\mathrm{d}\cos\varphi=-\frac{1}{4}\cos^{4}\varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$.

(4) $$\int_{0}^{\pi}(1-\sin^{3}\theta)\mathrm{d}\theta=\theta\Big|_{0}^{\pi}+\int_{0}^{\pi}\sin^{2}\theta\mathrm{d}\cos\theta=\pi+\int_{0}^{\pi}(1-\cos^{2}\theta)\mathrm{d}\cos\theta$$

$$=\pi+\left(\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^{3}\theta\right)\Big|_{0}^{\pi}=\pi-\frac{4}{3}.$$

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2}u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2u\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

(6) 令 $x=\sqrt{2}\sin t$,则当 $x=0$ 时,$t=0$;$x=\sqrt{x}$ 时,$t=\frac{\pi}{2}$,且 $\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t$,因此

$$\int_{0}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^{2}}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2}t\mathrm{d}t=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

(7) 令 $y=2\sin t$,当 $y=-\sqrt{2}$ 时,$t=-\frac{\pi}{4}$,$y=\sqrt{2}$ 时,$t=\frac{\pi}{4}$,且 $\mathrm{d}y=2\cos t\mathrm{d}t$,因此

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^{2}}\mathrm{d}y=4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{2}t\mathrm{d}t=2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=2\sqrt{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}(\pi+2).$$

(8) 令 $x=\sin t$,当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,$t=\frac{\pi}{4}$;$x=1$ 时,$t=\frac{\pi}{2}$,$\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$,因此

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^{2}}}{x^{2}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^{2}t\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^{2}t-1)\mathrm{d}t=(-\cot t-t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{\pi}{4}.$$

(9) 令 $x=a\sin t$,当 $x=0$ 时,$t=0$;$x=a$ 时,$t=\frac{\pi}{2}$,$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$,因此

$$\int_{0}^{a}x^{2}\sqrt{a^{2}-x^{2}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}a^{4}\sin^{2}t\cos^{2}t\mathrm{d}t=\frac{a^{4}}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2}2t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t=\frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^4}{16}\pi.$$

(10) 令 $x=\tan t$,当 $x=1$ 时,$t=\frac{\pi}{4}$,$x=\sqrt{3}$ 时,$t=\frac{\pi}{3}$,$\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$,因此

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{\tan^2 t\sec t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin^2 t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t}=-\frac{1}{\sin t}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(11) 令 $\sqrt{5-4x}=t$,当 $x=-1$ 时,$t=3$,$x=1$ 时,$t=1$,$\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}t\mathrm{d}t$,因此

$$\int_{-1}^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}=-\int_3^1\frac{1}{8}(5-t^2)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{8}\left(5t-\frac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_3^1=\frac{1}{6}.$$

(12) 令$\sqrt{x}=t$,当 $x=1$ 时,$t=1$,$x=4$ 时,$t=2$,$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,因此

$$\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}=\int_1^2\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t}=2\int_1^2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=2[t-\ln(1+t)]\Bigg|_1^2=2+2\ln\frac{2}{3}.$$

(13) 令 $\sqrt{1-x}=t$,当 $x=\frac{3}{4}$ 时,$t=\frac{1}{2}$,$x=1$ 时,$t=0$,$\mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$,因此

$$\int_{\frac{3}{4}}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}=\int_{\frac{1}{2}}^0\frac{-2t\mathrm{d}t}{t-1}=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t=2(t+\ln|t-1|)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=1-2\ln 2.$$

(14) $\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}}=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{\mathrm{d}x^2}{\sqrt{3a^2-x^2}}=(-\sqrt{3a^2-x^2})\Bigg|_0^{\sqrt{2}a}=(\sqrt{3}-1)a.$

(15) $\int_0^1 t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=-\int_0^1\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\left(-\frac{t^2}{2}\right)=-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\Bigg|_0^1=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$

(16) $\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}=2\sqrt{1+\ln x}\Bigg|_1^{\mathrm{e}^2}=2(\sqrt{3}-1).$

(17) 原式 $=\int_{-2}^0\frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\arctan(x+1)\right]_{-2}^0=\frac{\pi}{2}.$

(18) 令 $x=1+\tan u$,则 $\mathrm{d}x=\sec^2 u\mathrm{d}u$,因此

$$\int_0^2\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-2x+2)^2}=\int_0^2\frac{x\mathrm{d}x}{[(x-1)^2+1]^2}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan u)\mathrm{d}u}{\sec^2 u}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 u\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2u)\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

(19) 由于被积函数为奇函数,所以原式 $=0$.

(20) 由于被积函数为偶函数,因此

$$原式=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=8\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi.$$

(21) 由于被积函数为偶函数,因此有

$$原式=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{1}{2}}(\arcsin x)^2\mathrm{d}(\arcsin x)=\frac{2}{3}[(\arcsin x)^3]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi^3}{324}.$$

(22) 由于被积函数为奇函数,所以原式 $=0$.

(23) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(1-2\sin^2 x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin^2 x)\mathrm{d}\sin x$

$$= 2\left(\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

(24) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x - \cos^3 x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x\sin^2 x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x\mathrm{d}x$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\mathrm{d}\cos x = -\frac{4}{3}\sqrt{\cos^3 x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}.$$

(25) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = 2\sqrt{2}.$$

(26) $\int_0^{2\pi}|\sin(x+1)|\mathrm{d}x \xlongequal{x=u-1} \int_1^{2\pi+1}|\sin u|\mathrm{d}u$，由于 $|\sin x|$ 是以 π 为周期的周期函数，则

上式 $= 2\int_0^{\pi}|\sin u|\mathrm{d}u = 4$.

2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

【证】 令 $t = a+b-x$，则

$$\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

3 证明：$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\quad(x>0)$.

【证】 $\int_x^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \xlongequal{令 x=\frac{1}{t}} -\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

4 证明：$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x\,(m,n\in N)$.

【证】 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x \xlongequal{令 1-x=t} -\int_1^0 t^n(1-t)^m\mathrm{d}t = \int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x$.

5 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$n\in\mathbf{Z}$，证明：

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi}f(|\sin x|)\mathrm{d}x = \int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

【证】 令 $x = u+\frac{n}{2}\pi$，则 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$，因此

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi}f(|\sin x|)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left[\left|\sin\left(u+\frac{n}{2}\pi\right)\right|\right]\mathrm{d}u = \begin{cases}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin u)\mathrm{d}u, & n\text{ 为偶数},\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos u)\mathrm{d}u, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$$

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f(|\cos x|)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left[\left|\cos\left(u+\frac{n}{2}\pi\right)\right|\right]du = \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u)\,du, & n \text{ 为偶数}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)\,du, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

由于$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$,因此结论成立.

6 若$f(t)$是连续的奇函数,证明:$\int_0^x f(t)\,dt$是偶函数;若$f(t)$是连续的偶函数,证明$\int_0^x f(t)\,dt$是奇函数.

【证】 记$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$,令$t=-u$,则 $\varphi(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt = -\int_0^x f(-u)\,du$.

(1) 若$f(x)$是奇函数,则$f(-x) = -f(x)$,因此

$$\varphi(-x) = -\int_0^x f(-u)\,du = \int_0^x f(u)\,du = \int_0^x f(t)\,dt = \varphi(x).$$

即当$f(x)$是奇函数时,$\int_0^x f(t)\,dt$是偶函数.

(2) 若$f(x)$是偶函数,则$f(-x) = f(x)$,因此

$$\varphi(-x) = -\int_0^x f(-u)\,du = -\int_0^x f(u)\,du = -\int_0^x f(t)\,dt = -\varphi(x).$$

即当$f(x)$是偶函数时,$\int_0^x f(t)\,dt$是奇函数.

7 计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$;

(2) $\int_1^e x\ln x\,dx$;

(3) $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin\omega t\,dt$($\omega$为常数);

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$;

(5) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$;

(6) $\int_0^1 x\arctan x\,dx$;

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$;

(8) $\int_1^2 x\log_2 x\,dx$;

(9) $\int_0^{\pi} (x\sin x)^2\,dx$;

(10) $\int_1^e \sin(\ln x)\,dx$;

(11) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$;

(12) $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,dx\ (m\in N^+)$;

(13) $J_m = \int_0^{\pi} x\sin^m x\,dx\ (m\in N^+)$.

【解】 (1) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = -\int_0^1 x\,de^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -2e^{-1}+1.$

(2) $\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e \ln x\,dx^2 = \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2+1).$

(3) $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin\omega t\,dt = -\frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\,d\cos\omega t = -\frac{1}{\omega}\left(t\cos\omega t\Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos\omega t\,dt\right)$

$$= -\frac{2\pi}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\sin\omega t\Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = -\frac{2\pi}{\omega^2}.$$

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\mathrm{d}\cot x = -x\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cot x\mathrm{d}x$

$$= (-x\cot x + \ln\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

(5) 原式 $= 2\left(\sqrt{x}\ln x\Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\right) = 4(2\ln 2 - 1)$.

(6) 原式 $= \frac{1}{2}\left(x^2\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}e^{\pi} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\mathrm{d}x,$$

移项、整理得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 2)$.

(8) 原式 $= \frac{1}{2}x^2\log_2 x\Big|_1^2 - \frac{1}{2\ln 2}\int_1^2 x\mathrm{d}x = 2 - \frac{3}{4\ln 2}$.

(9) 原式 $= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2(1 - \cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\cos 2x\mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} x^2\mathrm{d}\sin 2x = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}x\cos 2x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

(10) 令 $\ln x = t$，则 $x = e^t$，$\mathrm{d}x = e^t\mathrm{d}t$.

所以 $\int_1^e \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \int_0^1 e^t\sin t\mathrm{d}t = e^t\sin t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t\cos t\mathrm{d}t$

$$= e\sin 1 - e^t\cos t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t\sin t\mathrm{d}t = e(\sin 1 - \cos 1) + 1 - \int_0^1 e^t\sin t\mathrm{d}t,$$

移项后整理得 $\int_0^1 e^t\sin t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(e\sin 1 - e\cos 1 + 1)$，即

$$\int_1^e \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e\sin 1 - e\cos 1 + 1).$$

(11) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\mathrm{d}x = -\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\mathrm{d}x + \int_1^e \ln x\mathrm{d}x = -(x\ln x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1}\mathrm{d}x + (x\ln x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_1^e \mathrm{d}x$

$$= 2 - \frac{2}{e}.$$

(12) $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin u} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1}x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{m}{m+1}\cdot\dfrac{m-2}{m-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m\text{ 为奇数}, \\ \dfrac{m}{m+1}\cdot\dfrac{m-2}{m-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}, & m\text{ 为偶数} \end{cases}$

$$= \begin{cases} \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot m}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(m+1)}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m\text{ 为奇数}, \\ \dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot m}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(m+1)}, & m\text{ 为偶数}. \end{cases}$$

(13) $J_m = \int_0^{\pi} x\sin^m x\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^m x\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\mathrm{d}x$，故有

$$J_m = \begin{cases} \dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(m-1)}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot m}\cdot\pi, & m\text{ 为大于 1 的奇数}, \\ \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(m-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot m}\cdot\dfrac{\pi^2}{2}, & m\text{ 为偶数}, \end{cases}$$

$J_1 = \pi$. $\quad J_0 = \dfrac{\pi^2}{2}$.

习题5-4 反常积分

1 判定下列各反常积分的收敛性，如果收敛，计算反常积分的值：

(1) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^4}$；

(2) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$；

(3) $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x\ (a>0)$；

(4) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)}$；

(5) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t\ (p>0,\omega>0)$；

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$；

(7) $\int_0^1\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$；

(8) $\int_0^2\dfrac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}$；

(9) $\int_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$；

(10) $\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

【解】 (1) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^4} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\dfrac{\mathrm{d}x}{x^4} = \lim\limits_{b\to+\infty} -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x^3}\Big|_1^b = \dfrac{1}{3}$.

(2) 因为 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{x}\Big|_1^b\right) = \infty$，所以原反常积分发散.

(3) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^b\right) = \dfrac{1}{a}$.

(4) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)} = \int_0^{+\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1-x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(1+x)^2}{1+x}+\dfrac{1}{2}\arctan x\right]_0^{+\infty}$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

(5) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{\omega}\mathrm{e}^{-pt}\cos\omega t\Big|_0^{+\infty} - \dfrac{p}{\omega}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\cos\omega t\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega^2}e^{-pt}\sin\omega t\Big|_0^{+\infty} - \frac{p^2}{\omega^2}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega} - \frac{p^2}{\omega^2}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t,$$

移项后，整理得$\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega t\mathrm{d}t = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1} = \arctan(x+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$.

(7) 由于 $x=1$ 为瑕点，所以

$$\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = 1.$$

(8) 因为$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon} = +\infty$，故原反常积分发散.

(9) $\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^2\left(\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\mathrm{d}(x-1)$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x-1}\right]\Big|_{1+\varepsilon}^2 = \frac{8}{3}.$$

(10) $\int_1^e\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_1^{e-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2x}}\mathrm{d}\ln x = \lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin(\ln x)\Big|_1^{e-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$.

2 当 k 为何值时，反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$收敛？当 k 为何值时，这反常积分发散？又当 k 为何值时，这反常积分取得最小值？

【解】 (1) 当 $k=1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)}\mathrm{d}x = \ln\ln x\Big|_2^{+\infty} = +\infty$ 发散；

当 $k<1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k} = \frac{1}{1-k}(\ln x)^{1-k}\Big|_2^{+\infty} = +\infty$ 发散；

当 $k>1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k} = \frac{1}{1-k}(\ln x)^{1-k}\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$ 收敛.

(2) 当 $k>1$ 时，令 $f(k) = \frac{1}{(k-1)a^{k-1}}$，其中 $a=\ln 2$.

$$f'(k) = -\frac{1}{k-1}\frac{1}{a^{k-1}}\left(\frac{1}{k-1}+\ln a\right).$$

令 $f'(k)=0$，解得 $k = 1-\frac{1}{\ln\ln 2}\overset{\text{令}}{=\!=}b$.

当 $k>b$ 时，$f'(k)<0$，当 $k<b$ 时，$f'(k)>0$. 因此$f(k)$ 在 $k=b$ 时取极小值，极小值此时也是最小值，其最小值为

$$f\left(1-\frac{1}{\ln\ln 2}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{\ln\ln 2}(\ln 2)^{-\frac{1}{\ln\ln 2}}} = -(\ln\ln 2)\cdot(\ln 2)^{\frac{1}{\ln\ln 2}}.$$

3 利用递推公式计算反常积分 $I_n = \int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\mathrm{d}x(n\in N)$.

【解】 $I_n = -x^ne^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x = n\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x = nI_{n-1} = \cdots = (n!)I_1$,

而 $I_1=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$，所以 $I_n=n!$.

4 计算反常积分 $\int_0^1\ln x dx$.

【解】 $$\int\ln x dx=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C,$$

因此 $$\int_0^1\ln x dx=[x\ln x-x]_0^1=-1-\lim_{x\to0^+}(x\ln x-x)=-1.$$

习题 5-5 反常积分的审敛法 Γ 函数

1 判定下列反常积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$；　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$；

(3) $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$；　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$；

(5) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$；　(6) $\int_1^2\frac{dx}{(\ln x)^3}$；

(7) $\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx$；　(8) $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$.

【解】 (1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$. 由于 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\leqslant\frac{1}{x^2}$，且 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛，所以 $\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$ 收敛，从而 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$ 收敛.

(2) 由于 $\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\leqslant\frac{1}{x^{5/3}}$，而 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{5/3}}$ 收敛，所以 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ 收敛.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sin\frac{1}{x^2}=1$，由极限审敛法，$\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$ 收敛.

(4) $\frac{1}{1+x|\sin x|}\geqslant\frac{1}{1+x}\geqslant\frac{1}{2x}, x\in[1,+\infty)$，

因为 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$ 发散，因此 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$ 发散，从而 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$ 发散.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{x\arctan x}{1+x^3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{\frac{1}{x^3}+1}=\frac{\pi}{2}$，所以 $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$ 收敛.

(6) $\lim\limits_{x\to1+0}(x-1)\frac{1}{(\ln x)^3}=\lim\limits_{x\to1+0}\frac{1}{3(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}}=+\infty$，所以 $\int_1^2\frac{dx}{(\ln x)^3}$ 发散.

(7) $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot x^4}{\sqrt{1-x^4}}=\lim\limits_{x\to1-0}\frac{x^4}{\sqrt{1+x}\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}$，所以 $\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx$ 收敛.

(8) $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}$

$$=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}},$$

由于 $\lim\limits_{x\to1+0}\sqrt[3]{x-1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}=-1$，所以 $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}$ 收敛.

又 $\lim\limits_{x\to2-0}\sqrt[3]{x-2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}=1$，所以 $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)-(x-2)}}$ 收敛.

从而 $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛.

2 设反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

【证】 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant|f(x)|\cdot\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\left[f^2(x)+\dfrac{1}{x^2}\right]$,

由于 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，

所以 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x$ 收敛，从而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

3 用 Γ 函数表示下列积分，并指出这些积分的收敛范围：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x\ (n>0)$；　(2) $\displaystyle\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x$；　(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x\ (n\neq0)$.

【解】 (1) 令 $t=x^n$，则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$.

故其收敛范围是 $n>0$.

(2) 令 $t=\ln\dfrac{1}{x}$，则 $x=\mathrm{e}^{-t}$，$\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. 当 $x\to+0$ 时，$t\to+\infty$；当 $x=1$ 时，$t=0$，所以有

$$\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x=-\int_{+\infty}^0t^p\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}t^p\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\Gamma(p+1).$$

故其收敛范围是 $p+1>0$.

(3) 令 $x^n=t$，则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{|n|}t^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$.

故其收敛范围是 $\dfrac{m+1}{n}>0$.

4 证明 $\Gamma\left(\dfrac{2k+1}{2}\right)=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k}$，其中 $k\in N^+$.

【证】 $$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{2k-1}{2}\Gamma\left(\frac{2k-1}{2}\right)=\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-3}{2}\Gamma\left(\frac{2k-3}{2}\right)$$
$$=\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}.$$

5 证明以下各式（其中 $n\in\mathbf{N}_+$）：

(1) $2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)=2^n\Gamma(n+1)$；　(2) $1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\dfrac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$；

(3) $\sqrt{\pi}\Gamma(2n) = 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$(勒让德(Legender)倍量公式).

【证】 (1)$2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n) = 2^n n! = 2n\Gamma(n+1)$.

(2)$1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1) = \dfrac{(2n-1)!}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n-2)} = \dfrac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}(n-1)!} = \dfrac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$.

(3) 因为$\sqrt{\pi}\Gamma(2n) = (2n-1)!\sqrt{\pi}$,

$$\begin{aligned}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= (n-1)!\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}\\ &= \frac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}{2^{n-1}}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}\\ &= \frac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}{2n-1}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n-1}}\\ &= \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}}\sqrt{\pi},\end{aligned}$$

因此结论成立.

总习题五

1 填空

(1) 函数$f(x)$在$[a,b]$上有界是$f(x)$在$[a,b]$上可积的________条件,而$f(x)$在$[a,b]$上连续是$f(x)$在$[a,b]$上可积的________条件;

(2) 对$[a,+\infty)$上非负、连续的函数$f(x)$,它的变上限积分$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,+\infty)$上有界是反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$收敛的________条件;

(3) 绝对收敛的反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$一定__________.

(4) 函数$f(x)$在$[a,b]$上有定义且$|f(x)|$在$[a,b]$上可积,此时积分$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$__________存在.

(5) 设函数$f(x)$连续,则$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(t^2-x^2)\,\mathrm{d}t =$________.

【解】 (1) 必要,充分. (2) 充分,必要. (3) 收敛.

(4) 不一定.例如$f(x) = \begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ -1, & x\text{为无理数},\end{cases}$则$|f(x)| = 1$在$[a,b]$上可积,而$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$不存在.

(5)$xf(-x^2)$.作换元$u = t^2-x^2$,则

$$\int_0^x tf(t^2-x^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^x f(t^2-x^2)\,\mathrm{d}(t^2-x^2) = \frac{1}{2}\int_{-x^2}^0 f(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int_0^{-x^2} f(u)\,\mathrm{d}u,$$

因此 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(t^2-x^2)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}f(-x^2)\cdot(-2x) = xf(-x^2).$$

2 以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

(1) 设 $I = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x}}dx$,则估计 I 值的大致范围为( ).

(A) $0 \leqslant I \leqslant \frac{\sqrt{2}}{10}$　　(B) $\frac{\sqrt{2}}{10} \leqslant I \leqslant \frac{1}{5}$　　(C) $\frac{1}{5} < I < 1$　　(D) $I \geqslant 1$

(2) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,则必有( ).

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

【解】 (1) 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,$\frac{1}{\sqrt{2}}x^4 \leqslant \frac{x^4}{\sqrt{1+x}} \leqslant x^4$,因此

$$\frac{\sqrt{2}}{10} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}}x^4 dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x}}dx \leqslant \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}.$$

故选(B).

(2) 记 $G(x) = \int_0^x f(t)dt$,则 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,且

$G(x)$ 是奇(偶)函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶(奇)函数,

又 $F(x) = G(x) + C$,其中 C 是一常数,而常数是偶函数,故由奇、偶函数的性质知应选(A).

取周期函数 $f(x) = \cos x + 1$,则 $F(x) = \sin x + x + C$ 不是周期函数,故(C)不成立;取单调增加函数 $f(x) = 2x, x \in \mathbf{R}$,则 $F(x) = x^2 + C$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调函数,故(D)不成立.

3 回答下列问题:

(1) 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x \geqslant g(x)$,那么 $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ 在几何上表示什么?

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x) \geqslant 0$,那么 $\int_a^b \pi f^2(x)dx$ 在几何上表示什么?

(3) 如果在时刻 t 以 $\varphi(t)$ 的流量(单位时间内流过的流体的体积或质量)向一水池注水,那么 $\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt$ 表示什么?

(4) 如果某国人口增长的速率为 $u(t)$,那么 $\int_{T_1}^{T_2} u(t)dt$ 表示什么?

(5) 如果一公司经营某种产品的边际利润函数为 $P'(x)$,那么 $\int_{1000}^{2000} P'(x)dx$ 表示什么?

【解】 (1) $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ 表示由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 以及直线 $x = a, x = b$ 所围成的图形的面积.

(2) $\int_a^b \pi f^2(x)dx$ 表示 xOy 面上,由曲线 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ 以及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周而得到的旋转体的体积.

(3) $\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)\mathrm{d}t$ 表示在时间段 $[t_1,t_2]$ 内向水池注入的水的总量.

(4) $\int_{T_1}^{T_2}u(t)\mathrm{d}t$ 表示该国在 $[T_1,T_2]$ 时间段内增加的人口总量.

(5) $\int_{1000}^{2000}P'(x)\mathrm{d}x$ 表示从经营第 1000 个产品起一直到第 2000 个产品的利润总量.

4 利用定积分的定义计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p>0)$.

【解】 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x=\left[\dfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^p=\int_0^1x^p\mathrm{d}x=\dfrac{1}{p+1}$.

5 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^xf(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$ 连续;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$.

【解】 (1) 记 $F(x)=x\int_a^xf(t)\mathrm{d}t$,　$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^xf(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=af(a)$.

(2) 先证明所求极限为未定式$\dfrac{\infty}{\infty}$. 由于当 $x>\tan 1$ 时,$\arctan x>1$,记

$c=\int_0^{\tan 1}(\arctan t)^2\mathrm{d}t$,则当 $x>\tan1$ 时有

$$\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t=c+\int_{\tan 1}^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t>c+\int_{\tan 1}^x\mathrm{d}t=c+x-\tan 1.$$

故有 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t=+\infty$,从而利用洛必达法则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

6 下列计算是否正确,试说明理由:

(1) $\int_{-1}^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\int_{-1}^1\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=\left[-\arctan\dfrac{1}{x}\right]_{-1}^1=-\dfrac{\pi}{2}$;

(2) 因为 $\int_{-1}^1\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\xlongequal{x=\frac{1}{t}}-\int_{-1}^1\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$,所以　$\int_{-1}^1\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=0$;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\dfrac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}=0$.

【解】 (1) 错误. 有两处错误,首先,因为 $-1 \leqslant x \leqslant 1$,因此 $-\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ 在 $x=0$ 无意义,第一个等号不成立. 其次,$-\arctan\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处不可导,因此不能用牛顿 - 莱布尼兹公式,即第二个等号也不成立. 正确计算应当是:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}.$$

(2) 错误. 原因在于所作变换 $x=\varphi(t)=\frac{1}{t}$ 应使 $\varphi'(t)$ 在 $[-1,1]$ 上连续,而 $\varphi'(t)=-\frac{1}{t^2}$ 在 $[-1,1]$ 上有间断点 $t=0$,故不满足换元公式所需要满足的条件. 正确计算应当是:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

(3) 错误. 因为对上、下限均为无穷限的反常积分要拆成两个反常积分来讨论. 实际上,由于 $\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty} = +\infty$ 发散,故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 一定发散.

7 设 $x>0$,证明 $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

【证】 记 $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$,则当 $x>0$ 时,有

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

由拉格朗日中值定理的推论,得 $f(x) \equiv C \quad (x>0)$.

而 $f(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$,故 $C=\frac{\pi}{2}$,从而结论成立.

8 设 $p>0$,证明:$\frac{p}{p+1} < \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^p} < 1$.

【证】 由于 $1-x^{2p}<1$,即 $(1-x^p)(1+x^p)<1$,

当 $p>0, 0<x<1$ 时,有 $1-x^p < \frac{1}{1+x^p} < 1$.

根据定积分性质得 $\int_0^1 (1-x^p)\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{1}{1+x^p}\mathrm{d}x < \int_0^1 \mathrm{d}x$,而

$$\int_0^1 (1-x^p)\mathrm{d}x = \left[x - \frac{1}{1+p}x^{1+p}\right]_0^1 = \frac{p}{1+p},$$

所以 $$\frac{p}{1+p} < \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^p} < 1.$$

9 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上均连续,证明:

(1) $\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$(柯西 - 施瓦茨不等式);

(2) $\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$(闵可夫斯基不等式).

【证】 (1) 对于任何实数 t,有$[f(x)+tg(x)]^2 \geqslant 0$,

所以 $\int_a^b [f(x)+tg(x)]^2\mathrm{d}x = t^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x + 2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

令 $A = \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x, B = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x, C = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

则有 $At^2 + 2Bt + C \geqslant 0$ 对一切 t 成立,由于 $A \geqslant 0$,故其判别式 $\Delta = 4B^2 - 4AC \leqslant 0$,即 $B^2 \leqslant AC$,故有

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

(2) $\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$,由上题有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

从而 $$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]\frac{1}{2} + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

$$= \left[\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,$$

故 $$\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

10 设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,且 $f(x) > 0$. 证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2.$$

【证】 根据上一题,有

$$\left[\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b [\sqrt{f(x)}]^2\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \left[\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right]^2\mathrm{d}x,$$

即得 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2.$$

11 计算下列积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$; (3) $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$;

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x$; (5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$; (6) $\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{\pi} x^2|\cos x|\mathrm{d}x$; (8) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{3-x}}$; (9) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2-x|}}$;

(10) $\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\}\mathrm{d}t$.

【解】 (1) 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx.$

而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x} = -\ln(1+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2,$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sec^2\frac{x}{2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d\tan\frac{x}{2}$$

$$= x\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}dx = \frac{\pi}{2} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}d\frac{x}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2\ln\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \ln 2,$$

故原式 $= \frac{\pi}{2} - \ln 2 + \ln 2 = \frac{\pi}{2}.$

(2) 令 $x = \frac{\pi}{4} - u$,得

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right]du = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)du = \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan u)du$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx,$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$

(3) 令 $x = a\sin t$,当 $x = a$ 时,$t = \frac{\pi}{2}$,$x = 0$ 时,$t = 0$,$dx = a\cos t dt$,因此

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t + \cos t) + (\cos t - \sin t)}{\sin t + \cos t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[t + \ln|\sin t + \cos t|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

(4) 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x|dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x - \cos x)dx$$

$$= \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2(\sqrt{2}-1).$$

(5) 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x dx}{\tan^2 x + 2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan x)}{\tan^2 x + 2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(6) 原式 $= \int_0^{\pi} x|\cos x|\sin x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\sin x dx$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin x\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\sin x\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

(7) 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2\cos x\mathrm{d}x$

$$= [x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4.$$

(8) 原式 $= \frac{1}{e^2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(e^{x-1})}{e^{2x-2}+1} = \frac{1}{e^2}[\arctan(e^{x-1})]_0^{+\infty} = \frac{1}{e^2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{e}\right).$

(9) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2 - x|}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x - x^2|}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$

$$= [\arcsin(2x-1)]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2 - x|}} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - x}} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}(2x-1)}{\sqrt{(2x-1)^2 - 1}}$$

$$= \left[\ln(2x - 1 + \sqrt{(2x-1)^2 - 1})\right]_1^{\frac{3}{2}} = \ln(2+\sqrt{3}),$$

因此 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2 - x|}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2 - x|}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2 - x|}} = \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}).$

(10) 当 $x < -1$ 时，$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\}\mathrm{d}t = \int_0^{-1}\mathrm{d}t + \int_{-1}^x t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}$；

当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\}\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t = x$；

当 $x > 1$ 时，$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\}\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t + \int_1^x t^3\mathrm{d}t = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}.$

因此 $\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\}\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}, & x < -1, \\ x, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}, & x > 1. \end{cases}$

12 设 $f(x)$ 为连续函数，证明 $\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x\left[\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t.$

【证】 $\int_0^x\left[\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t = \left[t\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]_0^x - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$

$$= x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t.$$

13 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x) > 0$，

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_b^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}, x \in [a,b].$$

证明:(1)$F'(x) \geqslant 2$; (2) 方程 $F(x) = 0$ 在(a,b)内有且仅有一个根.

【证】 (1)$F'(x) = f(x) + \dfrac{1}{f(x)} = \left[\sqrt{f(x)} - \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}\right]^2 + 2 \geqslant 2$.

(2)$F(a) = \displaystyle\int_b^a \frac{dt}{f(t)} = -\int_a^b \frac{dt}{f(t)} < 0$, $F(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt > 0$,又 $F'(x)$ 存在,从而 $F(x)$ 连续.由零点定理 $F(x)$ 在(a,b)内至少有一个根.但 $F'(x) > 0$,故仅有一个根.

14 求$\displaystyle\int_0^2 f(x-1)\,dx$,其中$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, & x \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{1+e^x}, & x < 0. \end{cases}$

【解】 令 $x - 1 = t$,则

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x-1)\,dx &= \int_{-1}^1 f(t)\,dt = \int_{-1}^0 f(t)\,dt + \int_0^1 f(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^0 \frac{dt}{1+e^t} + \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t)\Big|_0^1 + \int_{-1}^0 \frac{e^t dt}{e^t(1+e^t)} \\ &= \ln 2 + [t - \ln(1+e^t)]_{-1}^0 = 1 + \ln(1+e^{-1}).\end{aligned}$$

15 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,$g(x)$在区间$[a,b]$上连续不变号.证明至少存在一点$\xi \in [a,b]$,使下式成立:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \quad (\text{积分第一中值定理}).$$

【证】 不妨设 $g(x) \geqslant 0$,由定积分性质可知$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0$. 记$f(x)$在$[a,b]$上值的最大值为 M、最小值为 m,则有 $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$,故有

$$m\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b mg(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \int_a^b Mg(x)\,dx = M\int_a^b g(x)\,dx,$$

当$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = 0$ 时,由上述不等式可知$\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$,故结论成立.

当$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$ 时,有 $m \leqslant \dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M$,

由闭区间上连续函数性质,知存在 $\xi \in [a,b]$,使得$f(\xi) = \dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx}$,从而结论成立.

16 证明:$\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx = \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^2}\,dx \ (n > 1)$,并用它证明

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma(n+1) \ (n \in N).$$

【证】 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1}\cdot xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}\,de^{-x^2}$

$$= -\frac{1}{2}x^{n-1}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(n-1)x^{n-2}e^{-x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} x^{n-1}e^{-x^2} + \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^2}dx,$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-1}e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{n-1}}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{2xe^{x^2}} = \cdots = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(n-1)!!}{2^{n-1}e^{x^2}} = 0,$

故 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx = \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^2}dx.$

利用上式有

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}dx = \frac{2n+1-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2n+1-2}e - x^2dx = n\int_0^{+\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}dx = \frac{n}{2}\boldsymbol{\Gamma}(n)$$

$$= \frac{n}{2}\cdot\frac{\boldsymbol{\Gamma}(n+1)}{n} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Gamma}(n+1).$$

17 判定下列反常积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$； (2) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$；

(3) $\int_2^{+\infty}\frac{\cos x}{\ln x}dx$； (4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$.

【解】 (1) 由 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx,$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{4}}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^{\frac{1}{4}}} = 0$，所以 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$ 收敛.

$\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = 1$，所以 $\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$ 收敛，故 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$ 收敛.

(2) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2-3x+2}} = \int_2^3\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2-3x+2}} + \int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2-3x+2}},$

由于 $\lim\limits_{x\to2+0}(x-2)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}} = \frac{1}{2}$，所以 $\int_2^3\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛. 又

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2-3x+2}} = 1$，所以 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛，故原反常积分收敛.

(3) $\int_2^{+\infty}\frac{\cos x}{\ln x}dx = \frac{\sin x}{\ln x}\Big|_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\sin 2}{\ln 2} + \int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x(\ln x)^2}dx,$

而 $\left|\frac{\sin x}{x(\ln x)^2}\right| \leqslant \frac{1}{x(\ln x)^2}$，且 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2},$

所以 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x(\ln x)^2}dx$ 收敛，故原反常积分收敛.

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}dx$

$$= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 + \int_1^{\frac{3}{2}} + \int_{\frac{3}{2}}^2 + \int_2^3 + \int_3^{+\infty}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}dx,$$

而 $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$，$\lim\limits_{x\to1}(x-1)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}} = -1,$

$$\lim_{x\to 2}(x-2)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}},\quad \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}=1,$$

所以以上所给出的6个反常积分都收敛,故原反常积分收敛.

18 计算下列反常积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ $(\alpha\geqslant 0)$.

【解】 (1) 注意 $x=0$ 为瑕点,令 $t=\frac{\pi}{2}-x$,则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x,$$

故 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln\sin x+\ln\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\sin 2x}{2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

令 $2x=u$,则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u\mathrm{d}u+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin u\mathrm{d}u\right),$

而 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin u\mathrm{d}u\overset{u=\pi-v}{=\!=\!=}-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\ln\sin v\mathrm{d}v=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin v\mathrm{d}v,$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=I.$

故 $2I=I-\frac{\pi}{2}\ln 2\Rightarrow I=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

(2) $$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=}\int_{+\infty}^0\frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^\alpha}\right)}$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)},$$

故 $$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}.$$

考研试题选解

1 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$ 等于

(A) $\int_1^2\ln^2 x\mathrm{d}x$.　　(B) $2\int_1^2\ln x\mathrm{d}x$.

(C) $2\int_1^2\ln(1+x)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_1^2\ln^2(1+x)\mathrm{d}x$.

【分析】 按题意，这是利用定积分求这个数列的极限，先由对数性质，转化为求和式的极限.

$$原极限 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right],$$

这是 $f(x) = \ln x^2$ 在 $[1,2]$ 区间上的一个积分和的极限. 因此

原极限 $= \int_1^2 \ln x^2 \mathrm{d}x = 2\int_1^2 \ln x \mathrm{d}x$. 应选(B).

【评注】 本题也是 $f(x) = \ln(1+x)^2$ 在 $[0,1]$ 区间上的一个积分和的极限.

$$原极限 = \int_0^1 \ln(1+x)^2 \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x \xlongequal{t=1+x} 2\int_1^2 \ln t \mathrm{d}t = 2\int_1^2 \ln x \mathrm{d}x.$$

2 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.　　(B) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.　　(D) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.

【分析】 将和式改写

$$\sigma_n \xlongequal{记} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n\left(1+\frac{i}{n}\right)n^2\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

方法 1° σ_n 看成两个定积分的积分和的乘积. 由

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

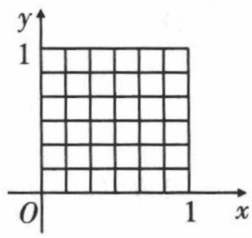
$$\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\cdot\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y.$$

因此选(D).

方法 2° σ_n 看成是二重积分的一个积分和. 记 D 是正方形区域:

$$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\},\ f(x,y) = \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}.$$

将 D 的长与宽均 n 等分，分成 n^2 个小正方形，每个小正方形的面积是 $\frac{1}{n^2}$，于是 σ_n 是 $f(x,y)$ 在 D 上的一个积分和，



$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$= \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x)(1+y^2)} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} \mathrm{d}y.$$

因此选(D).

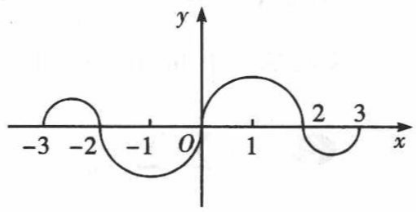
3 如右图,连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$,$[2,3]$ 上的图形分别是直径为1的上、下半圆周,在区间 $[-2,0]$,$[0,2]$ 上的图形分别是直径为2的下、上半圆周.设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$,则下列结论正确的是

(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$.

(B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$.

(D) $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$.



第 3 题图

【分析】 注意,大小半圆的面积分别为 $\frac{1}{2}\pi$ 与 $\frac{1}{8}\pi$.

按定积分的几何意义知,当 $x\in[0,2]$ 时 $f(x)\geqslant 0$,当 $x\in[2,3]$ 时 $f(x)\leqslant 0$.

$$\Rightarrow \qquad F(3)=\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\pi,$$

$$F(2)=\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\pi.$$

因为 $f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 为偶函数.

$$\Rightarrow \qquad F(-3)=F(3)=\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\pi,\quad F(-2)=F(2)=\frac{1}{2}\pi.$$

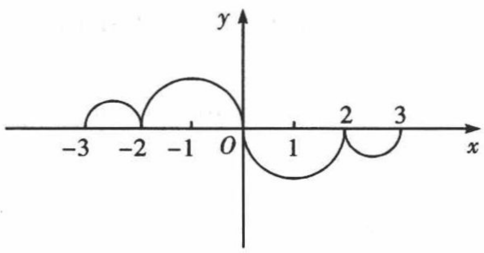
因此 $\qquad F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$. 选(C).

【评注】 如果题中给出的图形如下,则应如何作出正确选择呢?注意,大小半圆的面积分别为 $\frac{1}{2}\pi$ 与 $\frac{1}{8}\pi$.

当 $x\in[0,3]$ 时 $f(x)\leqslant 0$,按定积分的几何意义知,$-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是相应图形的面积.

$$\Rightarrow \qquad F(3)=\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\,\frac{5}{4}\pi,$$

$$F(2)=\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\pi.$$



因为 $f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 为偶函数.

$$\Rightarrow \qquad F(-3)=F(3)=-\frac{1}{2}\,\frac{5}{4}\pi,$$

$$F(-2)=F(2)=-\frac{1}{2}\pi,$$

因此 $\quad F(3)=\dfrac{5}{4}F(2).\quad$ 选(B).

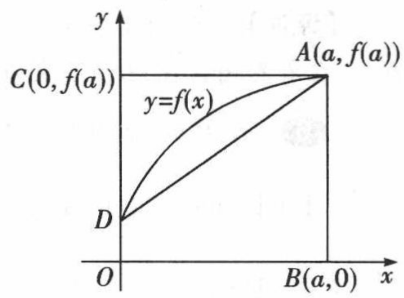
4 如图,曲线段的方程为 $y=f(x)$,函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数,则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于

(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积.

(B) 梯形 $ABOD$ 的面积.

(C) 曲边三角形 ACD 的面积.

(D) 三角形 ACD 的面积.



第 4 题图

【分析】
$$\begin{aligned}\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x&=\int_0^a x\mathrm{d}f(x)\\&=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\\&=af(a)-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 $af(a)$ 是矩形 $ABOC$ 的面积,$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 是曲边梯形 $ABOD$ 的面积(见图).因此 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 是曲边三角形 ACD 的面积.选(C).

5 设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$,

(Ⅰ)证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数; (Ⅱ)求 $f(x)$ 的值域.

【分析与求解】 (Ⅰ)只需证 $f(x+\pi)=f(x)\quad(\forall x\in(-\infty,+\infty))$.

$$\begin{aligned}f(x+\pi)&=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\mathrm{d}t\xlongequal{t=u+\pi}\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|\mathrm{d}u\\&=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\mathrm{d}u=f(x)\quad(\forall x\in(-\infty,+\infty)),\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数.

(Ⅱ)因为 $f(x)$ 以 π 为周期,故只需讨论 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的值域.

设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的值域为 $[m,M]$,其中 m,M 分别是 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最小值与最大值.注意 $|\sin x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续 $\Rightarrow f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$ 可导.下面用微分学方法求 m 与 M:

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|,$$

令 $\quad f'(x)=0,\quad$ 则 $\quad|\tan x|=1$.在 $[0,\pi]$ 中解得 $x=\dfrac{1}{4}\pi,\dfrac{3}{4}\pi$.比较函数值

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin t\mathrm{d}t=-\cos t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}=\sqrt{2},$$

$$\begin{aligned}f\left(\frac{3}{4}\pi\right)&=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\sin t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin t\mathrm{d}t\\&=-\cos t\Big|_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}+\cos t\Big|_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}=2-\sqrt{2},\end{aligned}$$

$$f(\pi) = f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \mathrm{d}t = 1,$$

可知$f(x)$的最小值是$2-\sqrt{2}$,最大值是$\sqrt{2}$.因此$f(x)$的值域是$[2-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

【评注】 该题有一定综合性:对于连续的以T为周期的函数$f(x)$,求它的值域转化为求$f(x)$在有界闭区间$[0,T]$上的最大值与最小值.

6 设$f(x)$是周期为2的连续函数.

(Ⅰ)证明对任意的实数t,有$\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$;

(Ⅱ)证明$G(x) = \int_0^x \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$是周期为2的周期函数.

【证明】 (Ⅰ)利用$f(x)$是周期为2的连续函数知$F(t) = \int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x$在区间$(-\infty, +\infty)$上可导,且$F'(t) = f(t+2) - f(t) \equiv 0$在$(-\infty, +\infty)$上成立.这表明$F(t)$的取值恒等于一个常数,由于$F(0) = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$,故对任何实数$t$都有

$$\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x = F(t) = F(0) = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

(Ⅱ)要证明$G(x)$是周期为2的周期函数,就是要证明对任何x都有$G(x+2) - G(x) = 0$.利用(Ⅰ)中已经证明的结论即得

$$\begin{aligned}
G(x+2) - G(x) &= \int_0^{x+2} \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t - \int_0^x \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_x^{x+2} \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \\
&= 2\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - \int_x^{x+2}\left[\int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \\
&= 2\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - \int_x^{x+2}\left[\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \\
&= 2\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^2 f(s)\mathrm{d}s\int_x^{x+2}\mathrm{d}t \\
&= 2\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s = 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s = 0.
\end{aligned}$$

【评注】 也可以用定积分的性质与换元法来证明(Ⅰ),这时不必利用$f(x)$的连续性而只需设函数$f(x)$以2为周期且在任何长度为2的区间$[t,t+2]$上可积.证明过程如下:

利用定积分的性质可得

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x &= \int_t^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^{t+2} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^t f(x)\mathrm{d}x - \int_t^2 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_2^{t+2} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^t f(x)\mathrm{d}x. \qquad (*)
\end{aligned}$$

在$(*)$式右端第一个积分中令$x = u + 2$作换元,则$x:2 \to t+2 \Leftrightarrow u:0 \to t$,且$\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$,利用函数$f(x)$的周期性即得

$$\int_2^{t+2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^t f(u+2)\mathrm{d}u = \int_0^t f(u)\mathrm{d}u = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x.$$

把所得结果代入(*)式知对任意的实数 t 有

$$\int_t^{t+2} f(x)\,dx - \int_0^2 f(x)\,dx = 0 \iff \int_t^{t+2} f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx.$$

7 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,且 $\int_0^\pi f(x)\,dx = 0$, $\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx = 0$. 试证:在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1 和 ξ_2,使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

【证法一】 考察 $f(x)$ 的原函数,令 $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, 0 \leqslant x \leqslant \pi$,则显然有 $F(0) = 0$, $F(\pi) = 0$. 只需再证 $F(x)$ 在 $(0,\pi)$ 还有零点. 考察

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi f(x)\cos x\,dx = \int_0^\pi \cos x\,dF(x) = F(x)\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi F(x)\sin x\,dx \\ &= \int_0^\pi F(x)\sin x\,dx \xlongequal{\text{积分中值定理}} \pi F(\eta)\sin\eta, \end{aligned}$$

由于 $0 < \eta < \pi$,而 $\sin\eta > 0$,故 $F(\eta) = 0$.

再由罗尔定理,$\exists\, \xi_1 \in (0,\eta)$ 与 $\xi_2 \in (\eta,\pi)$,使 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$,即

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0.$$

【证法二】 首先,由积分中值定理,$\exists\, \xi_1 \in (0,\pi)$,使 $f(\xi_1) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = 0$.

然后证明 ξ_1 不是唯一的零点:

反证法. 假设 ξ_1 是 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内的唯一零点,则连续函数 $f(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 与 (ξ_1,π) 都不变号,且由 $\int_0^\pi f(x)\,dx = 0$ 知, $f(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 与 (ξ_1,π) 内异号,不妨设在 $(0,\xi_1)$ 内 $f(x) > 0$,在 (ξ_1,π) 内 $f(x) < 0$. 于是再由 $\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx = 0$, $\int_0^\pi f(x)\,dx = 0$ 及 $\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 单调减可知

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi f(x)(\cos x - \cos\xi_1)\,dx \\ &= \int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x - \cos\xi_1)\,dx + \int_{\xi_1}^\pi f(x)(\cos x - \cos\xi_1)\,dx > 0. \end{aligned}$$

这就得出矛盾,从而在 $(0,\pi)$ 内除 ξ_1 外 $f(x)$ 至少还有一个零点 ξ_2. 因此,存在 $\xi_1, \xi_2 \in (0,\pi)$, $\xi_1 \neq \xi_2$,使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

【评注】 (1)【证法一】比【证法二】较为简单. 证明 $f(x)$ 有 n 个零点遇到麻烦时,不妨试证其原函数 $F(x)$ 有 $n+1$ 个零点.

(2) 本题是该年数学卷中最难的一题. 论证中所发生的错误有:① 有些考生会引进 $F(x)$,但只是说,设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数,接下去就推知 $F(0) = 0$, $F(\pi) = 0$. 这是不对的,因为只设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, $F(x)$ 还是不确定的,之后的事无从谈起. 这说明,许多考生不会用变上限积分 $\int_0^x f(t)\,dt$ 来表示一个确定的原函数,而只会用不定积分来表示.

② 有不少考生想到用分部积分来处理,但做成

$$\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx = f(x)\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\cdot f'(x)\,dx,$$

题中未设 $f'(x)$ 存在,这样做显然不合理. 事实上,到这一步只要再动一下脑筋,改一个方向就可得出正确的结果(留作考生训练).

8 设$f(x)$在区间$[-a,a](a>0)$上具有二阶连续导数，$f(0)=0$，

(1) 写出$f(x)$的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

(2) 证明在$[-a,a]$上至少存在一点η，使 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

【求解与证明】 (1) 对任意$x\in[-a,a]$，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,$$

其中ξ在0与x之间.

(2) **方法1°** 对上式两边积分得

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}f'(0)x\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{2!}f''(\xi)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2f''(\xi)\mathrm{d}x.$$

因为$f''(x)$在$[-a,a]$上连续，故对任意的$x\in[-a,a]$，有$m\leqslant f''(x)\leqslant M$，其中$M,m$分别为$f''(x)$在$[-a,a]$上的最大、最小值，所以有

$$mx^2\leqslant x^2f''(\xi)\leqslant Mx^2,\quad m\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-a}^{a}x^2f''(\xi)\mathrm{d}x\leqslant M\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x,$$

$$m\cdot\frac{a^3}{3}\leqslant\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2f''(\xi)\mathrm{d}x\leqslant M\cdot\frac{a^3}{3},\quad m\leqslant\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

因而由$f''(x)$的连续性知，至少存在一点$\eta\in[-a,a]$，使

$$f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x,\quad 即\quad a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x.$$

方法2° 令$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则$F(x)$在$[-a,a]$具有3阶连续导数，其2阶麦克劳林展开式为

$$\begin{aligned}F(x)&=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2!}x^2+\frac{F'''(\xi)}{3!}x^3\\&=0+f(0)x+\frac{f'(0)}{2!}x^2+\frac{f''(\xi)}{3!}x^3\\&=\frac{f'(0)}{2!}x^2+\frac{f''(\xi)}{3!}x^3,\end{aligned}$$

$$F(a)=\frac{f'(0)}{2!}a^2+\frac{f''(\xi_1)}{3!}a^3,$$

$$F(-a)=\frac{f'(0)}{2!}a^2-\frac{f''(\xi_2)}{3!}a^3,\ (-a<\xi_2<0<\xi_1<a)$$

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=F(a)-F(-a)=\frac{a^3}{3!}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]=\frac{a^3}{3}\cdot\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2},$$

由于 $m\leqslant\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]\leqslant M$，存在$\eta\in[-a,a]$，使$f''(\eta)=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$，

则有 $$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\frac{a^3}{3}f''(\eta).$$

【评注】 下列证明不妥：提出$f''(\xi)$，即得

$$\int_{-a}^{a}x^2f''(\xi)\mathrm{d}x=f''(\xi)\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x=f''(\xi)\cdot\frac{2}{3}a^3.$$

其错误在于此处的 ξ 与 x 有关，$f''(\xi)$ 不是常数，不能提出；即使由 x^2 不变号而利用积分中值定理也不对，因为我们对 $\xi(x)$ 的性质一无所知，$f''(\xi(x))$ 对于 x 未必连续．

当使用积分中值定理缺少"连续性"条件时，不妨对其原函数使用微分中值定理，如方法 2°.

9 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$．若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明：

(1) 在 (a,b) 内 $f(x)>0$；

(2) 在 (a,b) 内存在点 ξ，使 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$；

(3) 在 (a,b) 内存在与 (2) 中 ξ 相异的点 η，使 $f'(\eta)(b^2-a^2)=\dfrac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$．

【证明】 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}\cdot(x-a)=0$．由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，知 $f(a)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{t\to a^+}f(2t-a)=0$．又由 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增，$f(x)>f(a)=0$，$x\in(a,b)$．

(2) 注意到等式的左边是 $F(x)=x^2$ 与 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上的增量比 $\dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}$，而且 $G'(x)=f(x)>0$，对于 $F(x)$ 与 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理，则 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{f'(\xi)}{G'(\xi)},\quad 即\quad \frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}. \tag{$*$}$$

(3) 即证：$\exists\,\eta\in(a,b)$，$\eta\neq\xi$，使

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}.$$

为此，将 $(*)$ 式再对 $f(\xi)$ 在 $[a,\xi]$ 上应用拉格朗日中值定理，则 $\exists\,\eta\in(a,\xi)\subset(a,b)$，使

$$f(\xi)=f(a)+f'(\eta)(\xi-a)=f'(\eta)(\xi-a).$$

代入 $(*)$ 式，(3) 便得证．

10 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内存在二阶导数，且

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3).$$

(Ⅰ) 证明存在 $\eta\in(0,2)$，使 $f(\eta)=f(0)$；

(Ⅱ) 证明存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f''(\xi)=0$．

【证明】 (Ⅰ) 因函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(0)=\dfrac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，由定积分中值定理即知 $\exists\,\eta\in(0,2)$，使得 $f(\eta)=\dfrac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，即 $f(\eta)=f(0)$．

(Ⅱ) 由题设 $f(0)=\dfrac{1}{2}[f(2)+f(3)]$ 可知，当 $f(2)=f(3)$ 时必有 $f(0)=f(2)=f(3)$；当 $f(2)\neq f(3)$ 时由闭区间上连续函数的性质可知，存在 $\overline{\eta}\in(2,3)$ 使得

$$f(\overline{\eta}) = \frac{1}{2}[f(2)+f(3)] = f(0).$$

这样一来,在闭区间$[0,3]$上总有不相同的两点$\eta \in (0,2)$与$\overline{\eta} \in [2,3]$使得$f(0) = f(\eta) = f(\overline{\eta})$. 分别在区间$[0,\eta]$与$[\eta,\overline{\eta}]$上对$f(x)$应用罗尔定理知 $\exists \xi_1 \in (0,\eta)$与$\xi_2 \in (\eta,\overline{\eta})$使得$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. 由于$f'(x)$在区间$[\xi_1,\xi_2]$上满足罗尔定理的全部条件,从而对$f'(x)$在区间$[\xi_1,\xi_2]$上应用罗尔定理即知,$\exists \xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (0,3)$使得$f''(\xi) = 0$.

【评注】 ① 本题主要考查拉格朗日中值定理、罗尔定理以及连续函数的介值定理的应用,是一道综合证明题. 证明中要注意各个"中间点"的所在区间. 第(Ⅰ)问是为第(Ⅱ)问设立的一个"台阶".

② 有些考生在证明(Ⅰ)时由积分中值定理得

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 2f(\eta) \quad (0 \leqslant \eta \leqslant 2).$$

用此方法可得$f(\eta) = f(0)$,但η的范围没有说明在开区间$(0,2)$内.

③ 还有些考生证明(Ⅱ)时,将题设条件"$\frac{f(2)+f(3)}{2} = f(0)$"变形为"$f(2)-f(0)+f(3)-f(0) = 0$",由罗尔定得$2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2) = 0, \xi_1 \in (0,2), \xi_2 \in (0,3)$. 由此推得$f'(\xi_1)$与$f'(\xi_2)$异号. 再由导数的介值性知存在$\xi_3 \in (\xi_1,\xi_2)$,使$f'(\xi_3) = 0$. 由(Ⅰ)的结论容易推得存在$\xi_4 \in (0,\eta)$,使$f'(\xi_4) = 0$. 从而存在$\xi \in (\xi_4,\xi_3)$,使$f''(\xi) = 0$.

由于上述ξ_1,ξ_2存在的区间具有公共部分,不能保证ξ_1,ξ_2是两个不同的点,所以这个证明是有问题的.

11 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且满足

$$f(1) = k\int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x)\,dx \ (k > 1).$$

证明至少存在一点$\xi \in (0,1)$,使得 $f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi)$.

【分析】 首先应注意到$\int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x)\,dx$中被积函数$x e^{1-x} f(x)$的导数

$$\begin{aligned}[x e^{1-x} f(x)]' &= x e^{1-x} f'(x) + e^{1-x} f(x) - x e^{1-x} f(x) \\ &= x e^{1-x}[f'(x) - (1-x^{-1})f(x)],\end{aligned}$$

而方括号中式子等于零正是我们要证的结论. 所以,令 $F(x) = x e^{1-x} f(x)$,只要证明$F(x)$在$[0,1]$内某区间上满足罗尔定理的全部条件,本题就得到了证明.

【证明】 令$F(x) = x e^{1-x} f(x)$,于是$F(1) = f(1)$,由积分中值定理得,存在满足$0 < c < \frac{1}{k} < 1$的c,使得 $k\int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x)\,dx = c e^{1-c} f(c) = F(c)$.

由原式$f(1) = k\int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x)\,dx$知,$F(c) = F(1)$.

从而$F(x)$在$[c,1]$上满足罗尔定理条件,故存在$\xi \in (c,1) \subset (0,1)$,使$F'(\xi) = 0$,即

$$\xi e^{1-\xi}[f'(\xi) - (1-\xi^{-1})f(\xi)] = 0.$$

而 $\xi e^{1-\xi} \neq 0$,故 $f'(\xi) - (1-\xi^{-1})f(\xi) = 0$,即 $f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi)$.

12 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x)\cos^2 x\,dx =$ ________.

【分析】 注意到对称区间以及被积函数的奇偶性，有

$$原式 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x$$

$$= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\mathrm{d}x\right) = 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

13 计算$\int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

【解】 $I = \int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\arcsin x\mathrm{d}(\arcsin x) \xlongequal[x=\sin t]{t=\arcsin x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(1-\cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\mathrm{d}(\sin 2t)$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}t\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{16}\pi^2 - \frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{16}\pi^2 + \frac{1}{4}.$$

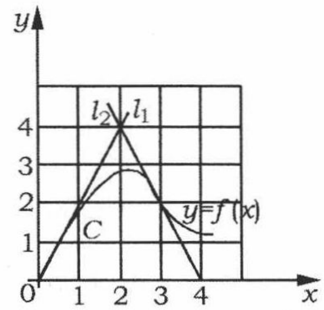
14 $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x =$ ________.

【分析】 $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x \xlongequal[x=t^2]{t=\sqrt{x}} \int_0^{\pi} (t\cos t)\cdot 2t\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} t^2\mathrm{d}(\sin t)$

$$\xlongequal{分部积分} 2t^2\sin t\Big|_0^{\pi} - 4\int_0^{\pi} t\sin t\mathrm{d}t = 4\int_0^{\pi} t\mathrm{d}(\cos t)$$

$$\xlongequal{分部积分} 4t\cos t\Big|_0^{\pi} - 4\int_0^{\pi} \cos t\mathrm{d}t = -4\pi.$$

15 如图，曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，点$(3,2)$是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点$(0,0)$与$(3,2)$处的切线，其交点为$(2,4)$．设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x$.



第 15 题图

【分析与求解】 按题意，直接可知

$f(0)=0, f(3)=2, f''(3)=0$（拐点的必要条件）．从图中还可求出$y=f(x)$在点$(0,0)$与$(3,2)$处的切线分别为

$$y=2x,\quad y=-2x+8.$$

于是 $\quad f'(0)=2,\quad f'(3)=-2.$

现用分部积分法计算积分值：

$$原式 = \int_0^3 (x^2+x)\mathrm{d}f''(x)$$

$$= (x^2+x)f''(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 (2x+1)f''(x)\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^3 (2x+1)\mathrm{d}f'(x)$$

$$= -(2x+1)f'(x)\Big|_0^3 + 2\int_0^3 f'(x)\,dx$$

$$= -7\cdot f'(3) + f'(0) + 2f(x)\Big|_0^3 = -7\cdot(-2) + 2 + 2\cdot(2-0) = 20.$$

【评注】 本题是一道简单的综合题，考查的主要是运算能力．本题涉及的知识点主要有导数的几何意义、拐点的必要条件、定积分的分部积分公式等．

16 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续，且 $f(0)=0$，$f'(x)\geqslant 0$，$g'(x)\geqslant 0$．证明：对任何 $a\in[0,1]$，有 $\int_0^a g(x)f'(x)\,dx + \int_0^1 f(x)g'(x)\,dx \geqslant f(a)g(1)$．

【证法一】 利用函数的单调性来证明本题．为此引入函数

$$F(a) = \int_0^a g(x)f'(x)\,dx + \int_0^1 f(x)g'(x)\,dx - f(a)g(1),\ a\in[0,1],$$

由题设知，函数 $f(x)$，$g(x)$ 都是区间 $[0,1]$ 上的单调非减函数，且 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上非负，从而

$$F'(a) = g(a)f'(a) - f'(a)g(1) = -f'(a)[g(1)-g(a)] \leqslant 0,\ a\in[0,1],$$

又

$$\begin{aligned} F(1) &= \int_0^1 g(x)f'(x)\,dx + \int_0^1 f(x)g'(x)\,dx - f(1)g(1) \\ &= \int_0^1 d[f(x)g(x)] - f(1)g(1) \\ &= [f(x)g(x)]\Big|_0^1 - f(1)g(1) = -f(0)g(0) = 0. \end{aligned}$$

故函数 $F(a)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调非增，且 $F(a)\geqslant F(1)=0$ 当 $a\in[0,1]$ 时成立．

【证法二】 利用直接计算定积分来证明本题．为此计算差

$$\begin{aligned} &\int_0^a g(x)f'(x)\,dx + \int_0^1 f(x)g'(x)\,dx - f(a)g(1) \\ &= \int_0^a g(x)f'(x)\,dx + \int_0^a f(x)g'(x)\,dx - f(a)g(1) + \int_a^1 f(x)g'(x)\,dx \\ &= \int_0^a d[f(x)g(x)] - f(a)g(1) + \int_a^1 f(x)g'(x)\,dx \\ &= f(a)g(a) - f(0)g(0) - f(a)g(1) + \int_a^1 f(x)g'(x)\,dx \\ &= -f(a)[g(1)-g(a)] + \int_a^1 f(x)g'(x)\,dx \\ &= \int_a^1 f(x)g'(x)\,dx - \int_a^1 f(a)g'(x)\,dx \\ &= \int_a^1 [f(x)-f(a)]g'(x)\,dx,\ a\in[0,1]. \end{aligned}$$

注意到函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调非减，而 $g'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上非负，不难发现上面最后所得定积分的被积函数非负，从而对任何 $a\in[0,1]$ 这个定积分的积分值非负，即原不等式成立．

17 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}\,dt$ 的单调区间与极值．

【分析与求解】 $f(x) = x^2\int_1^{x^2} e^{-t^2}\,dt - \int_1^{x^2} te^{-t^2}\,dt$．

先求出 $f'(x) = 2x\int_1^{x^2} e^{-t^2}dt + x^2e^{-x^4}\cdot 2x - x^2e^{-x^4}\cdot 2x = 2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$,

由 $f'(x)=0$ 解得 $x=0, x^2=1$,即 $x=0, x=\pm1$. 进一步得

$$f'(x)\begin{cases}<0, & -\infty<x<-1,\\ =0, & x=-1,\\ >0, & -1<x<0,\\ =0, & x=0,\\ <0, & 0<x<1,\\ =0, & x=1,\\ >0, & 1<x<+\infty,\end{cases}$$

因此,$f(x)$ 的单调减区间是 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$,单调增区间是 $(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$.

极大值 $f(0)=\int_0^1 te^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-1})$,极小值 $f(\pm1)=0$.

【评注】 ① 求 $f(x)$ 的单调性区间就是求 $f'(x)$ 的正负号区间. 增减或减增区间的分界点就是极值点. 上述方法就是先求出 $f'(x)$,然后分出 $f'(x)$ 的正负号区间,从而得到 $f(x)$ 的增减区间,相应地也得到 $f(x)$ 的极值点. 这里就不必去求出驻点处的 $f''(x)$.

② 若题目只要求 $f(x)$ 的极值,我们也可求出

$$f'(x) = 2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$$

后,解得驻点 $x=0, x=\pm1$,然后再求驻点处的二阶导数.

$$f''(0) = 2\int_1^0 e^{-t^2}dt < 0 \quad\Rightarrow\quad f(0)=\frac{1}{2}(1-e^{-1}) \text{ 为极大值.}$$

$$f''(\pm1) = 4e^{-1} > 0 \quad\Rightarrow\quad f(\pm1)=0 \text{ 为极小值.}$$

18 设 $f(x)=\begin{cases}2x+\frac{3}{2}x^2, & -1\leqslant x<0,\\ \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ 求函数 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$ 的表达式.

【解法一】 用分段积分法直接求这个变限积分. 当 $-1\leqslant x<0$ 时,

$$F(x)=\int_{-1}^x\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)dt = \left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^x = \frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2};$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-1}^0 f(t)dt+\int_0^x f(t)dt = \int_{-1}^0\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)dt+\int_0^x\frac{te^t}{(e^t+1)^2}dt\\ &= \left(\frac{1}{2}t^3+t^2\right)\Big|_{-1}^0 - \int_0^x td\left(\frac{1}{e^t+1}\right)\\ &= -\frac{1}{2}-\frac{t}{e^t+1}\Big|_0^x+\int_0^x\frac{1}{e^t+1}dt = -\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_0^x\frac{d(e^t)}{e^t(e^t+1)}\\ &= -\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^t}{e^t+1}\Big|_0^x = -\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{2e^x}{e^x+1}.\end{aligned}$$

所以 $$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^3+x^2-\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x<0,\\ \ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}-\dfrac{x}{e^x+1}-\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

【解法二】 即求连续函数 $f(x)$ 的满足 $F(-1)=0$ 的原函数 $F(x)$. 易分段求出原函数,然后在分界点 $x=0$ 处连续地接起来即可. 先求

$$\int\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx=-\int x d\left(\frac{1}{e^x+1}\right)=-\frac{x}{e^x+1}+\int\frac{dx}{e^x+1}=-\frac{x}{e^x+1}-\int\frac{de^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$=-\frac{x}{e^x+1}-\ln(1+e^{-x})+C.$$

于是 $$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^3+x^2-\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -\dfrac{x}{e^x+1}-\ln(1+e^{-x})+C_0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

其中 $\left(\dfrac{1}{2}x^3+x^2-\dfrac{1}{2}\right)\Bigg|_{x=0}=\left[-\dfrac{x}{e^x+1}-\ln(1+e^{-x})+C_0\right]\Bigg|_{x=0}$,即 $C_0=\ln 2-\dfrac{1}{2}$.

19 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f(0)\neq 0$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

【分析与求解】 由于 $\int_0^x f(x-t)dt\xlongequal{u=x-t}-\int_x^0 f(u)du=\int_0^x f(t)dt$,于是

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2f(0)}\quad\left(当\ x\to 0\ 时,\int_0^x f(t)dt\sim xf(0)\right)$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{2xf(0)}=\frac{1}{2}.$$

【评注】 上述计算的关键之一是作变量替换将含参变量的变限积分 $\int_0^x f(x-t)dt$ 转化为被积函数不含参变量的积分. 在用洛必达法则之前,用了等价无穷小替换: $\int_0^x f(t)dt\sim xf(0)$ $(x\to 0)$ $\left(因\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{xf(0)}=1\right)$,简化了计算.

若不作替换,则计算如下:

$$原式=1-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}=1-\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{\int_0^x f(t)dt+xf(x)},$$

上式右端分子、分母同除 x 得

$$\text{原式} = 1 - \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + f(x)} = 1 - \frac{f(0)}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + f(0)}$$

$$= 1 - \frac{f(0)}{2f(0)} = 1 - \frac{1}{2},$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1} = f(0)$.

20 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$" 表示"M 的充分必要条件是 N",则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数 .　　(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数 .

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数 .　(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数 .

【分析一】 已知 $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t + C$,

若 $f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 为偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 的全体原函数为偶函数 . 又若 $F(x)$ 为偶函数,则 $F'(x) = f(x)$ 为奇函数 . 因此选(A) .

【分析二】 特殊地取 $f(x) = \cos x + 1, F(x) = \sin x + x + 1$ 时,可以断定选项(B),(C),(D)均不正确,因此选项(A) 正确 . 排除法是处理单选题的一种常用方法 .

21 设 $f(x)$ 是奇函数,除 $x = 0$ 外处处连续,$x = 0$ 是其第一类间断点,则 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是

(A) 连续的奇函数 .　　　　　　(B) 连续的偶函数 .

(C) 在 $x = 0$ 间断的奇函数 .　　(D) 在 $x = 0$ 间断的偶函数 .

【分析一】 特殊选取 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 满足题中所有条件,则

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x \leqslant 0 \end{cases} = |x|.$$

它是连续的偶函数 . 因此,选(B) .

【分析二】 显然 $f(x)$ 在 $\forall$ 区间 $[a,b]$ 上可积,于是 $F(x) \xlongequal{\text{记}} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 处处连续,又

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{-x} f(-t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{s=-t} \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s = F(x),$$

即 $F(x)$ 为偶函数 . 选(B) .

22 设 $f(x)$ 是区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的单调、可导函数,且满足

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\,\frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}\,\mathrm{d}t,$$

其中 f^{-1} 是 f 的反函数,求 $f(x)$.

【分析与求解】 对题设等式两边求导得

$$f^{-1}[f(x)]f'(x) = x\,\frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}.$$

注意 $f^{-1}[f(x)] = x$,于是 $f'(x) = \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$,积分得

$$f(x) = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln(\sin x + \cos x) + C \quad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right).$$

在原式中令 $x = 0$ 得 $\int_0^{f(0)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t = 0$.

由条件 $\Rightarrow f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$.

23 把 $x \to 0^+$ 时的无穷小 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan\sqrt{t}\mathrm{d}t$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 \mathrm{d}t$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A) α, β, γ. (B) α, γ, β. (C) β, α, γ. (D) β, γ, α.

【分析】 分别求出 α,β,γ 关于 x 的阶数较为方便.由

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\alpha}{x} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim_{x \to 0+} \frac{\cos x^2}{1} = 1$$

$\Rightarrow$ α 是 x 的一阶无穷小.由

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\beta}{x^k} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim_{x \to 0+} \frac{\tan\sqrt{x^2} \cdot 2x}{kx^{k-1}} = \frac{2}{k} \lim_{x \to 0+} \frac{\tan x}{x \cdot x^{k-3}} \xlongequal{\text{取 } k = 3} \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ β 是 x 的 3 阶无穷小.由

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\gamma}{x^k} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim_{x \to 0+} \frac{\sin(\sqrt{x})^3 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}}{kx^{k-1}} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0+} \frac{\sin(\sqrt{x})^3}{k(\sqrt{x})^3 x^{k-2}} \xlongequal{\text{取 } k = 2} \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ γ 是 x 的 2 阶无穷小.

因此,应选(B).

【评注】 我们也可两两比较它们的阶,可计算得

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\beta}{\alpha} = 0(\beta \text{ 比 } \alpha \text{ 高阶}), \quad \lim_{x \to 0+} \frac{\gamma}{\beta} = \infty(\beta \text{ 比 } \gamma \text{ 高阶}),$$

故还须求 $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\gamma}{\alpha} = 0(\gamma \text{ 比 } \alpha \text{ 高阶})$.

24 设 $f(x)$ 是连续函数,

(Ⅰ)利用定义证明函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导,且 $F'(x) = f(x)$;

(Ⅱ)当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时,证明函数 $G(x) = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

【证明】 (Ⅰ)首先按导数定义有

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_0^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right].$$

再由定积分的性质得

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t.$$

最后由定积分中值定理及连续性知，$\exists\xi$ 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间，使得

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)\Delta x,$$

于是
$$F'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = f(x).$$

【评注】 这是一道证明基本定理的试题.(第一次考了基本定理的证明)

① 若用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\times}{=\!=\!=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t\right]'_{\Delta x}}{(\Delta x)'} = \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x),$$

这就犯了一个大错误：用该定理的结论来证明这个定理.

或利用拉格朗日中值定理：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F'(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = f(x),$$

这也同样用到了要证的结论，也是错误的证明.

② 有的考生写错了导数定义式，如写成 $F'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t}{x}$.

(Ⅱ) $$G(x) = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - x\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t,$$

要证 $G(x)$ 以 2 为周期，即证 $G(x+2)-G(x)\equiv 0\quad(\forall x)$.

方法 1° 由

$$\begin{aligned}G(x+2)-G(x) &= 2\int_0^{x+2} f(t)\,\mathrm{d}t - (x+2)\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^{x+2} f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $[G(x+2)-G(x)]' = 2f(x+2)-2f(x) = 0\quad(\forall x)$(因为 $f(x)$ 以 2 为周期).

$\Rightarrow$ $G(x+2)-G(x) = 常数 = [G(x+2)-G(x)]\big|_{x=0} = G(2) = 0\quad(\forall x)$.

方法 2° 同前计算

$$\begin{aligned}G(x+2)-G(x) &= 2\int_0^{x+2} f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_x^{x+2} f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 0\quad(\forall x).\end{aligned}$$

这一证法中利用了已知结论，即周期函数的积分性质：若 $f(x)$ 是连续函数以 T 为周期，则

$$\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\quad(\forall x).$$

【评注】 在(Ⅱ)的证明中，主要有以下两个错误：

① 因为 $f(x)$ 以 2 为周期，所以 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x+2} f(t)\,\mathrm{d}t$;

② 因为 $G'(x)$ 以 2 为周期，所以 $G(x)$ 也以 2 为周期.

25 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 在点(0,0)处的切线相同，写出此切线方程，

并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

【解】 由已知条件得

$$f(0)=0,\quad f'(0)=\left(\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}\,dt\right)'_x\Bigg|_{x=0}=\frac{e^{-\arctan^2 x}}{1+x^2}\Bigg|_{x=0}=1,$$

故所求切线方程为 $y=x$. 由导数定义及数列极限与函数极限的关系可得

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}\overset{*}{=\!=}2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2f'(0)=2.$$

【评注】 ① 设 $f(0)=0$，则 $f'(0)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$. 设 $f(0)=0, f'(0)=A$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x_n)}{x_n}=A$，其中 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$.

② 题解中"$*$"以下部分按洛必达法则计算不得分. 因为本题题设条件中未设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有连续的一阶导数，所以不能用洛必达法则做成

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1}=f'(0)=1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)=2.$$

当然更不能对 n 用洛必达法则

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f'\left(\frac{2}{n}\right)\left(-\frac{2}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}=2f'(0).$$

③ 本题考查：求变上限确定的函数的导数，求切线方程，利用导数定义求极限.

26 使不等式 $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt>\ln x$ 成立的 x 的范围是

(A) $(0,1)$.　　(B) $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$.　　(C) $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.　　(D) $(\pi,+\infty)$.

【分析】 令 $F(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt-\ln x$，则 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导且 $F(1)=0$. 又

$$F'(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{1}{x}=-\frac{1-\sin x}{x}\begin{cases}<0, & x>0\text{ 且 }x\neq 2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\[2mm] =0, & x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

(其中 $k=0,1,2,\cdots$). 这表明 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格单调减少，从而 $F(x)>F(1)=0$ 在 $(0,1)$ 内成立，$F(x)<F(1)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 内成立，即应选(A).

【评注】 ① 本题主要考查函数单调性的判别方法、变上限定积分函数的求导运算等.

② 不少考生错误地选择了(B)，这可能是因为这部分考生对利用导数研究函数变化的方法掌握不牢，混淆了一些概念和计算方法造成的. 例如，有可能是如下求解的：

令 $f(x)=\displaystyle\int_t^x \frac{\sin t}{t}\,dt-\ln x$，则有

$$f'(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{1}{x}\leqslant 0,$$

可知 $f(x)$ 单调减少．

又 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,从而可知当 $x<\frac{\pi}{2}$ 时,$f(x)>0$;当 $x>\frac{\pi}{2}$ 时,$f(x)<0$．因此推导出当 $x\in\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 时 $f(x)>0$,也即不等式成立．

27 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}e^{-t^2}dt=\int_0^x x\sin t^2 dt$ 确定,则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ________.

【分析】 题设方程可改写为 $\int_0^{x+y}e^{-t^2}dt=x\int_0^x\sin t^2dt$,把它看成关于变量 x 的恒等式,两端分别对 x 求导数可得

$$e^{-(x+y)^2}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=\int_0^x\sin t^2dt+x\sin x^2\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{(x+y)^2}\int_0^x\sin t^2dt+xe^{(x+y)^2}\sin x^2-1.$$

令 $x=0$ 即知 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-1$．

28 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)dt$,则

(A) $F(x)$ 在 $x=0$ 点不连续.

(B) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,在 $x=0$ 点不可导.

(C) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且满足 $F'(x)=f(x)$．

(D) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,但不一定满足 $F'(x)=f(x)$．

【分析】 当 $x\geqslant 0$ 时 $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x dt=x$;当 $x<0$ 时 $F(x)=\int_0^x f(t)dt=-\int_0^x dt=-x$,综合得 $F(x)=|x|$．即 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,在 $x=0$ 点不可导,故应选(B)．

【评注】 把本题讨论的问题一般化可得如下结论:

设 $f(x)=\begin{cases}f_1(x), & a<x<x_0,\\ A, & x=x_0,\\ f_2(x), & x_0<x<b,\end{cases}$ 其中 $f_1(x)$ 在 $(a,x_0]$ 上连续,$f_2(x)$ 在 $[x_0,b)$ 上连续,但 $f(x)$ 以 $x=x_0$ 为跳跃间断点,设 $F(x)=\int_c^x f(t)dt$,$c\in(a,b)$ 固定,则 $F(x)$ 在 (a,b) 内连续,但在 $x=x_0$ 不可导.

29 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且满足

$$\int_a^x f(t)dt\geqslant\int_a^x g(t)dt,x\in[a,b),\quad \int_a^b f(t)dt=\int_a^b g(t)dt,$$

证明: $\int_a^b xf(x)dx\leqslant\int_a^b xg(x)dx$.

【分析】 容易发现

$$\int_a^x f(t)dt\geqslant\int_a^x g(t)dt(x\in[a,b))\quad\Leftrightarrow\quad\int_a^x[f(t)-g(t)]dt\geqslant 0,x\in[a,b),$$

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b [f(t) - g(t)]\mathrm{d}t = 0,$$

$$\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b x[f(x) - g(x)]\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

由 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续及变限定积分求导公式可把要证明的结论改写成

$$\int_a^b xG'(x)\mathrm{d}x \leqslant 0, \text{其中} \quad G(x) = \int_a^x [f(t) - g(t)]\mathrm{d}t.$$

这样就找到了证明的思路:用分部积分法计算定积分 $\int_a^b xG'(x)\mathrm{d}x$.

【证明】 令 $F(x) = f(x) - g(x), G(x) = \int_a^x F(t)\mathrm{d}t$,

由题设知 $\qquad G(x) \geqslant 0, x \in [a,b], \quad G(a) = G(b) = 0, \quad G'(x) = F(x).$

从而 $\qquad \int_a^b xF(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x\mathrm{d}G(x) = xG(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b G(x)\mathrm{d}x.$

由于 $G(x) \geqslant 0, x \in [a,b]$,故有 $\quad -\int_a^b G(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$,即 $\quad \int_a^b xF(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

因此 $\qquad \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x.$

30 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\mathrm{d}x, J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x\mathrm{d}x, K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x$,则 I,J,K 的大小关系为

(A) $I < J < K$. $\qquad$ (B) $I < K < J$.

(C) $J < I < K$. $\qquad$ (D) $K < J < I$.

【分析】 按题意,此三个积分中的反常积分收敛,为比较它们的大小,只需比较被积函数.

显然,$\sin x < \cos x < \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}\left(x \in \left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$,因为 $\ln t$ 在 $(0, +\infty)$ 单调上升,所以

$$\ln\sin x < \ln\cos x < \ln\cot x \quad \left(x \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

$\Rightarrow \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x\mathrm{d}x.$

即 $\quad I < K < J$. 选(B).

【评注】 ① $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x\mathrm{d}x$ 都是以 $x = 0$ 为瑕点的反常积分,利用分部积分法不难证明它们都是收敛的. 如:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\mathrm{d}x = x\ln\sin x\Big|_{0+}^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sin x}\cos x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sin x}\cos x\mathrm{d}x,$$

其中 $\qquad \lim\limits_{x\to0+} x\ln\sin x = \lim\limits_{x\to0+} \sin x\ln\sin x = \lim\limits_{t\to0+} t\ln t = 0, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$ 是定积分.

因此积分 I 收敛.

② 对于收敛的反常积分,类似于定积分的比较性质也成立.

31 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{k|x|}\mathrm{d}x = 1$,则 $k =$ ________.

【分析】 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{k|x|}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x = \dfrac{2}{k}\mathrm{e}^{kx}\Big|_0^{+\infty} \xlongequal{k<0} -\dfrac{2}{k} \xlongequal{\text{令}} 1$,则 $k = -2$.

注意，当 $k \geqslant 0$ 时 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|}dx$ 发散.

32 设 m,n 均是正整数，则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性

(A) 仅与 m 的取值有关.　　　(B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m,n 的取值都有关.　　　(D) 与 m,n 的取值都无关.

【分析】 这是以 $x=0,x=1$ 为瑕点的瑕积分.

$$I \xlongequal{\text{记}} \int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx \xlongequal{\text{记}} I_1+I_2,$$

仅当 I_1,I_2 均收敛时，瑕积分 I 才收敛，否则 I 就发散.

这里不能按反常积分敛散性概念，通过求原函数的极限的方法来判断敛散性，因而只能按反常积分敛散性判别法则来判断.这里的被积函数是正值函数，有如下法则：

设 $f(x)$ 在 (a,b) 非负，$\forall[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，$f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可积，又设 $x=a$（或 $x=b$）是 $f(x)$ 的瑕点，且

$$\lim_{x\to a+0}(x-a)^p f(x) = l\left(\text{或}\lim_{x\to b-0}(b-x)^p f(x) = l\right),$$

则当 $p<1$ 且 $0\leqslant l<+\infty$ 时瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

由
$$f(x) \xlongequal{\text{记}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \sim \frac{\left[(-x)^2\right]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}} = x^{\frac{2}{m}-\frac{1}{n}}(x\to 0+)$$

$\Rightarrow$
$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}} f(x) = 1.$$

又 m,n 为正整数 $\Rightarrow$ $p \xlongequal{\text{记}} \frac{1}{n}-\frac{2}{m} < 1 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ 收敛.

$\forall 0<p<1$,

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)^p f(x) = \lim_{x\to 1-0}(1-x)^p \frac{\ln^{\frac{2}{m}}(1-x)}{\sqrt[n]{x}} = 0\ (\forall\ \text{正整数}\ n,m).$$

$\Rightarrow$
$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx\ \text{收敛}.$$

因此，$\forall$ 正整数 m,n，$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 均收敛.故选(D).

【评注】 ① 当 $\frac{2}{m}-\frac{1}{n}\geqslant 0$ 时，$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 是定积分.

② $\forall \alpha>0,\beta>0$，有 $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$.

33 设 $g(x)=\int_0^x f(u)du$，其中

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1), & \text{若}\ 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{3}(x-1), & \text{若}\ 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$ 则 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内

(A) 无界.　　　　(B) 递减.　　　　(C) 不连续.　　　　(D) 连续.

【分析】 本题有两种方法:一种是先把 $g(x)$ 的表达式求出来后再研究它的性质;另一种是直接利用已有结论.

方法 1° $$g(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{2}(u^2+1)\,du, & 0\leqslant x<1,\\ \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}(u^2+1)\,du+\int_1^x \frac{1}{3}(u-1)\,du, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}x^3+x\right), & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}x^2-x\right)+\dfrac{5}{6}, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

于是 $g(x)$ 分别在 $[0,1)$ 与 $[1,2]$ 上连续,又

$$\lim_{x\to1^-}g(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)=\frac{2}{3},\quad g(1)$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)+\frac{5}{6}\right]\Bigg|_{x=1}=\frac{2}{3},$$

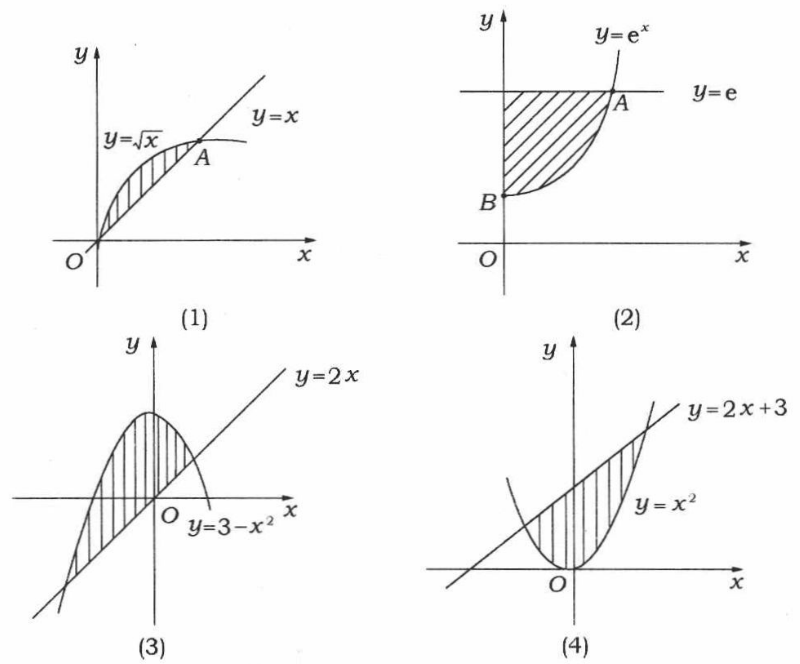
即 $g(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上连续,故应选(D).

方法 2° 可直接用已有结论:"若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,于是 $g(x)=\int_a^x f(u)\,du$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数". 本题中 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上分段连续,且有界,从而在 $[0,1]$ 上可积,于是 $g(x)=\int_a^x f(u)\,du$ 在 $[0,2]$ 上连续,故应选(D).

第六章　定积分的应用

习题 6－2　定积分在几何学上的应用

1 求下列各图中阴影部分的面积：



第 1 题图

【解】 (1) 两曲线的交点是 $A(1,1)$，$B(0,0)$，故

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\quad 或\quad S=\int_0^1(y-y^2)\mathrm{d}y=\frac{1}{6}.$$

(2) 曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 与直线 $y=\mathrm{e}$ 的交点是 $A(1,\mathrm{e})$，与 y 轴的交点是 $B(0,1)$，故

$$S=\int_0^1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=1\quad 或\quad S=\int_1^{\mathrm{e}}\ln y\mathrm{d}y=1.$$

(3) 两曲线的交点是 $A(1,2)$，$B(-3,-6)$，故 $S=\int_{-3}^1(3-x^2-2x)\mathrm{d}x=\dfrac{32}{3}$.

(4) 两曲线的交点是 $A(-1,1)$，$B(3,9)$，故 $S=\int_{-1}^3(2x+3-x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{32}{3}$.

2 求由下列各组曲线所围成的图形的面积：

(1) $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$（两部分都要计算）；

(2) $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $x=2$；

(3) $y=\mathrm{e}^x$，$y=\mathrm{e}^{-x}$ 与直线 $x=1$；

(4) $y = \ln x$, y 轴与直线 $y = \ln a$, $y = \ln b$ $(b > a > 0)$.

【解】 (1) 如图 $D_1 = D_2$ 解方程组 $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2, \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases}$ 得交点 $A(2,2)$.

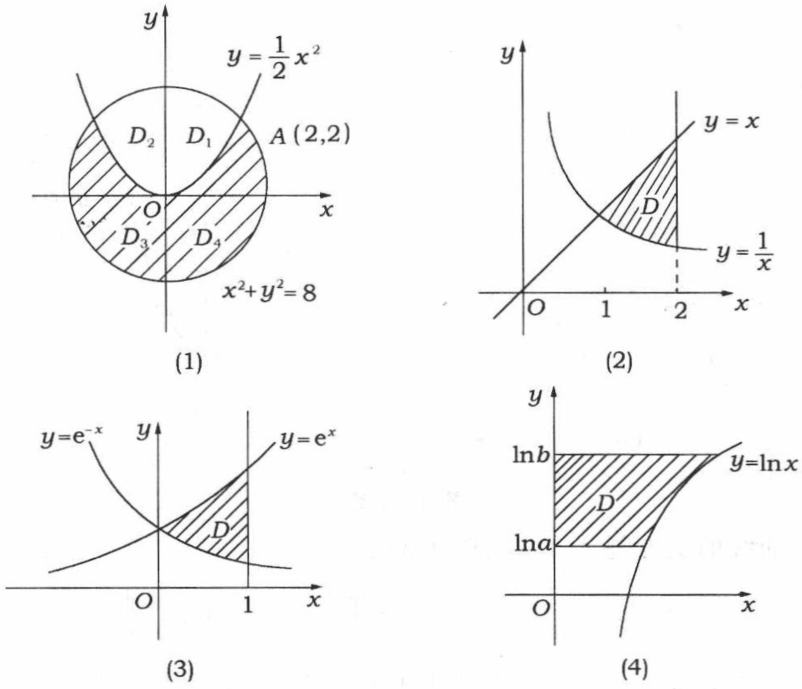
$D_1 = \int_0^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \dfrac{1}{2}x^2 \right) dx = \pi + \dfrac{2}{3}$, 所以 $D_1 + D_2 = 2\pi + \dfrac{4}{3}$.

$D_3 + D_4 = 8\pi - \left(2\pi + \dfrac{4}{3} \right) = 6\pi - \dfrac{4}{3}$.

(2) $D = \int_1^2 \left(x - \dfrac{1}{x} \right) dx = \dfrac{3}{2} - \ln 2$.

(3) $D = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = e + \dfrac{1}{e} - 2$.

(4) $D = \int_{\ln a}^{\ln b} e^y dy = b - a$.



第 2 题图

3 求抛物线 $y = -x^2 + 4x - 3$ 及其在点 $(0, -3)$ 和 $(3,0)$ 处的切线所围成图形的面积.

【解】 $y' = -2x + 4$, 则 $y'(0) = 4$, $y'(3) = -2$.

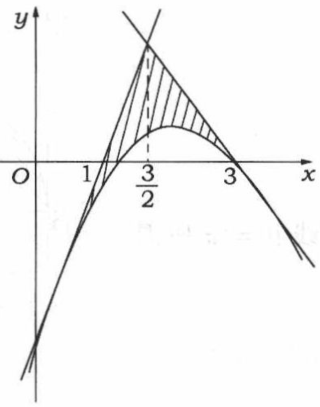
所以抛物线在点 $(0, -3)$ 处的切线方程是 $y = 4x - 3$.

在点 $(3,0)$ 处的切线方程是 $y = -2x + 6$.

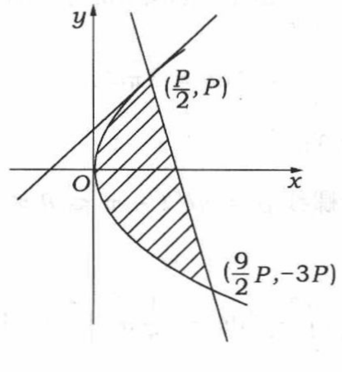
两切线的交点是 $\left(\dfrac{3}{2}, 3 \right)$, 故所求面积为

$$S = \int_0^{\frac{3}{2}} [(4x - 3) - (-x^2 + 4x - 3)] dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 [(-2x + 6) - (-x^2 + 4x - 3) dx]$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 (x^2 - 6x + 9) dx = \frac{9}{4}.$$



第 3 题图



第 4 题图

4 求抛物线 $y^2 = 2px$ 及其在点$\left(\frac{p}{2},p\right)$处的法线所围图形的面积.

【解】 由 $2yy' = 2p$,得 $y' = \frac{p}{y}$, $y'\big|_{(\frac{p}{2},p)} = 1$. 故抛物线在$\left(\frac{p}{2},p\right)$处的法线方程为

$$y - p = -\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

即 $x + y = \frac{3}{2}p$. 该法线与抛物线的交点分别是$\left(\frac{p}{2},p\right)$和$\left(\frac{9}{2}p,-3p\right)$. 于是得所求面积为

$$S = \int_{-3p}^{p}\left[\left(\frac{3}{2}p - y\right) - \frac{y^2}{2p}\right]dy = \frac{16}{3}p^2.$$

5 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

(1)$\rho = 2a\cos\theta$; (2)$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$; (3)$\rho = 2a(2 + \cos\theta)$.

【解】 (1)$A = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}(2a\cos\theta)^2 d\theta = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta = \pi a^2.$

(2) 由对称性可知,所求面积为第一象限部分面积的4倍,记曲线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ 上的点为(x,y),因此

$$A = 4\int_0^a y dx \xlongequal{x = a\cos^3 t} 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}[a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)]dt$$

$$= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t - \sin^6 t)dt = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

【注】 对于参数方程的处理方式一般可采用本题的方法,首先根据问题化为积分(记曲线上的点为(x,y)),对于积分根据参数方程进行换元,即可化为关于参数的积分,再进行计算.

(3)$A = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[2a(2 + \cos\theta)]^2 d\theta = 2a^2\int_0^{2\pi}(4 + \cos^2\theta)d\theta$

$$= 2a^2\int_0^{2\pi}(4 + \cos^2\theta)d\theta = 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4 + \cos^2\theta)d\theta = 18\pi a^2.$$

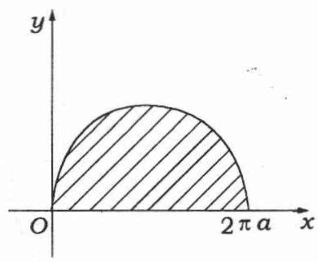
6 计算由摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 的一拱$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$与横轴所围图形的面积.

【解】 当 $t = 0$ 时,$x = 0$, $t = 2\pi$ 时,$x = 2\pi a$. 所以

$$S=\int_0^{2\pi a}y\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\mathrm{d}a(t-\sin t)$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=3\pi a^2.$$

即该图形的面积为 $3\pi a^2$.



第 6 题图

7 求对数螺线 $\rho=ae^{\theta}(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 及射线 $\theta=\pi$ 所围图形的面积.

【解】 $S=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\rho^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}a^2\int_{-\pi}^{\pi}e^{2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{4}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})$.

8 求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积:

(1) $\rho=3\cos\theta$ 及 $\rho=1+\cos\theta$; (2) $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 及 $\rho^2=\cos2\theta$.

【解】 (1) 求两曲线的交点 $\begin{cases}\rho=3\cos\theta,\\ \rho=1+\cos\theta,\end{cases}$ 得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$,

所以 $\theta=\pm\frac{\pi}{3}$,又由曲线 $\rho=3\cos\theta$,其中 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$,且图形关于 x 轴对称,故所求面积为

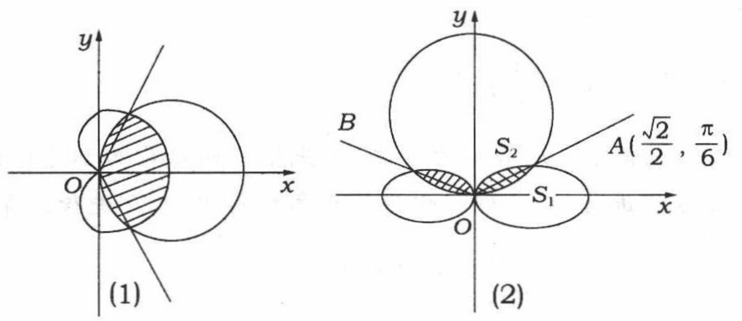
$$S=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(3\cos\theta)^2\right]\mathrm{d}\theta=\frac{5}{4}\pi.$$

(2) 伯努利双纽线 $\rho^2=\cos2\theta$ 的图形介于射线 $\theta=-\frac{\pi}{4},\theta=\frac{\pi}{4}$ 及 $\theta=\frac{3\pi}{4},\theta=\frac{5\pi}{4}$ 之间,两曲线的交点 $\begin{cases}\rho=\sqrt{2}\sin\theta,\\ \rho^2=\cos2\theta,\end{cases}$ 即 $2\sin^2\theta=\cos2\theta$.

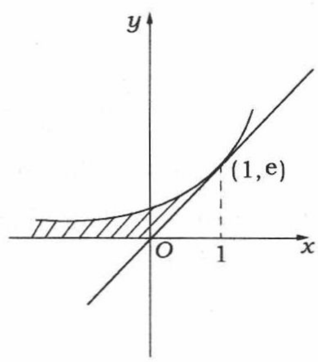
所以 $\sin^2\theta=\frac{1}{4}$, $\sin\theta=\pm\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\theta=\frac{5\pi}{6}$.

故交点为 $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{6}\right)$,$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$. 由于图形位于 x 轴上方且关于 y 轴对称,故所求面积为

$$S=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}(\sqrt{2}\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(\cos2\theta)\mathrm{d}\theta\right]=\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$



第 8 题图



第 9 题图

9 求位于曲线 $y=e^x$ 下方,该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间所围图形的面积.

【解】 设曲线 $y=e^x$ 过原点的切线的切点为 (x_0,y_0),由 $y'=e^x$,得该切线的方程是 $y=e^{x_0}x$. 由 $y_0=e^{x_0}x_0$ 及 $y_0=e^{x_0}$,得 $x_0=1,y_0=e$. 即切线方程是 $y=ex$. 切点为 $(1,e)$. 从而所求面积为

$$S = \int_{-\infty}^{0} e^x dx + \int_0^1 (e^x - ex) dx = \frac{e}{2}.$$

10 求由抛物线 $y^2 = 4ax$ 与过焦点的弦所围图形的面积的最小值.

【解】 取焦点为极坐标原点,抛物线的轴为极轴.则抛物线 $y^2 = 4ax$ 的极坐标方程为 $\rho = \frac{2a}{1-\cos\theta}$ $(0 < \theta < 2\pi)$.

过焦点的动弦 $\theta = t$,由图形的对称性,不妨限定 $0 < t < \pi$,则动弦与抛物线所围图形的面积 A 为

$$A(t) = \int_t^{t+\pi} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_t^{t+\pi}\left(\frac{2a}{1-\cos\theta}\right)^2 d\theta,$$

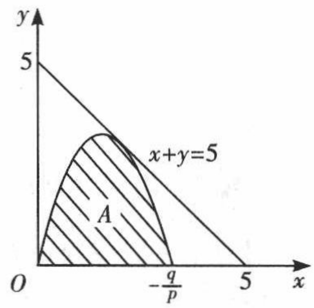
$$A'(t) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2a}{1-\cos(\pi+t)}\right)^2 - \left(\frac{2a}{1-\cos t}\right)^2\right] = -\frac{8a^2\cos\theta}{\sin^4\theta}.$$

在 $(0,\pi)$ 内,$A(t)$ 有唯一弦点 $t = \frac{\pi}{2}$,也就是说当弦与极坐标轴垂直时,所围面积最小,最小面积为

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{4a^2}{(1-\cos\theta)^2} d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \csc^4\frac{\theta}{2} d\theta = \frac{8}{3}a^2.$$

11 已知抛物线 $y = px^2 + qx$(其中 $p < 0, q > 0$)在第一象限内与直线 $x + y = 5$ 相切,且此抛物线与 x 轴所围成的图形的面积为 A.问 p 和 q 为何值时,A 达到最大值,并求出此最大值.

【解】 依题意知,抛物线如图所示,求得它与 x 轴交点的横坐标为 $x_1 = 0, x_2 = -\frac{q}{p}$.



抛物线与 x 轴所围成的图形面积为

$$A = \int_0^{-\frac{q}{p}} (px^2 + qx) dx = \left[\frac{p}{3}x^3 + \frac{q}{2}x^2\right]_0^{-\frac{q}{p}} = \frac{q^3}{6p^2}.$$

因直线 $x + y = 5$ 与抛物线 $y = px^2 + qx$ 相切,故它们有惟一交点.由方程组

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ y = px^2 + qx, \end{cases}$$

得 $px^2 + (q+1)x - 5 = 0$,其判别式 $\Delta = (q+1)^2 + 20p = 0$,解得 $p = -\frac{1}{20}(1+q)^2$,代入面积 A,得

$$A(q) = \frac{200q^3}{3(1+q)^4}.$$

令 $A'(q) = \frac{200q^2(3-q)}{3(q+1)^5} = 0$,得惟一驻点 $q = 3$.当 $0 < q < 3$ 时,$A'(q) > 0$,当 $q > 3$ 时,$A'(q) < 0$.于是,当 $q = 3$ 时,$A(q)$ 取极大值,也是最大值.此时 $p = -\frac{4}{5}$,最大值 $A = \frac{225}{32}$.

12 由 $y = x^3, x = 2, y = 0$ 所围成的图形,分别绕 x 轴及 y 轴旋转,计算所得两个旋转体的体积.

【解】 (1) 图形绕 x 轴旋转,该体积为

$$V=\int_0^2\pi(x^3)^2\mathrm{d}x=\frac{128}{7}\pi.$$

(2) 图形绕 y 轴旋转,则该立体可看作圆柱体(即由 $x=2,y=8,x=0,y=0$ 所围成的图形绕 y 轴所得的立体)减去由曲线 $x=\sqrt[3]{y},y=8,x=0$ 所围成的图形绕 y 轴所得的立体,因此体积为

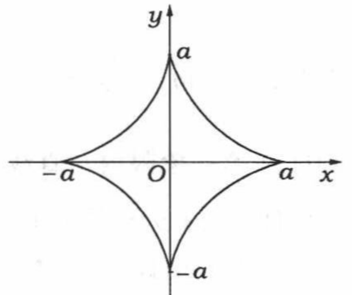
$$V=\pi\cdot 2^2\cdot 8-\int_0^8\pi(\sqrt[3]{y})^2\mathrm{d}y=\frac{64}{5}\pi.$$

13 把星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所围图形绕 x 轴旋转(如图),计算所得旋转体的体积.

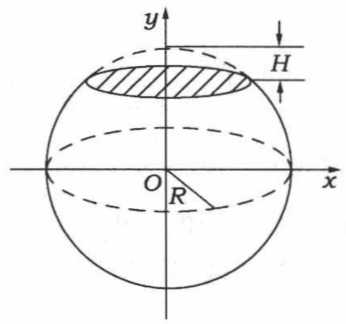
【解】 该曲线的参数方程是 $x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t,0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

由曲线关于 x 轴及 y 轴的对称性,所求体积可表示成为

$$V_x=2\pi\int_0^a y^2\mathrm{d}x=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0(a\sin^3 t)^2\mathrm{d}(a\cos^3 t)=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{32}{105}\pi a^3.$$



第 13 题图



第 14 题图

14 用积分方法证明图中球缺的体积为 $V=\pi H^2\left(R-\dfrac{H}{3}\right)$.

【证】 该球缺可看成是由 xOy 平面上的圆周 $x^2+y^2=R^2$ 上的一段绕 y 轴旋转而产生的.于是有

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{R-H}^R x^2\mathrm{d}y=\pi\int_{R-H}^R(R^2-y^2)\mathrm{d}y\\&=\pi\left(R^2y-\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{R-H}^R=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).\end{aligned}$$

15 求下列已知曲线所围成的图形,按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

(1) $y=x^2,x=y^2$,绕 y 轴;

(2) $y=\arcsin x,x=1,y=0$,绕 x 轴;

(3) $x^2+(y-5)^2=16$,绕 x 轴;

(4) 摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ 的一拱,$y=0$,绕直线 $y=2a$.

【解】 (1) 曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 的交点是$(0,0)$,$(1,1)$,图形的上、下边界曲线分别是 $x_{上}=\sqrt{y},\quad x_{下}=y^2$,所以

$$V_y=\pi\int_0^1(x_{上}^2-x_{下}^2)\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(y-y^4)\mathrm{d}y=\frac{3}{10}\pi.$$

(2) $V=\int_0^1\pi(\arcsin x)^2\mathrm{d}x=[\pi x(\arcsin x)^2]_0^1-2\pi\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi^3}{4}-2\pi\left\{[-\sqrt{1-x^2}\arcsin x]_0^1+\int_0^1\mathrm{d}x\right\}=\frac{\pi^3}{4}-2\pi.$$

(3) 曲线方程可表示成为 $y=5\pm\sqrt{16-x^2}$，$-4\leqslant x\leqslant 4$. 所求立体的体积可看成是由曲线 $y_{上}=5+\sqrt{16-x^2}$ 所产生的旋转体体积与曲线 $y_{下}=5-\sqrt{16-x^2}$ 所产生的旋转体体积之差，即

$$V_x=\pi\int_{-4}^4(y_{上}^2-y_{下}^2)\mathrm{d}x=\pi\int_{-4}^4[(5+\sqrt{16-x^2})^2-(5-\sqrt{16-x^2})^2]\mathrm{d}x$$

$$=20\pi\int_{-4}^4\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x=40\pi\int_0^4\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x=160\pi^2.$$

(4) 作坐标平移变换，即令 $\tilde{x}=x,\tilde{y}=y-2a$. 则在新坐标系下，摆线方程成为：$\tilde{x}=a(t-\sin t),\tilde{y}=a(1-\cos t)-2a$. 直线 $y=0$，成为 $\tilde{y}=-2a$. 并且图形绕直线 $y=2a$ 旋转所产生立体，即是其在新坐标系下，由曲线 $\tilde{x}=a(t-\sin t),\tilde{y}=a(1-\cos t)-2a$ 与直线 $\tilde{y}=-2a$ 所围图形绕 $\tilde{x}$ 轴旋转所产生的立体，故

$$V=V_{\tilde{x}}=\pi\int_0^{2\pi a}(\tilde{y}_{上}^2-\tilde{y}_{下}^2)\mathrm{d}\tilde{x}$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}[(-2a)^2-(a(1-\cos t)-2a)^2]\mathrm{d}a(t-\sin t)$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}[4(1-\cos t)^2-(1-\cos t)^3]\mathrm{d}t=7\pi^2a^3.$$

16 求圆盘 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 绕 $x=-b(b>a>0)$ 旋转所成旋转体的体积.

【解】 记由曲线 $x=\sqrt{a^2-y^2},x=-b,y=-a,y=a$ 围成的图形绕 $x=-b$ 旋转所得旋转体的体积为 V_1，由曲线 $x=-\sqrt{a^2-y^2},x=-b,y=-a,y=a$ 围成的图形绕 $x=-b$ 旋转所得旋转体的体积为 V_2，则所求体积为

$$V=V_1-V_2=\int_{-a}^a\pi(\sqrt{a^2-y^2}+b)^2\mathrm{d}y-\int_{-a}^a\pi(-\sqrt{a^2-y^2}+b)^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-a}^a4\pi b\sqrt{a^2-y^2}\mathrm{d}y\xlongequal{y=a\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\pi a^2b\cos^2t\mathrm{d}t$$

$$=8\pi a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t=2\pi^2a^2b.$$

17 设有一截锥体，其高为 h，上、下底均为椭圆，椭圆的轴长分别为 $2a$、$2b$ 和 $2A$、$2B$，求这截锥体的体积.

【解】 用与下底相距 x 且平行于底面的平面去截该立体得到一个椭圆，记其半轴长分别为 u、v，则

$$u=\frac{a-A}{h}x+A,\quad v=\frac{b-B}{h}x+B,$$

该椭圆面积为 $\pi\left(\frac{a-A}{h}x+A\right)\left(\frac{b-B}{h}x+B\right)$，因此体积为

$$V=\int_0^h\pi\left(\frac{a-A}{h}x+A\right)\left(\frac{b-B}{h}x+B\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\pi h[2(ab+AB)+aB+bA].$$

18 计算底面是半径为 R 的圆，而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体的体积(如图).

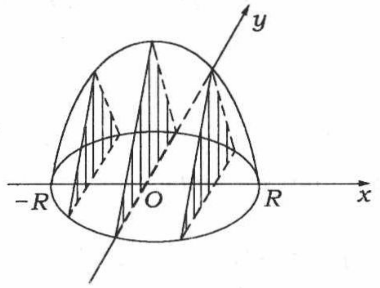
【解】 以底面上的固定直径所在直线为 x 轴，过该直径的中点且垂直于 x 轴的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系. 则底面圆周的方程为 $x^2+y^2=R^2$.

过区间 $[-R,R]$ 上任意一点 x，且垂直于 x 轴的平面截立体的截面为一等边三角形，若设与 x 对应的圆周上的点为 (x,y)，则该等边三角形的边长为 $2y$，故其面积等于

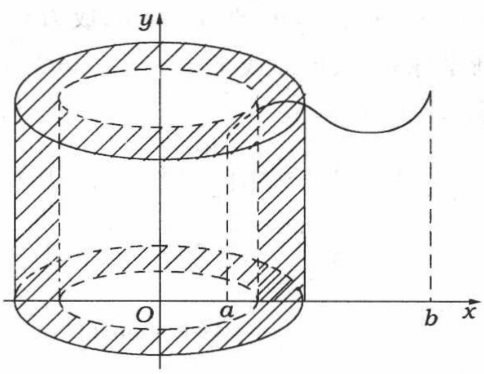
$$A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(2y)^2=\sqrt{3}y^2=\sqrt{3}(R^2-x^2)\quad(-R\leqslant x\leqslant R).$$

从而该立体的体积为

$$V=\int_{-R}^{R}A(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-R}^{R}\sqrt{3}(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3.$$



第 18 题图



第 19 题图

19 证明：由平面图形 $0\leqslant a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant f(x)$ 绕 y 轴旋转所得立体的体积为：

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

【证】 对于任意的 $x\in[a,b]$，在区间 $[a,b]$ 上的小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 所对应的小窄条，绕 y 轴旋转所产生的立体为图中阴影部分，设其体积为 $\mathrm{d}V$. 当 $\mathrm{d}x$ 很小时，可将该立体视为以 $\mathrm{d}x$ 为高，以点 $(x,0)$ 所产生的圆周长 $2\pi x$ 为长，$f(x)$ 为宽的一个长方体，故其体积为

$$\mathrm{d}V=2\pi xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

从而所求立体的体积为

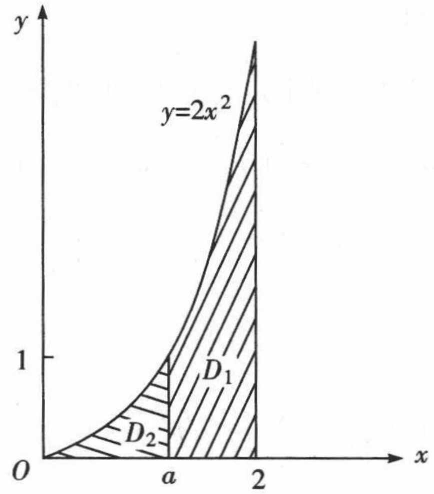
$$V=\int_a^b\mathrm{d}V=\int_a^b 2\pi xf(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

20 利用题 19 的结论，计算曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

【解】 $V=2\pi\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=\pi^2\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=2\pi^2.$

【注】 在计算积分时，这里利用了 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$

21 设由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 D_1，由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 D_2，其中 $0<a<2$ 如图



(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1，D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2；

(2) 问当 a 为何值时，$V_1 + V_2$ 取得最大值?试求此最大值.

【解】 (1) $V_1 = \pi\int_a^2 (2x^2)^2 dx = \frac{4\pi}{5}(32 - a^5)$；

$$V_2 = \pi a^2 \cdot 2a^2 - \pi\int_0^{2a^2} \frac{y}{2}dy = 2\pi a^4 - \pi a^4 = \pi a^4.$$

(2) 设

$$V = V_1 + V_2 = \frac{4\pi}{5}(32 - a^5) + \pi a^4,$$

由 $V = 4\pi a^3(1 - a) = 0$，解得区间 $(0,2)$ 内惟一驻点 $a = 1$.

当 $0 < a < 1$ 时，$V' > 0$；当 $a > 1$ 时，$V' < 0$. 因此 $a = 1$ 是极大值点也是最大值点，此时 $V_1 + V_2$ 取得最大值 $\frac{129}{5}\pi$.

22 计算曲线 $y = \ln x$ 上相应于 $\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8}$ 的一段弧的长度.

【解】 $l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + y'^2}dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}dx$

$$= \left(\sqrt{1 + x^2} - \ln\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

23 计算半立方抛物线 $y^2 = \frac{2}{3}(x - 1)^3$ 被抛物线 $y^2 = \frac{x}{3}$ 截得的一段弧的长度.

【解】 联立方程 $\begin{cases} y^2 = \frac{2}{3}(x - 1)^3, \\ y^2 = \frac{x}{3}, \end{cases}$ 解得两曲线的交点 $\left(2, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

又方程两边 $y^2 = \frac{2}{3}(x - 1)^3$ 求导得 $2yy' = \frac{2}{3}\cdot 3(x - 1)^2$，即 $y' = \frac{(x - 1)^2}{y}$.

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{(x - 1)^4}{y^2} = 1 + \frac{\frac{3}{2}y^2(x - 1)}{y^2} = \frac{1}{2}(3x - 1).$$

而所求弧长关于 x 轴对称. 故其长度

$$l = 2\int_1^2 \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^2\sqrt{\frac{1}{2}(3x-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right].$$

24 计算抛物线 $y^2 = 2px$ 从顶点到其上一点 $M(x,y)$ 的弧长.

【解】 由 $2yy' = 2p, y' = \dfrac{p}{y}$ 得 $1+y'^2 = 1+\dfrac{p^2}{y^2}$.

从而

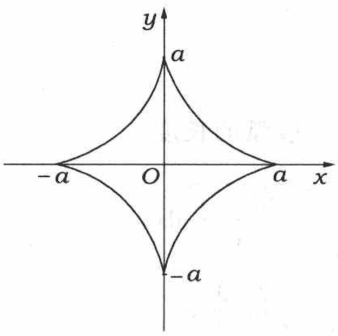
$$\begin{aligned} l &= \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^x\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^y \frac{1}{y}\sqrt{p^2+y^2}\,\mathrm{d}\frac{y^2}{2p} = \frac{1}{p}\int_0^y\sqrt{p^2+y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{p}\left[\frac{y}{2}\sqrt{p^2+y^2}+\frac{p^2}{2}\ln\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right)\right]\Bigg|_0^y \\ &= \frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}. \end{aligned}$$

25 计算星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$（如图）的全长.

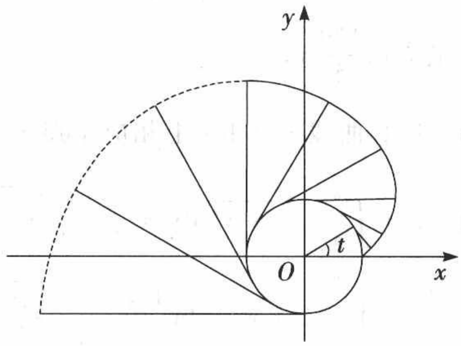
【解】 $x'_t = -3a\cos^2 t\sin t$, $\quad y'_t = 3a\sin^2 t\cos t$.

$x'^2_t + y'^2_t = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t$,利用曲线的对称性,

$$\begin{aligned} l &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 2t}\,\mathrm{d}t = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,\mathrm{d}t = 3a(-\cos 2t)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \end{aligned}$$



第 25 题图



第 26 题图

26 将绕在圆(半径为 a)上的细线放开拉直,使细线与圆周始终相切(如图),细线端点画出的轨迹叫作圆的渐伸线,它的方程为

$$x = a(\cos t + t\sin t),\quad y = a(\sin t - t\cos t).$$

算出这曲线上相应于 t 从 0 变到 π 的一段弧的长度.

【解】 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = at\cos t$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = at\sin t$,因此有

$$s = \int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}at\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}\pi^2.$$

27 在摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 上求分摆线第一拱成 1∶3 的点的坐标.

【解】 $x'_t=a(1-\cos t)$，　$y'_t=a\sin t$，　$x'^2_t+y'^2_t=2a^2(1-\cos t)$.
则摆线第一拱对应于区间 $[0,t]$ 上弧度的长度为

$$l(t)=\int_0^t\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\,dt=\int_0^t\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

即　$l(t)=4a(1-\cos\dfrac{t}{2})$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，且第一拱的长度为　$l(2\pi)=8a$.

设曲线上对应于 $t=t_0$ 处的点分第一拱为 1∶3，则有

$$l(t_0)=\frac{1}{4}l(2\pi)=2a.$$

即　$4a(1-\cos\dfrac{t_0}{2})=2a$.　所以　$\cos\dfrac{t_0}{2}=\dfrac{1}{2}$.

于是　$\dfrac{t_0}{2}=\dfrac{\pi}{3}$，故 $t_0=\dfrac{2\pi}{3}$. 于是可得分点的坐标是 (x_0,y_0)，

其中　$x_0=a\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，　$y_0=\dfrac{3}{2}a$.

28 求对数螺线 $\rho=e^{a\theta}$ 相应于 $0\leqslant\theta\leqslant\varphi$ 的一段弧长.

【解】 $l=\displaystyle\int_0^{\varphi}\sqrt{e^{2a\theta}+a^2e^{2a\theta}}\,d\theta=\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\varphi}-1)$.

29 求曲线 $\rho\theta=1$ 相应于 $\dfrac{3}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{4}{3}$ 的一段的弧长.

【解】 $\rho'_\theta=-\dfrac{1}{\theta^2}$，　$\rho^2+\rho'^2=\dfrac{1}{\theta^2}+\dfrac{1}{\theta^4}=\dfrac{1+\theta^2}{\theta^4}$.

所以　$$l=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta^2}d\theta$$

$$=\left[\ln(\theta+\sqrt{\theta^2+1})-\frac{\sqrt{\theta^2+1}}{\theta}\right]\Bigg|_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}=\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}.$$

30 求心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 的全长.

【解】 $\rho'_\theta=-a\sin\theta$，所以　$\rho^2+\rho'^2=a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta=2a^2(1+\cos\theta)$.
又注意到该曲线关于极轴对称，故有

$$l=2\int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta$$

$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a\sin\frac{\theta}{2}\Bigg|_0^{\pi}=8a.$$

习题 6-3　定积分在物理学上的应用

1 由实验知道，弹簧在拉伸过程中，需要的力 F(单位:N) 与伸长量 s(单位:cm) 成正比，即　$F=ks$(k 是比例常数). 如果把弹簧由原长拉伸 6cm，计算所做的功.

【解】 $W = \int_0^6 ks\mathrm{d}s = 18k(\mathrm{N}\cdot\mathrm{cm}) = 0.18k(\mathrm{J})$.

2 直径为20cm,高为80cm的圆筒内充满压强为$10\mathrm{N/cm^2}$的蒸汽,设温度保持不变,要使蒸汽体积缩小一半,问需要做多少功?

【解】 由玻意耳 - 马略特定律知

$$PV = R = 10 \times (\pi 10^2 \times 80) = 80000\pi.$$

设蒸汽体积在圆柱体内变化,底面积不变高度减少 $x$cm 时,压强为 $P(x)\mathrm{N/cm^2}$,则 $P(x)\pi 10^2(80 - x) = 80000\pi$,

$$P(x) = \frac{80000\pi}{\pi 10^2(80 - x)} = \frac{800}{80 - x}.$$

功元素为 $\mathrm{d}W = \pi 10^2 P(x)\mathrm{d}x$,于是所求的功为

$$W = \int_0^{40} \pi 10^2 \frac{800}{80 - x}\mathrm{d}x = 80000\pi \int_0^{40} \frac{\mathrm{d}x}{80 - x}$$

$$= 80000\pi[-\ln(80 - x)]\Big|_0^{40} = 80000\pi\ln 2(\mathrm{N}\cdot\mathrm{cm}) = 800\pi\ln 2(\mathrm{J}).$$

3 (1) 证明:把质量为 m 的物体从地球表面升高到 h 处所做的功是 $W = \frac{mgRh}{R + h}$,其中 g 是地面上的重力加速度,R 是地球的半径.

(2) 一个人造地球卫星的质量为173kg,在高于地面630km处进入轨道,问把该卫星从地面送到630kg的高空处,克服地球引力要做多少功?已知 $g = 9.8\mathrm{m/s^2}$,$R = 6370\mathrm{km}$.

【解】 (1) 质量为 m 的物体与地球中心相距 x 时,引力为 $F = k\frac{mM}{x^2}$,根据条件 $mg = k\frac{mM}{R^2}$,因此有 $k = \frac{R^2 g}{M}$,从而做的功为

$$W = \int_R^{R+h} \frac{mgR^2}{x^2}\mathrm{d}x = mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + h}\right) = \frac{mgRh}{R + h}.$$

(2) 做的功为 $W = \frac{mgRh}{R + h} = 971973 \approx 9.72 \times 10^5(\mathrm{kJ})$.

4 一物体按规律 $x = ct^3$ 作直线运动,介质的阻力与速度的平方成正比,计算物体由 $x = 0$ 移至 $x = a$ 时,克服介质阻力所做的功.

【解】 因为 $x = ct^3$,所以 $v = 3ct^2$,阻力 $f = -kv^2 = -9kc^2(\frac{x}{c})^{\frac{4}{3}} = -9kc^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}$.

功元素为 $\mathrm{d}W = -f(x)\mathrm{d}x$,所求的功为

$$W = \int_0^a -f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a 9kc^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x = 9kc^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\Big|_0^a = \frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}.$$

5 用铁锤将一铁钉击入木板,设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比,在击第一次时,将铁钉击入木板1cm,如果铁锤每次锤击铁钉所做的功相等,问锤击第二次时,铁钉又击入多少?

【解】 设锤击第二次时,铁钉又击入 h 厘米,由于木板对铁钉的阻力 f 与铁钉击入木板的深度 x(cm) 成正比,即 $f = kx$. 功元素为 $\mathrm{d}W = f\mathrm{d}x = kx\mathrm{d}x$.

击第一次时，锤所做的功为 $W_1 = \int_0^1 kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}k$;

击第二次时，锤所做的功为 $W_2 = \int_1^{1+h} kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}k(h^2 + 2h)$.

因为 $W_1 = W_2$，所以 $\frac{1}{2}k = \frac{1}{2}k(h^2 + 2h)$，于是

$$h^2 + 2h - 1 = 0, h = 1 \pm \sqrt{2}(\text{舍去负值}).$$

故　$h = \sqrt{2} - 1$(厘米).

6 设一圆锥形贮水池，深 15 米，口径 20 米，盛满水，今以唧筒将水吸尽，问要做多少功？

【解】 以高度 h 为积分变量，变化范围为 $[0,15]$，对该区间内任一小区间 $[h, h + \mathrm{d}h]$，体积为 $\pi\left(\frac{10}{15}h\right)^2 \mathrm{d}h$，记 γ 为水的密度，则做功为

$$W = \int_0^{15} \frac{4}{9}\pi\gamma g h^2 (15 - h)\mathrm{d}h = 1875\pi\gamma g \approx 5.76975 \times 10^7 (\mathrm{J}).$$

7 有一闸门，它的形状和尺寸如图所示，水面超过门顶 2m，求闸门上所受的水压力.

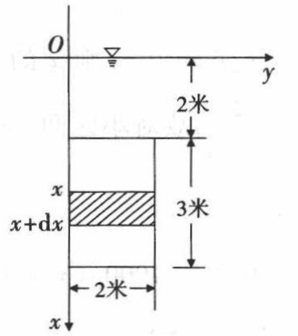
【解】 设水深 xm 的地方压强为 $p(x)$，则　$p(x) = 1000gx$.

取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[2,5]$，对该区间内任一小区间 $[x, x + \mathrm{d}x]$，压力为

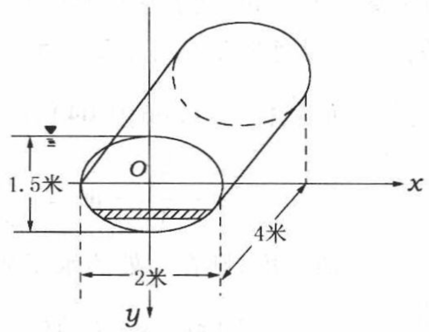
$$\mathrm{d}F = p(x)\mathrm{d}S = 2p(x)\mathrm{d}x = 2000gx\mathrm{d}x,$$

因此闸门上所受的水压力为

$$F = \int_2^5 2000gx\mathrm{d}x = 1000g(x^2)\Big|_2^5 = 21000g(\mathrm{N}) \approx 205.8(\mathrm{kN}).$$



第 7 题图



第 8 题图

8 洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体，尺寸如图所示. 当水箱装满水时，计算水箱的一个端面所受的压力.

【解】 以侧面的椭圆长轴为 x 轴，短轴为 y 轴建立坐标系，则该椭圆的方程为 $x^2 + \frac{y^2}{0.75^2} = 1$，取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[-0.75, 0.75]$，对该区间内任一小区间 $[y, y + \mathrm{d}y]$，该小区间相应的水深为 $0.75 - y$，相应面积为　$\mathrm{d}S = 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{0.75^2}}\mathrm{d}y$，得到该小区间相应的压力

$$\mathrm{d}F = 1000g(0.75 - y)\mathrm{d}S = 2000g(0.75 - y)\sqrt{1 - \frac{y^2}{0.75^2}}\mathrm{d}y,$$

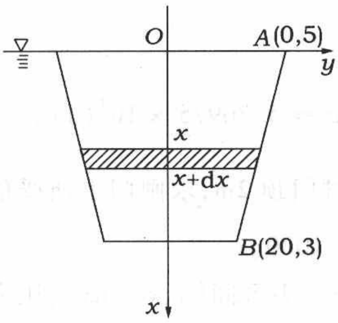
因此压力为 $F = \int_{-0.75}^{0.75} 2000g(0.75 - y)\sqrt{1 - \frac{y^2}{0.75^2}}\mathrm{d}y \approx 17318(\mathrm{N}) \approx 17.3(\mathrm{kN})$.

9 有一等腰梯形闸门,它的两条底边各长 10m 和 6m,高为 20m,较长的底边与水面相齐,计算闸门的一侧所受的水压力.

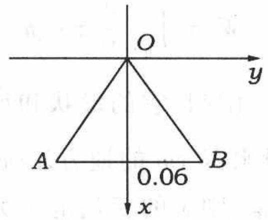
【解】 如图建立坐标系,直线 AB 的方程为 $y = -\frac{x}{10} + 5$.

压力元素为 $\mathrm{d}P = x \cdot 2y\mathrm{d}x = 2x\left(-\frac{x}{10} + 5\right)\mathrm{d}x$.

所求压力为 $P = \int_0^{20} 2x\left(-\frac{x}{10} + 5\right)\mathrm{d}x = \left[5x^2 - \frac{1}{15}x^3\right]_0^{20} = 1467(\text{吨}) = 14377.6(\mathrm{kN})$.



第 9 题图



第 10 题图

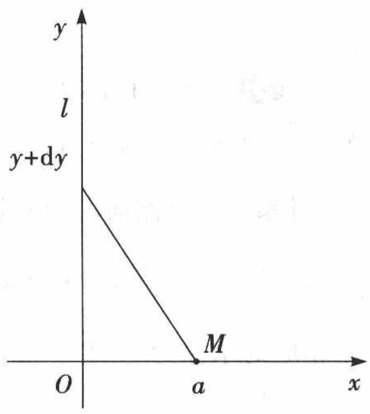
10 一底为 8cm,高为 6cm 的等腰三角形片,铅直地沉没在水中,顶在上,底在下且与水面平行,而顶离水面 3cm,试求它每面所受的压力.

【解】 如图建立坐标系,取三角形顶点为原点,取积分变量为 x,则 x 的变化范围为[0, 0.06],易知 B 的坐标为(0.06,0.04),因此 OB 的方程为 $y = \frac{2}{3}x$,故对小区间$[x, x + \mathrm{d}x]$ 的面积近似值为 $\mathrm{d}S = 2 \cdot \frac{2}{3}x \cdot \mathrm{d}x = \frac{4}{3}x\mathrm{d}x$.

记 γ 为水的密度,则在 x 处的水压强为 $p = \gamma g(x + 0.03) = 1000g(x + 0.03)$,

故压力为 $F = \int_0^{0.06} 1000g(x + 0.03) \cdot \frac{4}{3}x\mathrm{d}x = 0.168g \approx 1.65(\mathrm{N})$.

11 设有一长度为 l、线密度为 μ 的均匀细直棒,在与棒的一端垂直距离为 a 单位处有一质量为 m 的质点 M,试求这细棒对质点 M 的引力.



第 11 题图

【解】 如图建立坐标系,取 y 为积分变量,则 y 的变化范围为 $[0,l]$,对应小区间$[y, y + \mathrm{d}y]$ 与质点 M 的引力的大小的近似值为

$$\mathrm{d}F = G\frac{m\,\mu\mathrm{d}x}{r^2}, \quad \text{其中 } r = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

把该力分解,得到 x 轴、y 轴方向的分量分别为

$$\mathrm{d}F_x = -\frac{a}{r}\mathrm{d}F = -G\frac{am\,\mu}{(a^2 + x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x,$$

$$dF_y = \frac{x}{r}dF = G\frac{m\mu x}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx,$$

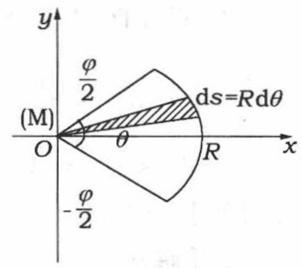
因此 $F_x = \int_0^l -G\frac{am\mu}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx$

$$\xlongequal{x=a\tan t} -G\frac{m\mu}{a}\int_0^{\arctan\frac{l}{a}}\cos t dt$$

$$= -\frac{Gm\mu l}{a\sqrt{a^2+l^2}},$$

$$F_y = \int_0^l G\frac{m\mu x}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx = \left[-G\frac{m\mu}{(a^2+x^2)^{1/2}}\right]_0^l = m\mu G\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}}\right).$$

12 设有一半径为R,中心角为φ的圆弧形细棒,其线密度为常数μ,在圆心处有一质量为m的质点M,试求这细棒对质点M的引力.



第 12 题图

【解】 如图建立坐标系,圆弧形细棒上一小段 ds 对质点M的引力的近似值即为引力元素

$$dF = \frac{km\mu ds}{R^2} = \frac{km\mu}{R^2}(Rd\theta) = \frac{km\mu}{R}d\theta,$$

$$dF_x = dF\cos\theta = \frac{km\mu}{R}\cos\theta d\theta,$$

则 $$F_x = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\frac{km\mu}{R}\cos\theta d\theta = 2\int_0^{\frac{\varphi}{2}}\frac{km\mu}{R}\cos\theta d\theta = \frac{2km\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

$$dF_y = dF\cdot\sin\theta = \frac{km\mu}{R}\sin\theta d\theta,\quad 则\quad F_y = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\frac{km\mu}{R}\sin\theta d\theta = 0.$$

故所求引力的大小为$\frac{2km\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}$,方向自$M$点指向圆弧的中点.

总习题六

1 填空:

(1) 曲线 $y = x^3-5x^2+6x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$ ________.

(2) 曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 上相应于 $1\leqslant x\leqslant 3$ 的一段弧的长度 $s=$ ________.

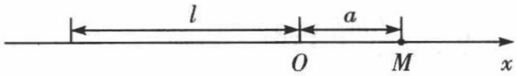
【解】 (1) 令 $x^3-5x^2+6x=0$,解得 $x=0,2,3$.
当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时,$y\geqslant 0$;当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时,$y\leqslant 0$.故

$$A = \int_0^2(x^3-5x^2+6x)dx - \int_2^3(x^3-5x^2+6x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^2 - \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_2^3 = \frac{37}{12}.$$

(2) $s = \int_1^3\sqrt{1+y'^2}dx = \int_1^3\frac{1+x}{2\sqrt{x}}dx = \left[\sqrt{x}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 = 2\sqrt{3}-\frac{4}{3}.$

2 以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:



(1) 设 x 轴上有一长度为 l、线密度为常数 μ 的细棒，在细棒右端的距离为 a 处有一质量为 m 的质点 M，已知万有引力常量为 G，则质点 M 和细棒之间的引力的大小为（ ）.

(A) $\int_{-l}^{0}\frac{Gm\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$ (B) $\int_{0}^{l}\frac{Gm\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$

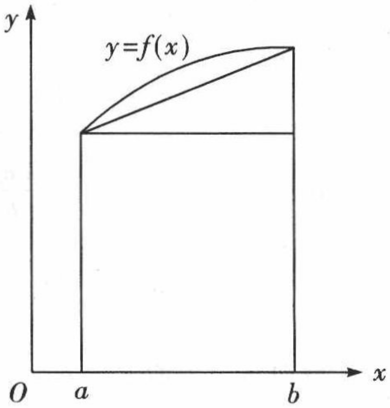
(C) $2\int_{-\frac{l}{2}}^{0}\frac{Gm\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$ (D) $2\int_{0}^{\frac{l}{2}}\frac{Gm\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$

(2) 设在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)>0$，$f'(x)>0$，$f''(x)<0$．令 $A_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$A_2=f(a)(b-a)$，$A_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则有（ ）．

(A) $A_1<A_2<A_3$ (B) $A_2<A_1<A_3$ (C) $A_3<A_1<A_2$ (D) $A_2<A_3<A_1$

【解】 (1) 选(A)．

(2)**【解法一】** 从几何意义判断：因为 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加．又因 $f''(x)<0$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上向上凸，如图所示，矩形面积 < 梯形面积 < 曲边梯形面积．故选(D)．



【解法二】 证 $A_2<A_3$．因 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，得 $f(b)>f(a)$，从而

$$A_3-A_2=(b-a)\frac{f(b)-f(a)}{2}>0,$$

即 $A_3>A_2$．

证 $A_1>A_3$．联结点 $(a,f(a))$ 与点 $(b,f(b))$ 的直线方程为

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

因为 $f''(x)<0$，所以曲线 $y=f(x)$ 是向上凸的，从而有

$$f(x)>f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),x\in(a,b).$$

两边积分，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a),$$

即 $A_1>A_3$．

3 一金属棒长 3m，离棒左端 xm 处的线密度 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$(kg/m)．问 x 为何值时，$[0,x]$ 一段的质量为全棒质量的一半．

【解】 $[0,x]$ 一段的质量为

$$m(x)=\int_0^x\rho(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=2(\sqrt{1+x}-1),$$

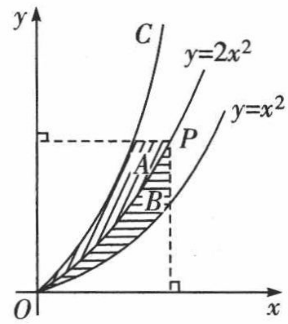
总质量为 $m(3)=2$，要满足 $m(x)=\frac{1}{2}m(3)$，求得 $x=\frac{5}{4}(\mathrm{m})$.

4 求由曲线 $\rho=a\sin\theta,\rho=a(\cos\theta+\sin\theta)(a>0)$ 所围图形公共部分的面积.

【解】 令 $a\sin\theta=a(\cos\theta+\sin\theta)$ 得 $\theta=\frac{\pi}{2}$. 令 $\rho=a(\cos\theta+\sin\theta)=0$，得 $\theta=\frac{3\pi}{4}$. 故公共部分图形的面积为

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}[a(\cos\theta+\sin\theta)]^2\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}(1+\sin2\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{a^2}{2}\left(\theta-\frac{1}{2}\cos2\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}=\frac{\pi-1}{4}a^2.\end{aligned}$$

5 如图从下到上依次有三条曲线：$y=x^2,y=2x^2$ 和 C，假设对曲线 $y=2x^2$ 上的任一点 P，所对应的面积 A 和 B 恒相等，求曲线 C 的方程.



【解】 设曲线 C 的方程为 $x=f(y)$，P 点坐标为 $\left(\sqrt{\frac{y}{2}},y\right)$，则

$$A=\int_0^y\left[\sqrt{\frac{y}{2}}-f(y)\right]\mathrm{d}y,\quad B=\int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}}(2x^2-x^2)\mathrm{d}x,$$

根据条件，对任意 $y\geqslant0$ 都有

$$\int_0^y\left[\sqrt{\frac{y}{2}}-f(y)\right]\mathrm{d}y=\int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}}(2x^2-x^2)\mathrm{d}x,$$

上式对 y 求导，得

$$\sqrt{\frac{y}{2}}-f(y)=\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2y}},$$

因此 $$f(y)=\frac{3\sqrt{2y}}{8}.$$

即曲线 C 为 $x=\frac{3\sqrt{2y}}{8}$，或 $y=\frac{32}{9}x^2(x\geqslant0)$.

6 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点 $(0,0)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$y\geqslant0$. 试确定 a,b,c 的值，使得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1,y=0$ 所围图形的面积为 $\frac{4}{9}$，且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

【解】 由已知条件：抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点 $(0,0)$，可得 $c=0$. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1,y=0$ 所围图形的面积为

$$S=\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2},$$

从而得到 $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{4}{9}$，即 $a=\frac{4}{3}-\frac{3}{2}b$. 该图形绕 x 轴放置而成的旋转体的体积为

$$V = \int_0^1 \pi(ax^2 + bx)^2 dx = \pi\left(\frac{a^2}{5} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{3}\right) = \frac{\pi}{30}(b-2)^2 + \frac{2}{9}\pi,$$

因此当 $b = 2$ 时体积为最小,此时 $a = -\frac{5}{3}$,抛物线为 $y = -\frac{5}{3}x^2 + 2x = \frac{x}{3}(6-5x)$. 在区间 $[0,1]$ 上,此抛物线满足 $y \geqslant 0$,故所求解:$a = -\frac{5}{3}, b = 2, c = 0$ 符合题目要求.

7 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A;(2) 求 D 绕直线 $x = \mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

【解】 (1) 设切点的横坐标为 x_0,则曲线 $y = \ln x$ 在点 $(x_0, \ln x_0)$ 处的切线方程是

$$y = \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0).$$

由该切线过原点知 $y = \ln x_0 - 1 = 0$,从而 $x_0 = \mathrm{e}$,所以该切线的方程是

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}x.$$

平面图形 D 的面积 $A = \int_0^1 (\mathrm{e}^y - \mathrm{e}y)\,dy = \frac{1}{2}\mathrm{e} - 1$.

(2) 切线 $y = \frac{x}{\mathrm{e}}$ 与 x 轴及直线 $x = \mathrm{e}$ 所围成的三角形绕直线 $x = \mathrm{e}$ 旋转所得的圆锥体的体积为

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \mathrm{e}^2.$$

曲线 $y = \ln x$ 与 x 轴及直线 $x = \mathrm{e}$ 所围成的图形绕直线 $x = \mathrm{e}$ 旋转所得的旋转体的体积为

$$V_2 = \int_0^1 \pi(\mathrm{e} - \mathrm{e}^y)^2 dy = \frac{\pi}{2}(-\mathrm{e}^2 + 4\mathrm{e} - 1),$$

因此,所求旋转体的体积为

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{6}(5\mathrm{e}^2 - 12\mathrm{e} + 3).$$

8 求由曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 与直线 $x = 4$ 及 x 轴所围图形绕 y 轴绕旋转而成的旋转体的体积.

【解】 取 x 为积分变量,则 x 的变化范围为 $[0,4]$,因此体积为

$$V = \int_0^4 2\pi x f(x)\,dx = \int_0^4 2\pi x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{512}{7}\pi.$$

9 求圆盘 $(x-2)^2 + y^2 \leqslant 1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

【解】 这是一个圆环面,可以看作由图形 $\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{1-y^2}, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ 绕 y 轴旋转所得的立体减去由图形 $\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2 - \sqrt{1-y^2}, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ 绕 y 轴旋转所得的立体,因此

$$V = \int_{-1}^1 \pi(2 + \sqrt{1-y^2})^2 dy - \int_{-1}^1 \pi(2 - \sqrt{1-y^2})^2 dy$$

$$= 8\pi\int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = 8\pi\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2} + \frac{y}{2}\arcsin y\right]_{-1}^1 = 4\pi^2.$$

10 求抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2 + y^2 = 3$ 所截下的有限部分的弧长.

【解】 解交点$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2, \\ x^2 + y^2 = 3. \end{cases}$ 得$(-\sqrt{2},1)$，$(\sqrt{2},1)$．由$y = \dfrac{1}{2}x^2$，得$y' = x$，从而

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1 + x^2}dx.$$

故所求弧长为 $s = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2}dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2}dx.$

$$= 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{1 + x^2})\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

11 半径为r米的球沉入水中，球的上部与水面相切，球的比重与水相同，现将球从水中取出，需作多少功？

【解】 以切点为原点建立坐标系，则圆的方程为$(x - r)^2 + y^2 = r^2$.

将球从水中取出需作的功相应于将$[0,2r]$的区间上的许多薄片都上提$2r$的高度时需作功的和的极限．

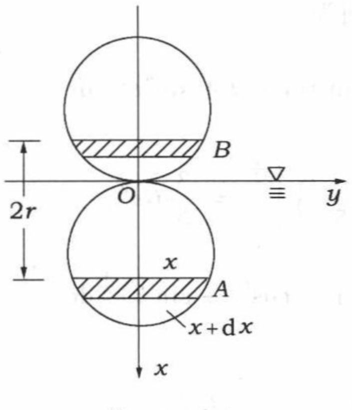
取深度x为积分变量，典型小薄片厚度为dx，将它由A上升到B时，在水中的行程为x；在水上的行程为$2r - x$.

因为球的比重与水相同，所以此薄片所受的浮力与其身的重力之和力为零，因而该片在水中由A上升到水面时，提升力为零，并不做功，由水面再上提到B时，需做的功即功元素为

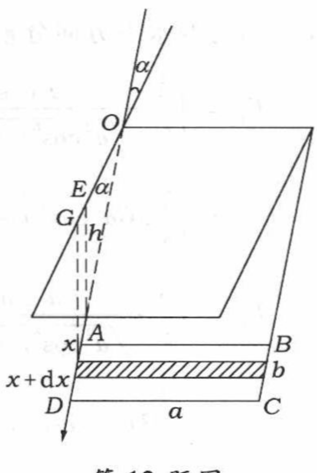
$$dW = (2r - x)[g\pi y^2(x)dx] = \pi g(2r - x)[\sqrt{r^2 - (x - r)^2}]^2dx$$
$$= \pi g(2r - x)(2rx - x^2)dx.$$

所求的功为 $W = \int_0^{2r} \pi g(2r - x)(2rx - x^2)dx = \pi g\int_0^{2r}(4r^2x - 4rx^2 + x^3)dx$

$$= \pi g\left(2r^2x^2 - \frac{4}{3}rx^3 + \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^{2r} = \frac{4}{3}\pi r^4 g(\text{千焦}).$$



第 11 题图



第 12 题图

12 边长为a和b的矩形薄板，与液面成α角斜沉于液体内，长边平行于液面而位于深h处，设$a > b$，液体的密度为ρ．试求薄板每面所受的压力．

【解】 如图，设Σ为水平面，矩形薄板$ABCD$与液面成α角，短边AD所在直线与水平面相交于O点，以O为原点，OA方向为轴的正向，建立坐标系．

因为长边 $AB = a$ 在水深 h 处与液面平行，

所以 $\dfrac{h}{OA} = \sin\alpha$，$OA = \dfrac{h}{\sin\alpha}$. $OD = OA + b = \dfrac{h}{\sin\alpha} + b$.

矩形薄板沉于液体中，所以它每面所受的压力大小相等，方向相反.

图中阴影所受压力的近似值即压力元素，取 AD 上任一点 x 处（其坐标也用 x 表示）与液面的距离为 $|xG|$，则 $|xG| = x\sin\alpha$. 取 x 为积分变量，它的变化区间为 $\left[\dfrac{h}{\sin\alpha}, \dfrac{h}{\sin\alpha} + b\right]$.

压力元素为 $\quad dP = \rho x\sin\alpha \cdot a dx = a\rho\sin\alpha \cdot x dx$，所求压力为

$$P = \int_{\frac{h}{\sin\alpha}}^{\frac{h}{\sin\alpha}+b} a\rho\sin\alpha \cdot x dx = \frac{1}{2}a\rho\sin\alpha \cdot x^2 \Big|_{\frac{h}{\sin\alpha}}^{\frac{h}{\sin\alpha}+b}$$

$$= \frac{1}{2}a\rho\sin\alpha\left[\left(\frac{h}{\sin\alpha} + b\right)^2 - \left(\frac{h}{\sin\alpha}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}ab\rho(2h + b\sin\alpha).$$

13 设星形线 $x = a\cos^3 t$，$y = a\sin^3 t$ 上每一点处的线密度的大小等于该点到原点距离的立方，在原点 O 处有一单位质点，求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

【解】 取参数 t 为积分变量，变化范围为 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$，对应区间 $[t, t + dt]$ 的弧长为

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt = 3a\cos t\sin t\,dt,$$

该弧段质量为 $(a^2\cos^6 t + a^2\sin^6 t)^{\frac{3}{2}}ds = 3a^4\cos t\sin t(\cos^6 t + \sin^6 t)^{\frac{3}{2}}dt$，该弧段与质点的引力大小为

$$G\frac{3a^4\cos t\sin t(\cos^6 t + \sin^6 t)^{\frac{3}{2}}dt}{a^2\cos^6 t + a^2\sin^6 t} = 3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6 t + \sin^6 t)^{\frac{1}{2}}dt,$$

因此曲线与质点引力的水平方向分量、铅直方向分量分别为

$$F_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos^3 t}{\sqrt{a^2\cos^6 t + a^2\sin^6 t}} 3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6 t + \sin^6 t)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3Ga^2\cos^4 t\sin t\,dt = 3Ga^2\left(-\frac{\cos^5 t}{5}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5}Ga^2,$$

$$F_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin^3 t}{\sqrt{a^2\cos^6 t + a^2\sin^6 t}} 3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6 t + \sin^6 t)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3Ga^2\cos t\sin^4 t dt = 3Ga^2\left(\frac{\sin^5 t}{5}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5}Ga^2,$$

因此所求引力 $\boldsymbol{F} = \left(\dfrac{3}{5}Ga^2, \dfrac{3}{5}Ga^2\right)$，即大小为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}Ga^2$，方向角为 $\dfrac{\pi}{4}$.

14 某建筑工地打地基时，需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打，都要克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比（比例系数为 k，$k > 0$）. 汽锤第一次击打将桩打进地下 am. 根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打

时所作的功之比为常数 $r(0<r<1)$. 问:

(1) 汽锤击打桩 3 次后,可将桩打进地下多深?

(2) 若击打次数不限,则汽锤至多能将桩打进地下多深?

【解】 (1) 设第 n 次击打后,桩被打进地下 x_n,第 n 次击打时,汽锤克服阻力所作的功为 $W_n(n\in\mathbf{N}^*)$. 由题设,当桩被打进地下的深度为 x 时,上层对桩的阻力的大小为 kx,所以

$$W_1=\int_0^{x_1}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}x_1^2=\frac{k}{2}a^2,$$

$$W_2=\int_{x_1}^{x_2}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2)=\frac{k}{2}(x_2^2-a^2).$$

由 $W_2=rW_1$,可得

$$x_2^2-a^2=ra^2,$$

即 $x_2^2=(1+r)a^2$.

$$W_3=\int_{x_2}^{x_3}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_3^2-x_2^2)=\frac{k}{2}[x_3^2-(1+r)a^2],$$

由 $W_3=rW_2=r^2W_1$,可得

$$x_3^2-(1+r)a^2=r^2a^2.$$

从而

$$x_3=\sqrt{1+r+r^2}a,$$

即汽锤击打桩 3 次后,可将桩打进地下 $\sqrt{1+r+r^2}a$ m.

(2) $W_n=\int_{x_{n-1}}^{x_n}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_n^2-x_{n-1}^2)$,由 $W_n=rW_{n-1}$,可得

$$x_n^2-x_{n-1}^2=r(x_{n-1}^2-x_{n-2}^2),$$

由(1)知 $x_2^2-x_1^2=ra^2$,因此 $x_n^2-x_{n-1}^2=r^{n-1}a^2$,从而由归纳法,可得

$$x_n=\sqrt{1+r+\cdots+r^{n-1}}a,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}a\sqrt{\frac{1-r^n}{1-r}}=\frac{a}{\sqrt{1-r}},$$

即若击打次数不限,汽锤至多能将桩打进地下 $\frac{a}{\sqrt{1-r}}$ m.

考研试题选解

1 设曲线的极坐标方程为 $\rho=\mathrm{e}^{a\theta}(a>0)$,则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为________.

【分析】 所求面积

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{2a\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4a}\mathrm{e}^{2a\theta}\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{4a}(\mathrm{e}^{4\pi a}-1).$$

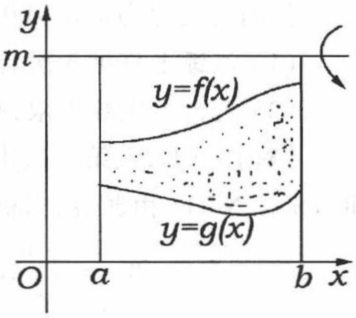
2 设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $g(x)<f(x)<m$(m 为常数),由曲线 $y=g(x)$,$y=f(x)$,$x=a$ 及 $x=b$ 所围平面图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转体的体积为

(A) $\int_a^b\pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

(B) $\int_a^b \pi[2m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.

(C) $\int_a^b \pi[m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.

(D) $\int_a^b \pi[m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.



第 2 题图

【分析】 见右图. 作垂直分割,相应于 $[x, x + \mathrm{d}x]$ 小竖条的体积微元

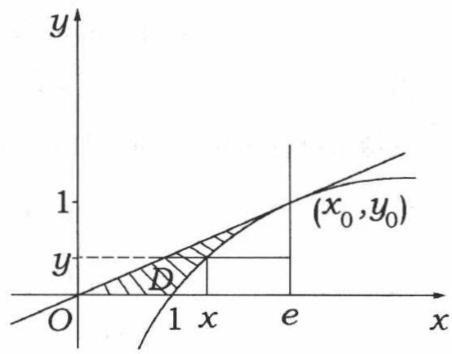
$$\begin{aligned}\mathrm{d}V &= \pi(m - g(x))^2\mathrm{d}x - \pi(m - f(x))^2\mathrm{d}x \\ &= \pi[(m - g(x)) + (m - f(x))]\cdot[(m - g(x)) - (m - f(x))]\mathrm{d}x \\ &= \pi[2m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

于是 $V = \int_a^b \pi[2m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.

应选(B).

3 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A;(2) 求 D 绕直线 $x = \mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.



第 3 题图

【解】 (1) 曲线 $y = \ln x$ 在点 $(x_0, y_0)(y_0 = \ln x_0)$ 处的切线方程为

$$y - y_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0);$$

由切线过原点 $(0,0)$,得 $y_0 = 1, x_0 = \mathrm{e}$,所以该切线方程为 $y = \frac{x}{\mathrm{e}}$. 从而,图形 D 的面积(如右图)为

$$A = \int_0^1 (\mathrm{e}^y - \mathrm{e}y)\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{e}}{2} - 1.$$

(2) 切线 $y = x/\mathrm{e}$, x 轴与直线 $x = \mathrm{e}$ 所围三角形绕 $x = \mathrm{e}$ 旋转所得圆锥体的体积为 $V_1 = \frac{1}{3}\pi\mathrm{e}^2$,而曲线 $y = \ln x$、x 轴与直线 $x = \mathrm{e}$ 所围曲边三角形绕 $x = \mathrm{e}$ 的旋转体体积为

$$V_2 = \int_0^1 \pi(\mathrm{e} - \mathrm{e}^y)^2\mathrm{d}y = \pi\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e} - \frac{1}{2}\right),$$

或者 $$V_2 = \int_1^{\mathrm{e}} 2\pi(\mathrm{e} - x)\ln x\mathrm{d}x = \pi\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e} - \frac{1}{2}\right).$$

因此所求旋转体的体积为 $V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{6}(5\mathrm{e}^2 - 12\mathrm{e} + 3)$.

4 椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成,圆锥面 S_2 是由过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(Ⅰ) 求 S_1 及 S_2 的方程; (Ⅱ) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

【分析与求解】 (Ⅰ) 椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成的椭球面 S_1 的方程是

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{3}=1\quad\left(y^2+z^2=3\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\right).$$

为求 S_2 的方程，先求 Γ 上过点(4,0)的切线 L.

Γ 上 $\forall$ 点(x_0,y_0)的切线斜率是 $y'=-\frac{3}{4}\frac{x_0}{y_0}$,相应的切线方程是

$$y=y_0-\frac{3}{4}\frac{x_0}{y_0}(x-x_0).$$

令 $x=4,y=0$,得相应的切点(x_0,y_0)： $y_0=\frac{3}{4}\frac{x_0}{y_0}(4-x_0)$，$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=x_0$，

即 $x_0=1,y_0=\pm\frac{3}{2}$.（只需考虑 $y_0>0$),于是得切线 L 的方程 $y=-\frac{1}{2}(x-4)$.

相应的圆锥面 S_2 的方程是 $y^2+z^2=\frac{1}{4}(x-4)^2$.

（Ⅱ）设 S_1 与 S_2 之间的区域 Ω 的体积为 V,它由锥体的一部分 Ω_1 除去椭球体的一部分 Ω_2 组成.

现先分别求出 Ω_1 与 Ω_2 的体积 V_1 和 V_2.

方法1° 利用求旋转体体积的定积分公式求 V_2. Ω_2 由曲线 $y=\sqrt{3\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}(1\leqslant x\leqslant 2)$ 绕 x 轴旋转而成（如右图),于是

$$V_2=\pi\int_1^2 y^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_1^2 3\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x=3\pi\left(1-\frac{x^3}{12}\Big|_1^2\right)=\frac{5}{4}\pi.$$

方法2° 利用重积分的体积公式求 V_2.

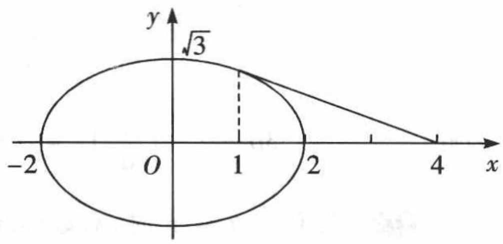
与 x 轴垂直的 Ω_2 的截面区域 $D(x)$ 已知,即

$$D(x):y^2+z^2\leqslant 3\left(1-\frac{x^2}{4}\right),$$

于是 Ω_2 的体积

$$V_2=\int_1^2\mathrm{d}x\iint_{D(x)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_1^2\pi\cdot 3\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x$$

$$=3\pi\left(1-\frac{1}{12}x^3\Big|_1^2\right)=\frac{5}{4}\pi.$$



第 4 题图

按锥体的体积公式,得 Ω_1 的体积 $V_1=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 3=\frac{9}{4}\pi$,因此

$$V=V_1-V_2=\frac{9}{4}\pi-\frac{5}{4}\pi=\pi.$$

5 设位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2x)}}(\mathrm{e}\leqslant x<+\infty)$ 下方,x 轴上方的无界区域为 G,则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为________.

【分析】 所求旋转体的体积

$$V=\pi\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}y^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2x)},$$

令 $\ln x=t$ 作换元,则 $x:\mathrm{e}\to+\infty\Leftrightarrow t:1\to+\infty$,且 $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$,代入即得

$$V=\pi\int_{e}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}=\pi\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\pi\arctan t\Big|_{1}^{+\infty}=\pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}.$$

6 设$\rho=\rho(x)$是抛物线$y=\sqrt{x}$上任一点$M(x,y)(x\geqslant 1)$处的曲率半径，$s=s(x)$是该抛物线上介于点$A(1,1)$与M之间的弧长，计算$3\rho\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2$的值．$\left(\text{在直角坐标系下曲率公式为 } K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\right)$

【解】 先把ρ,s表成x的函数：$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$y''=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$，抛物线在点$M(x,y)$处的曲率半径

$$\rho=\rho(x)=\frac{1}{K}=\frac{1}{2}(4x+1)^{3/2},$$

抛物线上$\overset{\frown}{AM}$的弧长

$$s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x.$$

再用参数求导法求 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}$与$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}$：

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}x}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=6\sqrt{x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\frac{6}{\sqrt{4x+1}}.$$

因此 $$3\rho\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2=3\cdot\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{6}{\sqrt{4x+1}}-36x=9.$$

7 当$0\leqslant\theta\leqslant\pi$时，对数螺线$r=e^{\theta}$的弧长为________.

【分析】 按极坐标系下弧长计算公式，该对数螺线的弧长为

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{e^{2\theta}+e^{2\theta}}\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}\int_0^{\pi}e^{\theta}\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}(e^{\pi}-1).$$

8 曲线$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$与直线$x=0,x=t(t>0)$及$y=0$围成一曲边梯形．该曲边梯形绕x轴旋转一周得一旋转体，其体积为$V(t)$，侧面积为$S(t)$，在$x=t$处的底面积为$F(t)$．

（Ⅰ）求$\frac{S(t)}{V(t)}$的值； （Ⅱ）计算极限$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{F(t)}$．

【分析与求解】 （Ⅰ）代公式先求出$V(t)$与$S(t)$的积分表达式．

按旋转体的体积公式

$$V(t)=\pi\int_0^t y^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\mathrm{d}x,$$

按旋转体的侧面积公式

$$S(t)=2\pi\int_0^t y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\int_0^t \frac{e^x + e^{-x}}{2}\sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_0^t \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx,$$

因此 $\quad \dfrac{S(t)}{V(t)} = 2.$

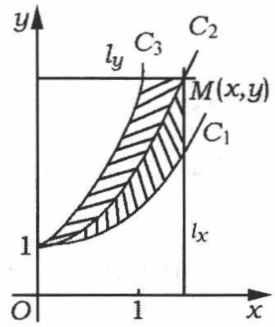
（Ⅱ） 再求 $F(t)$，它是半径为 $y(t)$ 的圆的面积

$$F(t) = \pi y^2(t) = \pi\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2,$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{F(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx}{\pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{t\to+\infty}\frac{2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})(e^t-e^{-t})}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1+e^{-2t}}{1-e^{-2t}} = 1.$$

9 如图，C_1 和 C_2 分别是 $y = \dfrac{1}{2}(1 + e^x)$ 和 $y = e^x$ 的图像，过点 $(0,1)$ 的曲线 C_3 是一单调增函数的图像．过 C_2 上任一点 $M(x,y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y．记 C_1，C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$；C_2，C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$．如果总有 $S_1(x) = S_2(y)$，求曲线 C_3 的方程 $x = \varphi(y)$．



第 9 题图

【分析与求解】 1）先求出 $S_1(x)$ 与 $S_2(y)$ 的表达式．

由定积分的几何意义知

$$S_1(x) = \int_0^x\left[e^t - \frac{1}{2}(1+e^t)\right]dt = \frac{1}{2}\int_0^x(e^t-1)dt$$

$$= \frac{1}{2}(e^x - x - 1),$$

$$S_2(y) = \int_1^y[\ln t - \varphi(t)]\,dt.$$

2）按题意 $\quad S_2(y) = S_1(x)$，即 $\quad \displaystyle\int_1^y[\ln t - \varphi(t)]\,dt = \frac{1}{2}(e^x - x - 1)$，其中 $y = e^x$. 于是

$$\int_1^y[\ln t - \varphi(t)]\,dt = \frac{1}{2}(y - \ln y - 1). \qquad ①$$

3）解方程 ①：

在 ① 中令 $y = 1$，等式自然成立．

将 ① 求导得 $\quad \ln y - \varphi(y) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{y}\right)$，即 $\quad \varphi(y) = \ln y + \dfrac{1}{2y} - \dfrac{1}{2}.$

故曲线 C_3 的方程为 $x = \ln y + \dfrac{1}{2y} - \dfrac{1}{2}$.

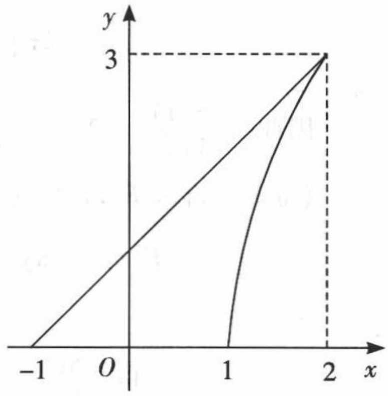
10 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2 \end{cases}(t \geqslant 0)$，

（Ⅰ）讨论 L 的凹凸性；

（Ⅱ）过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线，求切点 (x_0, y_0)，并写出切线的方程；

（Ⅲ）求此切线与 L（对应于 $x \leqslant x_0$ 的部分）及 x 轴所围成的平面图形的面积．

【分析与求解一】（Ⅰ）求$\frac{d^2y}{dx^2}$. 由参数求导法得



第 10 题图

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{4-2t}{2t}=\frac{2}{t}-1,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\left(\frac{2}{t}-1\right)'_t\frac{dt}{dx}=-\frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{x'_t}$$

$$=-\frac{1}{t^3}<0\quad(t>0).$$

$y=y(x)$ 定义于 $x\in[1,+\infty)$,它是连续的,当 $x>1$（相应于 $t>0$）时$\frac{d^2y}{dx^2}<0\quad\Rightarrow\quad$ 曲线 L 是凸的.

（Ⅱ）设 L 上切点(x_0,y_0)对应 $t=t_0>0$（$t=0$ 时不合题意）,相应的切线方程为

$$y-y_0=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)(x-x_0),$$

将$(x,y)=(-1,0)$代入得 $-y_0=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)(-1-x_0)$,即 $\quad t_0^2-4t_0=\frac{2-t_0}{t_0}(-2-t_0^2)$,亦即 $t_0^2+t_0-2=0$,解得 $t_0=1$（$t_0=-2$ 不合题意）. 于是切点是$(2,3)$,相应的切线方程是

$$y=3+(x-2),\text{即 } y=x+1.$$

（Ⅲ）所求平面图形的面积记为 S,则

$$S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot3-\int_1^2y(x)dx=\frac{9}{2}-\int_0^1(4t-t^2)\cdot2tdt=\frac{9}{2}-\left(\frac{8}{3}-\frac{2}{4}\right)=\frac{7}{3}.$$

【分析与求解二】（Ⅰ）解成 $y=y(x)$.

由 $t=\sqrt{x-1}\,(x\geqslant1)$ 代入 y 得 $y=4\sqrt{x-1}-x+1$. 于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sqrt{x-1}}-1,\quad\frac{d^2y}{dx^2}=-(x-1)^{-\frac{3}{2}}<0\quad(x>1).$$

$\Rightarrow$ 曲线 L 是凸的.

（Ⅱ）L 上 $\forall$ 点(x_0,y_0)处的切线方程是 $y-y_0=\left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1\right)(x-x_0)$,

其中 $x_0>1$（$x_0=1$ 时不合题意）. 令 $x=-1,y=0$ 得

$$-4\sqrt{x_0-1}+x_0-1=\left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1\right)(-1-x_0).$$

令 $t_0=\sqrt{x_0-1}$,得 $-4t_0+t_0^2=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)(-2-t_0^2)$. 其余同【分析与求解一】,得 $t_0=1$.

（Ⅲ）所求图形面积

$$S=\frac{9}{2}-\int_1^2y(x)dx=\frac{9}{2}-\int_1^2(4\sqrt{x-1}-x+1)dx$$

$$=\frac{9}{2}-\left[4\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+x\right]\Bigg|_1^2$$

$$=\frac{9}{2}-\left(\frac{8}{3}-\frac{3}{2}+1\right)=\frac{9}{2}-\frac{13}{6}=\frac{7}{3}.$$

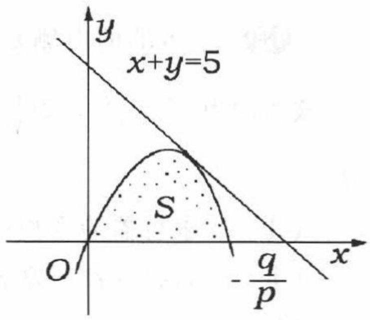
【评注】 本题考查的知识点主要是由参数方程确定的函数的导数,导数的应用——切线,

定积分在几何上的应用 —— 平面图形的面积．由于曲线是用参数方程表示的，因此在解第（Ⅱ）、（Ⅲ）两问时应用参数方程比较方便，而把参数方程化为直角坐标方程稍繁一些．

11 已知抛物线 $y = px^2 + qx$（其中 $p < 0, q > 0$）在第一象限内与直线 $x + y = 5$ 相切，且抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S．

（1）问 p 和 q 为何值时，S 达到最大值？（2）求出此最大值．

【分析】 先求出本题中的面积 S．此时 S 中有两个参数 p 和 q，再根据抛物线 $y = px^2 + qx$ 与 $x + y = 5$ 相切，求出 p 与 q 的关系，代入 S 中只剩一个参数，最后求 S 的最大值．



第 11 题图

【解】 依题意，抛物线如右图所示，求得它与 x 轴交点的横坐标为

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -\frac{q}{p}.$$

面积
$$S = \int_0^{-\frac{q}{p}} (px^2 + qx)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{p}{3}x^3 + \frac{q}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{-\frac{q}{p}} = \frac{q^3}{6p^2}. \qquad (*)$$

因直线 $x + y = 5$ 与抛物线 $y = px^2 + qx$ 相切，故它们有唯一公共点，由方程组

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ y = px^2 + qx \end{cases}$$

得 $px^2 + (q+1)x - 5 = 0$．其判别式必等于零，即

$$\Delta = (q+1)^2 + 20p = 0, \quad p = -\frac{1}{20}(1+q)^2.$$

将上式代入（$*$）式得 $\quad S(q) = \dfrac{200q^3}{3(q+1)^4}$．

因 $S'(q) = \dfrac{200q^2(3-q)}{3(q+1)^5}\begin{cases} > 0, & 0 < q < 3, \\ = 0, & q = 3, \\ < 0, & q > 3, \end{cases}$ 于是当 $q = 3$ 时，$S(q)$ 取最大值，此时 $p = -\dfrac{4}{5}$．从而 S 的最大值是 $\dfrac{225}{32}$．

12 设 D_1 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $y = 0, x = a$ 所围成的平面区域，其中 $0 < a < 2$．

（1）试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1；D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2；

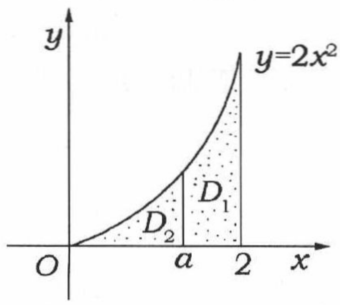
（2）问当 a 为何值时，$V_1 + V_2$ 取得最大值？试求此最大值．

【解】（1）D_1 与 D_2 如右图，计算可得

$$V_1 = \pi\int_a^2 (2x^2)^2\,\mathrm{d}x = \frac{4\pi}{5}(32 - a^5),$$

$$V_2 = \pi a^2 \cdot 2a^2 - \pi\int_0^{2a^2} \frac{y}{2}\,\mathrm{d}y = 2\pi a^4 - \pi a^4 = \pi a^4.$$

（2）$V = V_1 + V_2 = \dfrac{4\pi}{5}(32 - a^5) + \pi a^4$．由于

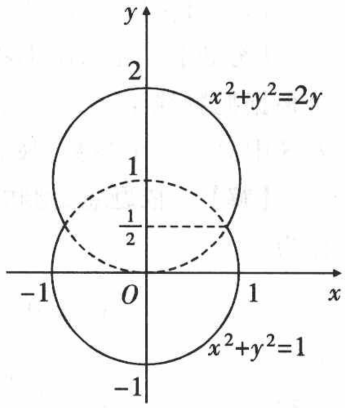


第 12 题图

$$V' = 4\pi a^3(1-a)\begin{cases} >0, & 0<a<1, \\ =0, & a=1, \\ <0, & 1<a<2, \end{cases}$$

因此 $a=1$ 是 V_1+V_2 的最大值点．此时 V_1+V_2 取最大值$\dfrac{129}{5}\pi$．

13 一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面,该曲线由 $x^2+y^2=2y\left(y\geqslant\dfrac{1}{2}\right)$与 $x^2+y^2=1\left(y\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$连接而成．



第 13 题图

（Ⅰ） 求容器的容积；

（Ⅱ） 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出,至少需要做多少功？

（长度单位:m,重力加速度为 $g\,\mathrm{m/s^2}$,水的密度为 $10^3\,\mathrm{kg/m^3}$）

【解】 （Ⅰ）**方法 1°** 由对称性,只需考察 $-1\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{2}$ 部分,曲线表为 $x=f(y)=\sqrt{1-y^2}\left(-1\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$,则容积

$$V=2\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\pi f^2(y)\,\mathrm{d}y=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)\,\mathrm{d}y=2\pi\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=2\pi\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}+1\right)\right]=2\pi\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\right)=\frac{9}{4}\pi.$$

方法 2° 曲线表为 $x=f(y)=\begin{cases}\sqrt{1-y^2}, & -1\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{2y-y^2}, & \dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 2,\end{cases}$ 则容积

$$V=\int_{-1}^{2}\pi f^2(y)\,\mathrm{d}y=\pi\left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)\,\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2y-y^2)\,\mathrm{d}y\right]$$

$$=\pi\left(\frac{3}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^{2}2y\,\mathrm{d}y-\int_{-1}^{2}y^2\,\mathrm{d}y\right)=\pi\left(\frac{3}{2}+y^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}-\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{2}\right)$$

$$=\pi\left[\frac{3}{2}+4-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}(8+1)\right]=\frac{9}{4}\pi.$$

（Ⅱ）容器内侧曲线 $x=f(y)$ 如题（Ⅰ）所示．在 y 轴上 $\forall$ 取$[y,y+\mathrm{d}y]$,对应容器的小薄片的水的重量为 $\rho g\pi f^2(y)\,\mathrm{d}y$（$\rho$ 为水的密度）,它升高的距离 $\mathrm{d}(y)=2-y$．将此薄片抽出做的功为

$$\mathrm{d}W=\rho g\pi f^2(y)(2-y)\,\mathrm{d}y,$$

于是全部抽出容器内的水做的功为

$$W=\int_{-1}^{2}\rho g\pi f^2(y)(2-y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\rho g\pi\left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)(2-y)\,\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2y-y^2)(2-y)\,\mathrm{d}y\right],$$

其中 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2y-y^2)(2-y)\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{2}[1-(1-y)^2][1+(1-y)]\,\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{t=1-y}\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-t^2)(1+t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)(1+y)\,\mathrm{d}y.$$

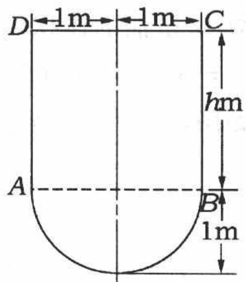
再代入上式得

$$W=\rho g\pi\left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)(2-y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)(1+y)\,\mathrm{d}y\right]$$

$$=\rho g\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}3(1-y^2)\,\mathrm{d}y=\rho g\pi\cdot 3\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\rho g\pi\cdot 3\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}+1\right)\right]=\rho g\pi\frac{27}{8}=3375g\pi.$$

14 某闸门的形状与大小如图所示，其中直线 l 为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成．当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5∶4，闸门矩形部分的高 h 应为多少 m（米）？



第 14 题图

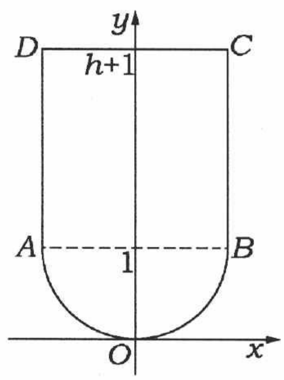
【解法一】 如图(a) 建立坐标系，则抛物线的方程为 $y=x^2$.

闸门矩形部分承受的水压力

$$P_1=2\int_1^{h+1}\rho g(h+1-y)\,\mathrm{d}y=2\rho g\left[(h+1)y-\frac{y^2}{2}\right]_1^{h+1}$$

$$=\rho gh^2,$$

其中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度．



(a)

闸门下部承受的水压力

$$P_2=2\int_0^1\rho g(h+1-y)\sqrt{y}\,\mathrm{d}y$$

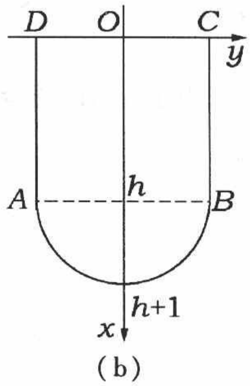
$$=2\rho g\left[\frac{2}{3}(h+1)y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$=4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right).$$

由题意知 $\dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{5}{4}$，即$\dfrac{h^2}{4\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right)}=\dfrac{5}{4}$,

解之得 $h=2, h=-\dfrac{1}{3}$（舍去），故 $h=2$.

即闸门矩形部分的高应为 2m．



(b)

【解法二】 如图(b) 建立坐标系，则抛物线方程为

$x=h+1-y^2$.

闸门矩形部分承受的水压力为 $P_1=2\int_0^h\rho gx\,\mathrm{d}x=\rho gh^2$.

闸门下部承受的水压力为 $P_2=2\int_h^{h+1}\rho gx\sqrt{h+1-x}\,\mathrm{d}x$,

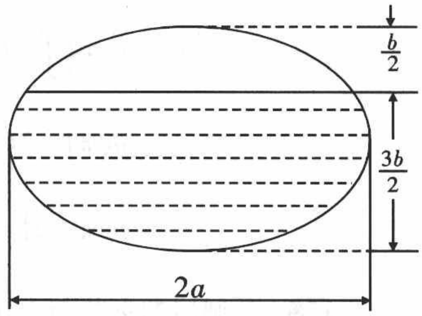
设 $\sqrt{h+1-x}=t$，得

$$P_2 = 4\rho g\int_0^1 (h+1-t^2)t^2\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\rho g\left[(h+1)\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = 4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right).$$

以下同【解法一】.

15 一个高为 l 的柱体形贮油罐，底面是长轴为 $2a$，短轴为 $2b$ 的椭圆．现将贮油罐平放，当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时（如图），计算油的质量.（长度单位为 m，质量单位为 kg，油的密度为常数 ρkg/m^3）

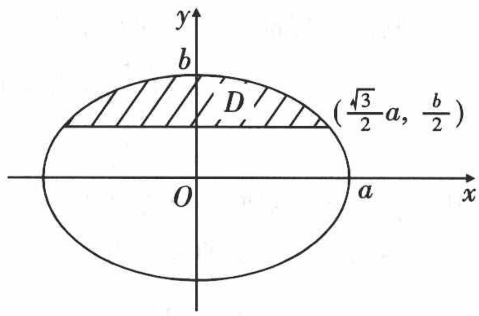


第 15 题图

【分析与求解】 油的质量 $m=\rho V$，其中 ρ 是油的密度常数，V 是油的体积．贮油罐平放后油的体积是一直柱体的体积，$V=S\cdot l$，其中 S 是该柱体的截面积，l 是原柱体油罐的高，截面如图(a) 所示，是整个椭圆除去

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{b}{2}\leqslant y\leqslant b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}a\right\}$$

部分，即 $S=\pi ab-S_1$，其中 S_1 是 D 的面积．



(a)

由于 $$S_1 = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-\frac{b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= 2b\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x - 2\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\xlongequal{x=a\sin t} 2ba\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t-\frac{\sqrt{3}}{2}ab$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t-\frac{\sqrt{3}}{2}ab$$

$$= ab\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}ab$$

$$= ab\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right),$$

于是 $$S=\pi ab-ab\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)ab.$$

因此，油的质量 $m=\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)abl\rho$.

第七章　微分方程

习题 7－1　微分方程的基本概念

1 试说出下列各微分方程的阶数：

(1) $x(y')^2-2yy'+x=0$；　　(2) $x^2y''-xy'+y=0$；

(3) $xy'''+2y''+x^2y=0$；　　(4) $(7x-6y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$；

(5) $L\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\theta}{C}=0$；　　(6) $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}+\rho=\sin^2\theta$.

【解】 (1) 一阶；(2) 二阶；(3) 三阶；(4) 一阶；(5) 二阶；(6) 一阶.

2 指出下列各题中的函数是否为微分方程的解.

(1) $xy'=2y, y=5x^2$；

(2) $y''+y=0, y=3\sin x-4\cos x$；

(3) $y''-2y'+y=0, y=x^2\mathrm{e}^x$；

(4) $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0, y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$.

【解】 (1) 将 $y=5x^2$ 和 $y'=10x$ 代入方程得 $x\cdot10x=2\cdot5x^2$.
所以 $y=5x^2$ 是方程的解. 又因为解函数中不包含任意常数 C，因而是特解.

(2) 将 $y=3\sin x-4\cos x$ 以及 $y'=3\cos x+4\sin x$ 和 $y''=-3\sin x+4\cos x$ 代入方程，可得

$$y''+y=-3\sin x+4\cos x+3\sin x-4\cos x=0.$$

所以 $y=3\sin x-4\cos x$ 是方程的特解.

(3) 将 $y=x^2\mathrm{e}^x, y'=\mathrm{e}^x(2x+x^2), y''=\mathrm{e}^x(2+4x+x^2)$ 代入方程得

$$y''-2y'+y=\mathrm{e}^x(2+4x+x^2)-2\mathrm{e}^x(2x+x^2)+x^2\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x\neq0.$$

所以 $y=x^2\mathrm{e}^x$ 不是方程的解.

(4) 将 $y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}, y'=\lambda_1C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+\lambda_2C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}, y''=\lambda_1^2C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+\lambda_2^2C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$ 代入方程可得

$$\begin{aligned}&y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y\\&=(\lambda_1^2C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+\lambda_2^2C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x})-(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+\lambda_2C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x})+\lambda_1\lambda_2(C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x})\\&=0.\end{aligned}$$

所以 $y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$ 是方程的通解.

3 在下列各题中，验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解：

(1) $(x-2y)y'=2x-y, x^2-xy+y^2=C$；

(2) $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0, y=\ln(xy)$.

【解】 (1) 对 $x^2-xy+y^2=C$ 两边同时对 x 求导，得

$$2x-y-xy'+2y\cdot y'=0\ \Rightarrow\ (x-2y)y'=2x-y.$$

故 $x^2-xy+y^2=C$ 所确定的函数是所给微分方程的通解.

(2) 对 $y=\ln(xy)$ 两边同时对 x 求导，得

$$y' = \frac{1}{xy}(y + x \cdot y'), \text{即} \quad (xy - x)y' = y.$$

对这个等式两端同时对 x 求导,得

$$(xy' + y - 1)y' + (xy - x)y'' = y'.$$

整理得 $\quad (xy - x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0.$

故 $y = \ln(xy)$ 所确定的函数是所给微分方程的特解.

4 在下列各题中,确定函数关系式中所含的参数,使函数满足所给的初始条件:

(1) $x^2 - y^2 = C, \quad y\big|_{x=0} = 5$;

(2) $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}, \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1$;

(3) $y = C_1\sin(x - C_2), \quad y\big|_{x=\pi} = 1, \quad y'\big|_{x=\pi} = 0$.

【解】 (1) 因为 $y\big|_{x=0} = 5$,即将 $x = 0, y = 5$ 代入原方程得

$$C = 0 - 5^2 = -25, \quad \text{所以} \quad x^2 - y^2 = -25.$$

(2) 因为 当 $x = 0$ 时,$y = 0, y' = 1$,

且 $y' = 2(C_1 + C_2x)e^{2x} + C_2e^{2x} = e^{2x}(2C_1 + C_2 + 2C_2x)$,

所以 $0 = C_1, 1 = 2C_1 + C_2$, 即 $C_1 = 0, C_2 = 1$. 从而 $y = xe^{2x}$.

(3) $y = C_1\sin(x - C_2), y' = C_1\cos(x - C_2)$,由 $x = \pi$ 时 $y = 1$ 且 $y' = 0$,可得

$$C_1\sin(\pi - C_2) = 1, C_1\cos(\pi - C_2) = 0.$$

故 $C_1 = 1, C_2 = \frac{\pi}{2}, y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$.

5 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程:

(1) 曲线在点 (x,y) 处的切线的斜率等于该点横坐标的平方;

(2) 曲线上点 $P(x,y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q,且线段 PQ 被 y 轴平分.

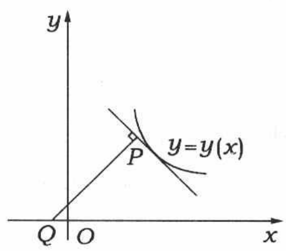
【解】 (1) 设曲线为 $y = y(x)$,则在点 (x,y) 处切线的斜率 $k = y'(x)$,依题设知

$$y'(x) = x^2.$$

(2) 曲线 $y = y(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的法线斜率为 $-1/y'(x)$,由条件知 Q 点的坐标为 $(-x,0)$,故有

$$\frac{y - 0}{x + x} = -\frac{1}{y'},$$

即得 $\quad yy' + 2x = 0.$



第 5 题图

6 用微分方程表示一物理命题:某种气体的压强 p 对于温度 T 的变化率与压强成正比,与温度的平方成反比.

【解】 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = k \cdot p/T^2$,$k$ 为比例系数.

7 一个半球体形状的雪堆,其体积融化率与半球面面积 A 成正比,比例系数 $k > 0$. 假设在融化过程中雪堆始终保持半球体形状. 已经半径为 r_0 的雪堆在开始融化的3小时内,融化了其体积的 $\frac{7}{8}$,问雪堆全部融化需要多少时间?

【解】 设雪堆在时刻 t 的体积为 $V=\dfrac{2}{3}\pi r^3$,侧面积 $S=2\pi r^2$. 由题设知

$$\frac{dV}{dt}=2\pi r^2\frac{dr}{dt}=-kS=-2\pi kr^2,$$

于是 $$\frac{dr}{dt}=-k,$$

积分得 $$r=-kt+C.$$

由 $r\big|_{t=0}=r_0$,得 $C=r_0$,$r=r_0-kt$. 又 $V\big|_{t=3}=\dfrac{1}{8}V\big|_{t=0}$,即 $\dfrac{2}{3}\pi(r_0-3k)^3=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{2}{3}\pi r_0^3$,

得 $k=\dfrac{1}{6}r_0$,从而

$$r=r_0-\frac{1}{6}r_0t$$

因雪堆全部融化时,$r=0$,故得 $t=6$,即雪堆全部融化需 6 小时.

习题 7-2　可分离变量的微分方程

1 求下列微分方程的通解:

(1) $xy'-y\ln y=0$;　　(2) $3x^2+5x-5y'=0$;

(3) $\sqrt{1-x^2}y'=\sqrt{1-y^2}$;　　(4) $y'-xy'=a(y^2+y')$;

(5) $\sec^2x\tan y\,dx+\sec^2y\tan x\,dy=0$;　　(6) $\dfrac{dy}{dx}=10^{x+y}$;

(7) $(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$;　　(8) $\cos x\sin y\,dx+\sin x\cos y\,dy=0$;

(9) $(y+1)^2\dfrac{dy}{dx}+x^3=0$;　　(10) $y\,dx+(x^2-4x)dy=0$.

【解】 (1) 原方程即为 $x\dfrac{dy}{dx}-y\ln y=0$. 分离变量为:$\dfrac{dy}{y\ln y}=\dfrac{dx}{x}$.

两端同时积分,得 $\ln(\ln y)=\ln x+\ln C=\ln Cx$,即 $\ln y=Cx$,故通解为 $y=e^{Cx}$.

(2) 将原方程分离变量,得 $5dy=(3x^2+5x)dx$,

两边积分得通解为: $y=\dfrac{1}{5}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+C$.

(3) 原方程分离变量得 $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,两边积分得通解:$\arcsin y=\arcsin x+C$.

(4) 原方程分离变量得 $\dfrac{dy}{y^2}=a\dfrac{dx}{1-x-a}$,两边积分得通解为 $\dfrac{1}{y}=a\ln|x+a-1|+C$.

(5) 分离变量得 $\dfrac{\sec^2y}{\tan y}dy=-\dfrac{\sec^2x}{\tan x}dx$,

两边积分得 $\ln\tan y=-\ln\tan x+\ln C$,故通解为 $\tan x\cdot\tan y=C$.

(6) 原方程分离变量得 $\dfrac{dy}{10^y}=10^x dx$,两边积分得通解:$10^{-y}+10^x=C$.

(7) 原方程分离变量得 $\dfrac{e^y dy}{1-e^y}=\dfrac{e^x dx}{1+e^x}$,

两边积分得 $\quad -\ln(e^y-1)=\ln(e^x+1)-\ln C$. 故通解为 $\quad (e^x+1)(e^y-1)=C$.

(8) 原方程分离变量得 $\quad \dfrac{\cos x}{\sin x}dx+\dfrac{\cos y}{\sin y}dy=0$,

积分得 $\quad \ln\sin y+\ln\sin x=\ln C$,故通解为 $\sin y\cdot\sin x=C$.

(9) 积分可得 $\quad \dfrac{1}{3}(y+1)^3+\dfrac{1}{4}x^4=C_1$,故通解为 $\quad 4(y+1)^3+3x^4=C(C=12C_1)$.

(10) 分离变量得 $\quad \dfrac{dy}{y}=-\dfrac{dx}{x^2-4x}$,

两边积分可得 $\quad 4\ln y=\ln x-\ln(x-4)+\ln C$,故通解为 $(x-4)y^4=Cx$.

2 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $y'=e^{2x-y}$, $\quad y\big|_{x=0}=0$; $\qquad$ (2) $\cos x\sin y dy=\cos y\sin x dx$, $\quad y\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$;

(3) $y'\sin x=y\ln y$, $\quad y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$; $\qquad$ (4) $\cos y dx+(1+e^{-x})\sin y dy=0$, $\quad y\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$;

(5) $x dy+2y dx=0$, $\quad y\big|_{x=2}=1$.

【解】 (1) 分离变量得 $\quad e^y dy=e^{2x}dx$,两边积分得 $\quad e^y=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$.

将 $x=0,y=0$ 代入得 $1=\dfrac{1}{2}+C \Rightarrow C=\dfrac{1}{2} \Rightarrow e^y=\dfrac{1}{2}(e^{2x}+1)$.

(2) 分离变量得 $\quad \dfrac{\sin y}{\cos y}dy=\dfrac{\sin x}{\cos x}dx$,两边积分得通解 $\quad \cos y=C\cos x$.

将 $x=0,y=\dfrac{\pi}{4}$ 代入,得 $\quad C=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 故所求特解为 $\quad \cos y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$.

(3) 分离变量得 $\quad \dfrac{dy}{y\ln y}=\dfrac{dx}{\sin x}$,两边积分得通解 $\quad y=e^{C\cdot\tan\frac{x}{2}}$.

将 $x=\dfrac{\pi}{2},y=e$ 代入得 $C=1$. 故所求特解为 $\quad y=e^{\tan\frac{x}{2}}$.

(4) 分离变量得 $\quad \dfrac{dx}{1+e^{-x}}+\tan y dy=0$,两边积分得

$$\ln(1+e^x)-\ln\cos y=\ln C \Rightarrow \frac{1+e^x}{\cos y}=C \Rightarrow 1+e^x=C\cos y.$$

将 $x=0,y=\dfrac{\pi}{4}$ 代入得 $C=2\sqrt{2}$. 故所求特解为 $\quad 1+e^x=2\sqrt{2}\cos y$.

(5) 分离变量得 $\quad \dfrac{dy}{y}=-2\cdot\dfrac{dx}{x}$,两边积分得通解 $\quad yx^2=C$.

将 $x=2,y=1$ 代入得 $C=4$. 故所求特解为 $\quad x^2y=4$.

3 有一盛满了水的圆锥形漏斗,高为10cm,顶角为60°,漏斗下面有面积为0.5cm^2 的孔,求水面高度变化的规律及水流完所需的时间.

【解】 设 V 是通过孔口横截面的水的体积,由水力学知道,水从孔口流出的流量(即通过孔口横截面的水体积 V 对时间 t 的变化率)可用下式计算

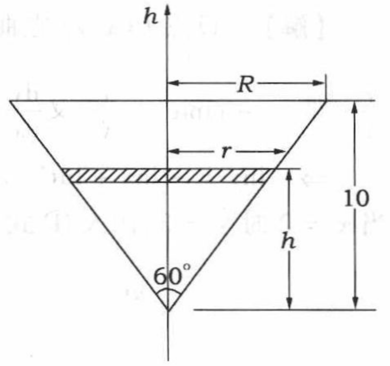
$$\frac{dV}{dt}=0.62S\sqrt{2gh},(S\text{ 为孔口横截面面积})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = 0.62 \times 0.5\sqrt{2 \times 980 \cdot h},$$

$$dV = 0.31\sqrt{1960h} \cdot dt$$

又因为$\frac{r}{h} = \frac{R}{10} = \frac{10\tan 30^\circ}{10} = \frac{1}{\sqrt{3}}, r = \frac{1}{\sqrt{3}}h,$

所以 $dV = -\pi r^2 dh = -\frac{1}{3}\pi h^2 dh \quad (dh < 0, dv > 0).$



第 3 题图

因此,未知函数 $h = h(t)$ 所满足的微分方程为

$$0.31\sqrt{1960h} \cdot dt = -\frac{1}{3}\pi h^2 dt, \; h\Big|_{t=0} = 10,$$

即 $$dt = -\frac{\pi}{0.93\sqrt{1960}} \cdot h^{\frac{3}{2}} dh.$$

积分得 $$t = -\frac{2\pi}{4.65\sqrt{1960}} h^{\frac{5}{2}} + C.$$

因为 $t = 0$ 时,$h = 10 \Rightarrow C = \frac{2\pi}{4.65\sqrt{1960}} 10^{\frac{5}{2}}.$

于是,得水面高度变化的规律为

$$t = \frac{2\pi}{4.65\sqrt{1960}}(10^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}) = 0.0305(10^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}) = -0.0305h^{\frac{5}{2}} + 9.645.$$

当 $h = 0$ 时,得水流完所需时间约为 10 秒.

4 质量为1g的质点受外力作用做直线运动,这外力和时间成正比,和质点运动的速度成反比,在 $t = 10$s时,速度等于50cm/s,外力为4g·cm/s²,问从运动开始经过了一分钟后的速度是多少?

【解】 外力 $F = k \cdot \frac{t}{v}$,当 $t = 10$s 时,$v = 5$cm/s. $F = 4$ 达因. 故 $k = \frac{Fv}{t} = 20$. 于是 $F = 20\frac{t}{v}$. 又 $F = ma = 1 \cdot \frac{dv}{dt} = 20 \cdot \frac{t}{v} \Rightarrow v dv = 20t dt \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = 10t^2 + C,$

又由 $t = 10$s 时 $v = 50$cm/s,可得 $C = 250$.

故 $v^2 = 20t^2 + 500 \Rightarrow v = \sqrt{20t^2 + 500}$

当 $t = 60$s 时 $v = \sqrt{20 \times 60^2 + 500} = 269.3(\text{cm/s}).$

5 镭的衰变有如下规律:镭的衰变速度与它的现存量 R 成正比. 由经验材料得知,镭经过 1600 年后,只余原始量 R_0 的一半,试求镭的现存量 R 与时间 t 的函数关系.

【解】 由题设知$\frac{dR}{dt} = -\lambda R, \Rightarrow \frac{dR}{R} = -\lambda dt \Rightarrow \ln R = -\lambda t + C, R = Ce^{-\lambda t}$. 由 $t = 0$, $R = R_0$ 得 $C = R_0$,故 $R = R_0 e^{-\lambda t}$.

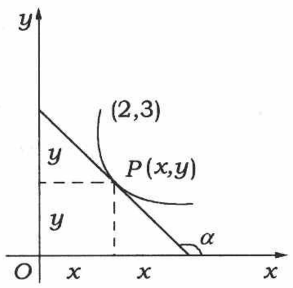
又由 $t = 1600, R = \frac{1}{2}R_0,$ 得 $\lambda = \frac{\ln 2}{1600} = 0.000433$,故 $R = R_0 e^{-0.000433t}$.

6 一曲线通过点(2,3),它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分,求这曲线方程.

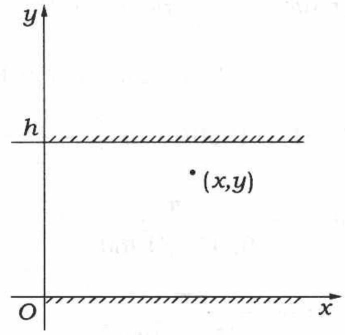
【解】 设点 $P(x,y)$ 在曲线上，则其切线在 x,y 轴的截距分别为 $2x,2y,\tan(\pi-\alpha)=\frac{2y}{2x}=\frac{y}{x}$. 即 $-\tan\alpha=\frac{y}{x}$，又 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\alpha$，从而有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$

$$\Rightarrow\ \ln y=-\ln x+\ln C\ \Rightarrow\ xy=C. \qquad ①$$

当 $x=2$ 时 $y=3$，代入①式可得 $C=6$，故所求曲线方程为 $xy=6$.



第 6 题图



第 7 题图

7 小船从河边点 O 处出发驶向对岸（两岸为平行直线），设船速为 a，船行方向始终与河岸垂直，又设河宽为 h，河中任一点处的水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比（比例系数为 k），求小船的航行路线.

【解】 建立如图的直角坐标系，并且设点 (x,y) 为船的位置，由题设知，水速

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ky(h-y)，即\quad \mathrm{d}x=ky(h-y)\mathrm{d}t,$$

又由 $y=at$，可得 $\mathrm{d}x=kat(h-at)\mathrm{d}t$. 积分得 $x=\frac{1}{2}kaht^2-\frac{1}{3}ka^2t^3$.

再把 $t=\frac{y}{a}$ 代入得：$x=\frac{k}{a}\left(\frac{h}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right)$.

习题 7－3 齐次方程

1 求下列齐次方程的通解：

(1) $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$；

(2) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln\frac{y}{x}$；

(3) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$；

(4) $(x^3+y^3)\mathrm{d}x-3xy^2\mathrm{d}y=0$；

(5) $\left(2x\sin\frac{y}{x}+3y\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x-3x\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}y=0$；

(6) $(1+2e^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x+2e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0$.

【解】 (1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}$，令 $u=\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

原方程变为 $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，

两端积分得 $\ln(u+\sqrt{u^2-1})=\ln x+\ln C\Rightarrow u+\sqrt{u^2-1}=Cx$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}=Cx \quad \Rightarrow \quad y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2.$$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$,令 $u=\frac{y}{x}$,则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$.

原方程变为 $\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}$,积分得 $\ln(\ln u-1)=\ln x+\ln C \quad \Rightarrow$

$$\ln u-1=Cx \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{y}{x}-1=Cx \quad \Rightarrow \quad y=xe^{Cx+1}.$$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$,令 $u=\frac{y}{x}$,则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

$$\Rightarrow \quad u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{u} \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad u\,du=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}u^2=\ln x+\ln C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{x^2}=2\ln x+2\ln C_1 \quad \Rightarrow \quad y^2=x^2\ln Cx^2\,(C=C_1^2).$$

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+y^3}{3xy^2}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}{3\left(\frac{y}{x}\right)^2}$. 令 $u=\frac{y}{x}$,则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$. 于是

$$u+\frac{du}{dx}x=\frac{1+u^3}{3u} \quad \Rightarrow \quad \frac{3u^2}{1-2u^3}du=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln(2u^3-1)=\ln x+\ln C_1.$$

以$\frac{y}{x}$代替 u,并整理得通解 $2y^3-x^3=Cx$.

(5) 原方程可写成$\frac{2}{3}\tan\frac{y}{x}+\frac{y}{x}-\frac{dy}{dx}=0$. 令 $u=\frac{y}{x}$,即 $y=xu$,有$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,则原方程成为$\frac{2}{3}\tan u+u-\left(u+x\frac{du}{dx}\right)=0$. 分离变量,得$\frac{3}{2}\frac{du}{\tan u}=\frac{dx}{x}$,积分得

$$\frac{3}{2}\ln|\sin u|=\ln|x|+\ln C_1,\text{即}\quad \sin^3u=\pm C_1x^3.$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式,得通解 $\sin^3\frac{y}{x}=Cx^2$.

(6) $\frac{dx}{dy}=\frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)\cdot 2e^{\frac{x}{y}}}{1+2e^{\frac{x}{y}}}$,令 $u=\frac{x}{y}$,$\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}$,原方程化为

$$u+y\frac{du}{dy}=\frac{2(u-1)e^u}{1+2e^u} \quad \Rightarrow \quad y\frac{du}{dy}=-\frac{u+2e^u}{1+2e^u}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+2e^u}{u+2e^u}du+\frac{dy}{y}=0 \quad \Rightarrow \quad \ln(u+2e^u)+\ln y=\ln C$$

$$\Rightarrow \quad y(u+2e^u)=C \quad \Rightarrow \quad x+2ye^{x/y}=C.$$

2 求下列齐次方程满足所给初始条件的特解:

(1) $(y^2-3x^2)\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x=0,\quad y\big|_{x=0}=1$;　　(2) $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x},\quad y\big|_{x=1}=2$;

(3) $(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(y^2+2xy-x^2)\mathrm{d}y=0,\quad y\big|_{x=1}=1$.

【解】 (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{2\dfrac{y}{x}}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-3}$,令 $y=ux$,则得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{2u}{u^2-3}\quad\Rightarrow\quad\frac{u^2-3}{u-u^3}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两边同时积分得　$-3\ln u+\ln(u-1)+\ln(u+1)=\ln Cx$

$$\Rightarrow\quad\ln\frac{u^2-1}{u^3x}=\ln C\quad\Rightarrow\quad y^2-x^2=Cy^3.$$

当 $x=0$ 时,$y=1$,求得 $C=1$,故所求特解为 $y^2-x^2=y^3$.

(2) 设 $y=ux$,则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.原方程变为

$$u\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}u^2=\ln x+\ln C\quad\Rightarrow\quad y^2=2x^2(\ln x+\ln C).$$

当 $x=1$ 时,$y=2$,代入得 $C=\mathrm{e}^2$,故所求特解为　$y^2=2x^2(\ln x+2)$.

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-2\left(\dfrac{y}{x}\right)-1}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+2\left(\dfrac{y}{x}\right)-1}$,令 $y=ux$,得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2-2u-1}{u^2+2u-1},\quad 即\quad -\frac{u^2+2u-1}{u^3+u^2+u+1}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

积分得:$\ln x=-\displaystyle\int\frac{u^2+2u-1}{u^3+u^2+u+1}\mathrm{d}u=-\int\left(\frac{-1}{u+1}+\frac{2u}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u$

$$=\ln(u+1)-\ln(u^2+1)+\ln C,$$

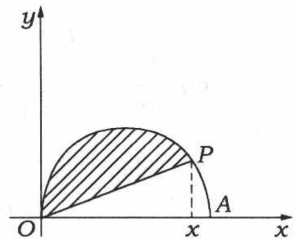
所以　$\ln\dfrac{x(u^2+1)}{u+1}=\ln C\quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=C(x+y)$.

当 $x=1$ 时,$y=1$,求得 $C=1$,故特解为　$x^2+y^2=x+y$.

3 设有连结点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$,对于 $\overset{\frown}{OA}$ 上任一点 $P(x,y)$,曲线弧 $\overset{\frown}{OP}$ 与直线段 $\overline{OP}$ 所围图形的面积为 x^2,求此曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程.

【解】 如图所示.由题设知　$x^2=\displaystyle\int_0^x y\mathrm{d}x-\frac{1}{2}xy$,对 x 求导,得

$$2x=y-\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}xy'\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}-4.$$



第 3 题图

令 $y=ux\quad\Rightarrow\quad u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u-4\quad\Rightarrow\quad\mathrm{d}u=-\dfrac{4}{x}\mathrm{d}x$.积分得

$u=-4\ln x+C\quad\Rightarrow\quad y=x(-4\ln x+C)$.

又曲线经过 $A(1,1)$,即当 $x=1$ 时,$y=1$,可以求得 $C=1$.故曲线 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程为

$$y = x(1 - 4\ln x).$$

4 化下列方程为齐次方程,并求出通解:

(1) $(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0$;

(2) $(x - y - 1)dx + (4y + x - 1)dy = 0$;

(3) $(3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0$;

(4) $(x + y)dx + (3x + 3y - 4)dy = 0$.

【解】 (1) 设 $x = X + 1, y = Y + 1$,则原方程化为

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X - 5Y}{2X + 4Y} = \frac{2 - 5\dfrac{Y}{X}}{2 + 4\dfrac{Y}{X}}.$$

令 $u = \dfrac{Y}{X} \Rightarrow u + X\dfrac{du}{dX} = \dfrac{2 - 5u}{2 + 4u} \Rightarrow -\dfrac{4u + 2}{4u^2 + 7u - 2}du = \dfrac{dX}{X}$

$$\Rightarrow \ln X = -\frac{1}{2}\int \frac{(8u + 7) - 3}{4u^2 + 7u - 2}du = -\frac{1}{2}\ln(4u^2 + 7u - 2) + \frac{3}{2}\int \frac{du}{4u^2 + 7u - 2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(4u^2 + 7u - 2) + \frac{1}{6}\int\left(-\frac{1}{u + 2} + \frac{4}{4u - 1}\right)du$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(4u^2 + 7u - 2) - \frac{1}{6}\ln\frac{4u - 1}{u + 2} + \ln C_1$$

$$\Rightarrow 6\ln X + 3\ln(4u^2 + 7u - 2) + \ln\frac{4u - 1}{u + 2} = \ln C_2 (C_2 = C_1^6)$$

$$\Rightarrow X^6(4u^2 + 7u - 2)^3 \cdot \frac{4u - 1}{u + 2} = C_2 \Rightarrow X^6(4u - 1)^4(u + 2)^2 = C_2$$

$$\Rightarrow X^3(4u - 1)^2(u + 2) = C_3, (C_3 = \sqrt{C_2}).$$

代回并整理得 $(4y - x - 3)^2(y + 2x - 3) = C, (C = \sqrt{C_3})$.

(2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x - y - 1}{4y + x - 1}$,因此,作变量替换 $x = X + 1, y = Y + 0 = Y$.

原方程化为 $\dfrac{dY}{dX} = -\dfrac{X - Y}{X + 4Y} = -\dfrac{1 - \dfrac{Y}{X}}{1 + 4\dfrac{Y}{X}}$.

令 $Y = uX$,则得 $u + X\dfrac{du}{dX} = -\dfrac{1 - u}{1 + 4u} \Rightarrow X\dfrac{du}{dX} = -\dfrac{1 + 4u^2}{1 + 4u}$.

分离变量,得 $-\dfrac{1 + 4u}{1 + 4u^2}du = \dfrac{dX}{x}$.

积分得 $\ln X = -\displaystyle\int \frac{1}{1 + 4u^2}du - \frac{1}{2}\int \frac{d(1 + 4u^2)}{1 + 4u^2} = \frac{1}{2}\arctan 2u - \frac{1}{2}\ln(1 + 4u^2) + C$,

即 $$2\ln X + \ln(1 + 4u^2) + \arctan 2u = C.$$

$\Rightarrow \ln X^2(1 + 4u^2) + \arctan 2u = C$.

代回并整理得 $\ln[4y^2 + (x - 1)^2] + \arctan\dfrac{2y}{x - 1} = C$.

(3) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{7x - 3y - 7}{3x - 7y - 3}$,作变量替换 $x = X + 1, y = Y$. 原方程化为:

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=-\frac{7X-3Y}{3X-7Y}=-\frac{7-3\cdot\frac{Y}{X}}{3-7\cdot\frac{Y}{X}}.$$

令 $Y=uX$,则得 $u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=-\frac{7-3u}{3-7u}\Rightarrow X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\frac{7(u^2-1)}{3-7u}$

$$\Rightarrow\frac{3-7u}{7(u^2-1)}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}X}{X}\Rightarrow\ln X=\int\frac{3-7u}{7(u^2-1)}\mathrm{d}u$$

$$\Rightarrow\ln X=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u^2}{u^2-1}+\frac{3}{14}\int\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(u^2-1)+\frac{3}{14}\ln\frac{u+1}{u-1}+\ln C^2$$

$$\Rightarrow 14\ln X+7\ln(u^2-1)+3\ln\frac{u-1}{u+1}=\ln C^2$$

$$\Rightarrow\ln X^{14}(u^2-1)^7\cdot\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3=\ln C^2$$

$$\Rightarrow X^{14}(u^2-1)^7\cdot\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3=C^2\Rightarrow X^{14}(u-1)^{10}(u+1)^4=C^2.$$

还原为 $(y-x+1)^2(y+x-1)^5=C.$

(4) 作变量替换 $v=x+y$,则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-1$. 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-1=-\frac{v}{3v-4}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{2(v-2)}{3v-4}$$

$$\Rightarrow\frac{3v-4}{2(v-2)}\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{3}{2}\int\mathrm{d}v+\int\frac{1}{v-2}\mathrm{d}v=\int\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\frac{3}{2}v+\ln(v-2)=x+C_1\Rightarrow 3v+2\ln(v-2)=2x+C,(C=2C_1).$$

还原为:$x+3y+2\ln(x+y-2)=C.$

习题 7 - 4 一阶线性微分方程

1 求下列微分方程的通解:

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\mathrm{e}^{-x}$;

(2) $xy'+y=x^2+3x+2$;

(3) $y'+y\cos x=\mathrm{e}^{-\sin x}$;

(4) $y'+y\tan x=\sin 2x$;

(5) $(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$;

(6) $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}+3\rho=2$;

(7) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=4x$;

(8) $y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$;

(9) $(x-2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+2(x-2)^3$;

(10) $(y^2-6x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0$.

【解】 (1) 由通解公式

$$y=e^{-\int dx}\left(\int e^{-x}\cdot e^{\int dx}dx+C\right)=e^{-x}\left(\int e^{-x}\cdot e^{x}dx+C\right)=e^{-x}(x+C).$$

(2) 原方程变为：$y'+\frac{1}{x}y=x+3+\frac{2}{x}$. 由通解公式得

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\left(x+3+\frac{2}{x}\right)\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int\left(x+3+\frac{2}{x}\right)\cdot xdx+C\right]=\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x+2+\frac{C}{x}.$$

(3) $y=e^{-\int\cos xdx}\left(\int e^{-\sin x}\cdot e^{\int\cos xdx}dx+C\right)=e^{-\sin x}(x+C)$.

(4) $y=e^{-\int\tan xdx}\left(\int\sin 2xe^{\int\tan xdx}dx+C\right)=e^{\ln\cos x}(\sin 2xe^{-\ln\cos x}dx+C)$

$$=\cos x\left(\int\sin 2x\cdot\frac{1}{\cos x}dx+C\right)=\cos x(C-2\cos x).$$

(5) $y'+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{\cos x}{x^2-1}$，故通解为

$$y=e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\left(\int\frac{\cos x}{x^2-1}\cdot e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\cdot dx+C\right)$$

$$=e^{-\ln(x^2-1)}\left[\int\frac{\cos x}{x^2-1}\cdot e^{\ln(x^2-1)}dx+C\right]=\frac{1}{x^2-1}(\sin x+C).$$

(6) $\rho=e^{-\int 3d\theta}\left(\int 2e^{\int 3d\theta}\cdot d\theta+C_1\right)=e^{-3\theta}\left(\frac{2}{3}e^{3\theta}+C_1\right)$，即　$3\rho=2+Ce^{-3\theta}$.

(7) $y=e^{-\int 2xdx}\left(\int 4xe^{\int 2xdx}dx+C\right)=e^{-x^2}\left(\int 4x\cdot e^{x^2}dx+C\right)=2+Ce^{-x^2}$.

(8) $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}-\frac{1}{y\ln y}x$，即 $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y\ln y}x=\frac{1}{y}$.

故　$x=e^{-\int\frac{1}{y\ln y}dy}\left(\int\frac{1}{y}e^{\int\frac{1}{y\ln y}dy}dy+C\right)=\frac{1}{\ln y}\left(\int\frac{1}{y}\cdot\ln ydy+C\right)=\frac{1}{\ln y}\left(\frac{1}{2}\ln^2y+C\right)$.

(9) $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x-2}y=2(x-2)^2$,

$$y=e^{-\int\frac{-1}{x-2}dx}\left[\int 2(x-2)^2e^{\int-\frac{1}{x-2}dx}dx+C\right]=e^{\ln(x-2)}\left[\int 2(x-2)^2\cdot e^{-\ln(x-2)}dx+C\right]$$

$$=(x-2)\left[\int 2(x-2)dx+C\right]=(x-2)^3+C(x-2).$$

(10) $\frac{dx}{dy}=\frac{y^2-6x}{2y}=\frac{3}{y}x-\frac{1}{2}y$. 即　$\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=\frac{1}{2}y$

所以　$x=e^{\int\frac{3}{y}dy}\left(\int\frac{1}{2}y\cdot e^{-\int\frac{3}{y}dy}dy+C\right)=y^3\left(-\int\frac{1}{2}y\cdot\frac{1}{y^3}dy+C\right)=\frac{1}{2}y^2+Cy^3$.

2 求下列微分方程满足所给初值条件的特解：

(1) $\frac{dy}{dx}-y\tan x=\sec x$,　$y|_{x=0}=0$;　　(2) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$,　$y|_{x=\pi}=1$;

(3) $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x}$,　$y|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$;　　(4) $\frac{dy}{dx}+3y=8$,　$y|_{x=0}=2$;

(5) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2-3x^2}{x^3}y=1,\quad y\big|_{x=1}=0.$

【解】 (1)$y=e^{\int\tan x dx}\left(\int\sec x e^{-\int\tan x dx}dx+C\right)$

$$=e^{-\ln\cos x}\left(\int\frac{1}{\cos x}\cdot e^{\ln\cos x}dx+C\right)=\frac{1}{\cos x}(x+C).$$

将 $x=0,y=0$ 代入求得 $C=0$. 故所求特解为 $y=\dfrac{x}{\cos x}$.

(2)$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\dfrac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=\dfrac{1}{x}\left(\int\sin x dx+C\right)=\dfrac{1}{x}(C-\cos x).$

将 $x=\pi,y=1$ 代入求得 $C=\pi-1$. 故所求特解为 $y=\dfrac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$.

(3)$y=e^{-\int\cot x dx}\left(\int 5e^{\cos x}e^{\int\cot x dx}dx+C\right)=\dfrac{1}{\sin x}\left(5\int e^{\cos x}\cdot\sin x dx+C\right)=\dfrac{1}{\sin x}(C-5e^{\cos x}).$

将 $x=\dfrac{\pi}{2},y=-4$ 代入,求得 $C=1$. 故所求特解为 $y=\dfrac{1}{\sin x}(1-5e^{\cos x})$.

(4)$y=e^{-\int 3dx}\left(\int 8e^{\int 3dx}dx+C\right)=e^{-3x}\left(\int 8e^{3x}dx+C\right)$

$$=e^{-3x}\left(C+\frac{8}{3}e^{3x}\right)=Ce^{-3x}+\frac{8}{3}.$$

将 $x=0,y=2$ 代入,求得 $C=-\dfrac{2}{3}$,故所求特解为 $y=\dfrac{8}{3}-\dfrac{2}{3}e^{-3x}$.

(5) 因为 $\displaystyle\int\frac{2-3x^2}{x^3}dx=-x^{-2}-3\ln x+C$

所以 $y=e^{-\int\frac{2-3x^2}{x^3}dx}\left(\int e^{\int\frac{2-3x^2}{x^3}dx}dx+C\right)=e^{x^{-2}+3\ln x}\left(\int e^{-x^{-2}-3\ln x}dx+C\right)$

$$=e^{x^{-2}}\cdot x^3\left(\frac{1}{2}e^{-x^{-2}}+C\right)=x^3\left(Ce^{x^{-2}}+\frac{1}{2}\right).$$

将 $x=1,y=0$ 代入,求得 $C=-\dfrac{1}{2e}$,故所求特解为 $y=x^3\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e}e^{x^{-2}}\right)$.

3 求一曲线方程,这曲线经过原点,并且它在点 (x,y) 处的切线斜率等于 $2x+y$.

【解】 由题意,得 $y'=2x+y,y\big|_{x=0}=0$. 于是

$$y=e^{\int dx}\left(\int 2xe^{-\int dx}dx+C\right)=e^x\left(2\int xe^{-x}dx+C\right)=e^x(-2xe^{-x}-2e^{-x}+C).$$

由 $x=0,y=0$,得 $c=2$. 所以 $y=e^x(-2xe^{-x}-2e^{-x}+2)=2(e^x-x-1)$.

4 设有一质量为 m 的质点做直线运动,从速度等于零的时刻起,有一个与运动方向一致、大小与时间成正比(比例系数为 k_1)的力作用于它,此外还受一与速度成正比(比例系数为 k_2)的阻力作用,求质点运动的速度与时间的函数关系.

【解】 $F=ma=m\dfrac{dv}{dt}=k_1t-k_2v.\quad \dfrac{dv}{dt}+\dfrac{k_2}{m}v=\dfrac{k_1}{m}t.$

所以 $v=e^{-\int\frac{k_2}{m}dt}\left(\int\dfrac{k_1}{m}te^{\int\frac{k_2}{m}dt}dt+C\right)=e^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\dfrac{k_1}{m}\int te^{\frac{k_2}{m}t}dt+C\right)$

$$= e^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\frac{k_1}{k_2}t \cdot e^{\frac{k_2}{m}t} - \frac{k_1 m}{k_2^2}e^{\frac{k_2}{m}t} + C\right).$$

由题意有：$t = 0, v = 0$， 则 $C = \dfrac{k_1 m}{k_2^2}$.

所以 $v = e^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\dfrac{k_1}{k_2}te^{\frac{k_2}{m}t} - \dfrac{k_1 m}{k_2^2}e^{\frac{k_2}{m}t} + \dfrac{k_1 m}{k_2^2}\right) = \dfrac{k_1}{k_2}t - \dfrac{k_1 m}{k_2^2}\left(1 - e^{-\frac{k_2}{m}t}\right)$.

5 设有一个由电阻 $R = 10\Omega$，电感 $L = 2\mathrm{H}$ 和电源电压 $E = 20\sin 5t\mathrm{V}$ 串联组成的电路，开关 S 合上后，电路中有电流通过，求电流 i 与时间 t 的函数关系.

【解】 由题设知 $20\sin 5t = 10i + 2\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$，即 $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 5i = 10\sin 5t$，

$$i = e^{-\int 5\mathrm{d}t}\left(\int 10\sin 5t e^{\int 5\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + C\right) = e^{-5t}\left(2\int \sin 5t \mathrm{d}e^{5t} + C\right)$$

$$= \sin 5t - \cos 5t + Ce^{-5t}.$$

当 $t = 0$ 时，$i = 0$，故 $C = 1$. 所以 $i = \sin 5t - \cos 5t + e^{-5t} = e^{-5t} + \sqrt{2}\sin\left(5t - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

6 验证形如 $yf(xy)\mathrm{d}x + xg(xy)\mathrm{d}y = 0$ 的微分方程，可经变量替换 $v = xy$ 化为可分离变量的方程，并求其解.

【证】 原方程 $yf(xy) + xg(xy)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$. ①

令 $v = xy$，则 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = y + x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 代入方程 ① 得

$$\frac{v}{x}f(v) + g(v)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{v}{x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad g(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{vg(v) - vf(v)}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{g(v)}{v[g(v) - f(v)]}\cdot \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

这是一个可分离变量的微分方程. 将两边积分得通解

$$\int \frac{g(v)}{v[g(v) - f(v)]}\mathrm{d}v = \ln Cx. \qquad ②$$

然后将 $v = xy$ 代入 ② 即得通解.

7 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程，然后求出通解.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x + y)^2$； (2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x - y} + 1$；

(3) $xy' + y = y(\ln x + \ln y)$；

(4) $y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1$；

(5) $y(xy + 1)\mathrm{d}x + x(1 + xy + x^2y^2)\mathrm{d}y = 0$.

【解】 (1) 令 $u = x + y \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 1 = u^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \arctan u = x + C \quad \Rightarrow \quad \arctan(x + y) = x + C.$$

(2) 令 $u = x - y \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 1 - \dfrac{dy}{dx}$,代入原方程得

$$1 - \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} + 1 \Rightarrow udu = -dx$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}u^2 = -x + C \Rightarrow \dfrac{1}{2}(x - y)^2 = -x + C.$

(3) 原方程变为 $xy' + y = y\ln(xy)$. ①

令 $u = xy \Rightarrow u' = y + xy'$,代入 ① 得

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}\ln u \Rightarrow \frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(\ln u) = \ln Cx$$

$\Rightarrow u = e^{Cx} \Rightarrow xy = e^{Cx}.$

(4) 原方程可变为 $y' = (y + \sin x - 1)^2 - \cos x.$ ①

令 $u = y + \sin x - 1 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{dy}{dx} + \cos x$,代入 ① 后得

$$\frac{du}{dx} = u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2} = dx$$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{u} = x + C \Rightarrow -\dfrac{1}{y + \sin x - 1} = x + C$

$\Rightarrow y = 1 - \sin x - \dfrac{1}{x + C}.$

(5) 原方程变为 $y(xy + 1) + (1 + xy + x^2y^2)x\dfrac{dy}{dx} = 0.$ ①

令 $u = xy \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = y + x\dfrac{dy}{dx}$,代入 ① 得

$$\frac{u}{x}(u + 1) + (1 + u + u^2)\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) = 0$$

$\Rightarrow u^2 + u + x(1 + u + u^2)\dfrac{du}{dx} - u - u^2 - u^3 = 0$

$\Rightarrow \dfrac{1 + u + u^2}{u^3}du = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{u^2} - \dfrac{1}{u} + \ln|u| = \ln|x| + \ln C_1$

$\Rightarrow 2u^2\ln|u| = 2u^2\ln|x| + 1 + 2u + Cu^2 (C = 2\ln C_1)$

$\Rightarrow 2x^2y^2\ln|xy| = 2x^2y^2\ln|x| + 1 + 2xy + Cx^2y^2$

$\Rightarrow 2x^2y^2\ln|y| = 1 + 2xy + Cx^2y^2.$

8 求下列伯努利方程的通解:

(1) $\dfrac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - \sin x)$;

(2) $\dfrac{dy}{dx} - 3xy = xy^2$;

(3) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{3}y = \dfrac{1}{3}(1 - 2x)y^4$;

(4) $\dfrac{dy}{dx} - y = xy^5$;

(5) $xdy - [y + xy^3(1 + \ln x)]dx = 0.$

【解】 (1) $n = 2$,令 $z = y^{1-n} = y^{-1}$,则有

$\dfrac{dz}{dx} + (1 - 2)z = (1 - 2)(\cos x - \sin x)$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} - z = \sin x - \cos x.$$

$$z = e^{\int dx}\left[\int(\sin x - \cos x)e^{-\int dx}dx + C\right] = e^x\left[\int e^{-x}(\sin x - \cos x)dx + C\right] = Ce^x - \sin x.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} = Ce^x - \sin x.$$

(2) 令 $z = \dfrac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dz}{dx} + 3xz = -x.$

$$z = e^{-\int 3xdx}\left[\int(-x)e^{\int 3xdx}dx + C\right] = e^{-\frac{3}{2}x^2}\left(-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2} + C\right) = -\frac{1}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} = -\frac{1}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}x^2} \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{3}{y}\right)e^{\frac{3}{2}x^2} = C.$$

(3) 令 $z = y^{-3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dz}{dx} - z = 2x - 1.$

$$z = e^{\int dx}\left[\int(2x-1)e^{-\int dx}dx + C\right] = -2x - 1 + Ce^x$$

$$\Rightarrow \quad y^3(Ce^x - 2x - 1) = 1.$$

(4) 令 $z = y^{-4} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dz}{dx} + 4z = -4x.$

$$z = e^{-\int 4dx}\left[\int(-4x)\cdot e^{\int 4dx}dx + C\right] = e^{-4x}\left(-4\int xe^{4x}dx + C\right) = \frac{1}{4} - x + Ce^{-4x}$$

$$= \frac{1}{y^4} = \frac{1}{4} - x + Ce^{-4x}.$$

(5) 原方程变形为$\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x}y = (1 + \ln x)y^3.$

令 $z = y^{-2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dz}{dx} + \dfrac{2}{x}z = -2(1 + \ln x).$

$$z = e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[\int(-2)(1+\ln x)e^{\int\frac{2}{x}dx}dx + C\right] = x^{-2}\left[-2\int(1+\ln x)x^2dx + C\right]$$

$$= x^{-2}\left(-2\int x^2dx - 2\int x^2\ln xdx + C\right) = x^{-2}\left(-\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}\int\ln xdx^3 + C\right)$$

$$= x^{-2}\left(-\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^3\ln x + \frac{2}{9}x^3 + C\right) = \frac{C}{x^2} - \frac{2}{3}x\ln x - \frac{4}{9}x.$$

故 $\quad \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{C}{x^2} - \dfrac{2}{3}x\ln x - \dfrac{4}{9}x.$

习题7-5　可降阶的高阶微分方程

1 求下列各微分方程的通解:

(1) $y'' = x + \sin x$;　　(2) $y''' = xe^x$;

(3) $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$;　　(4) $y'' = 1 + y'^2$;

(5) $y'' = y' + x$;　　(6) $xy'' + y' = 0$;

(7) $yy'' + 2y'^2 = 0$; (8) $y^3y'' - 1 = 0$;

(9) $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$; (10) $y'' = (y')^3 + y'$.

【解】 (1) $y' = \int (x + \sin x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}x^2 - \cos x + C_1$

所以 $y = \int\left(\dfrac{1}{2}x^2 - \cos x + C_1\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{6}x^3 - \sin x + C_1x + C_2$.

(2) $y'' = \int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C_1$,

$$y' = \int (x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C_1)\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + C_1x + C_2,$$

$$y = \int [(x-2)\mathrm{e}^x + C_1x + C_2]\mathrm{d}x = (x-3)\mathrm{e}^x + C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

(3) $y' = \int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C_1$,

所以 $y = \int (\arctan x + C_1)\mathrm{d}x = x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1x + C_2$.

(4) 令 $y' = p$,则 $y'' = p'$,且原方程化为 $p' = 1 + p^2$. 分离变量,得$\dfrac{\mathrm{d}p}{1+p^2} = \mathrm{d}x$,

积分得 $\arctan p = x + C_1$,即 $p = y' = \tan(x + C_1)$,

再积分得通解 $y = \int \tan(x + C_1)\mathrm{d}x = -\ln\left|\cos(x + C_1)\right| + C_2$.

(5) 令 $y' = p$,则 $y'' = p'$,且原方程可化为 $p' - p = x$.

利用一阶线性方程的求解公式,得

$$p = \mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left(\int x\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_1\right) = \mathrm{e}^x\left(\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + C_1\right)$$
$$= \mathrm{e}^x(-x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + C_1) = -x - 1 + C_1\mathrm{e}^x.$$

积分得通解 $y = \int (C_1\mathrm{e}^x - x - 1)\mathrm{d}x = C_1\mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2} - x + C_2$.

(6) 令 $y' = p$,则 $y'' = p'$,且原方程化为 $xp' + p = 0$,分离变量,得$\dfrac{\mathrm{d}p}{p} = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$,

积分得 $\ln p = \ln\dfrac{1}{x} + \ln C_1$,即 $p = \dfrac{C_1}{x}$.

再积分,得通解 $y = \int \dfrac{C_1}{x}\mathrm{d}x = C_1\ln x + C_2$.

(7) 令 $y' = p$,则 $y'' = p' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$,且原方程化为 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + 2p^2 = 0$.

分离变量,得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p} = -2\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$,

积分得 $\ln|p| = \ln\dfrac{1}{y^2} + \ln C_0$,即 $y' = p = \dfrac{C_0}{y^2}$,

分离变量,得 $y^2\mathrm{d}y = C_0\mathrm{d}x$,积分得 $y^3 = 3C_0x + C_2$,即通解为 $y^3 = C_1x + C_2$.

(8) 令 $y' = p$,则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,且原方程化为 $y^3p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - 1 = 0$. 分离变量,得

$$p\mathrm{d}p = \frac{1}{y^3}\mathrm{d}y \xRightarrow{\text{积分}} p^2 = -\frac{1}{y^2} + C_1,$$

故 $$y' = p = \pm\sqrt{C_1 - \frac{1}{y^2}} = \pm\frac{1}{|y|}\sqrt{C_1y^2 - 1}.$$

分离变量,得 $$\frac{|y|\mathrm{d}y}{\sqrt{C_1y^2 - 1}} = \pm\mathrm{d}x.$$

由于 $|y| = y\operatorname{sgn}(y)$,故上式两端积分得

$$\operatorname{sgn}(y)\int\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{C_1y^2 - 1}} = \pm\int\mathrm{d}x,\quad \operatorname{sgn}(y)\sqrt{C_1y^2 - 1} = \pm C_1x + C_2.$$

两边平方,得 $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2$.

(9) 用 $2y'$ 乘方程 $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$ 的两端,得 $2y'y'' = \frac{2y'}{\sqrt{y}}$,即 $(y'^2)' = (4\sqrt{y})'$,

故 $$y'^2 = 4\sqrt{y} + C'_1,\text{有 } y' = \pm 2\sqrt{\sqrt{y} + C_1}.\left(C_1 = \frac{C'_1}{4}\right)$$

分离变量,得 $\mathrm{d}x = \pm\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{\sqrt{y} + C_1}}$. 积分,得

$$\begin{aligned}
x &= \pm\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{y})^2}{2\sqrt{\sqrt{y} + C_1}} = \pm\int\frac{\sqrt{y}\mathrm{d}\sqrt{y}}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}}\\
&= \pm\int\frac{(\sqrt{y} + C_1) - C_1}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}}\mathrm{d}(\sqrt{y})\\
&= \pm\left[\int\sqrt{\sqrt{y} + C_1}\mathrm{d}(\sqrt{y} + C_1) - C_1\int\frac{1}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}}\mathrm{d}(\sqrt{y} + C_1)\right]\\
&= \pm\left[\frac{2}{3}(\sqrt{y} + C_1)^{\frac{3}{2}} - 2C_1(\sqrt{y} + C_1)^{\frac{1}{2}}\right] + C_2.
\end{aligned}$$

(10) 令 $y' = p$,则 $y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,原方程化为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^3 + p$,即 $p\left[\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - (1 + p^2)\right] = 0$.

若 $p \equiv 0$,则 $y \equiv C$. $y \equiv C$ 是原方程的解,但不是通解.

若 $p \not\equiv 0$,由于 p 的连续性,必在 x 的某区间有 $p \neq 0$. 于是 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - (1 + p^2) = 0$.

分离变量,得 $$\frac{\mathrm{d}p}{1 + p^2} = \mathrm{d}y,$$

积分得 $\arctan p = y - C_1$,即 $p = \tan(y - C_1)$,亦即 $\cot(y - C_1)\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$.

积分得 $\ln\sin(y - C_1) = x + \ln C_2$,即 $\sin(y - C_1) = C_2\mathrm{e}^x$,

也可写成 $y = \arcsin(C_2\mathrm{e}^x) + C_1$,

由于当 $C_2 = 0$ 时,$y = C_1$,故前面所得的解 $y \equiv C$ 也包含在这个通解之内.

2 求下列各微分方程满足所给初值条件的特解:

(1) $y^3y'' + 1 = 0$, $y\big|_{x=1} = 1$, $y'\big|_{x=1} = 0$;

(2) $y'' - ay'^2 = 0$, $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = -1$;

(3) $y''' = e^{ax}$, $y\big|_{x=1} = y'\big|_{x=1} = y''\big|_{x=1} = 0$;

(4) $y'' = e^{2y}$, $y\big|_{x=0} = y'\big|_{x=0} = 0$;

(5) $y'' = 3\sqrt{y}$, $y\big|_{x=0} = 1$, $y'\big|_{x=0} = 2$;

(6) $y'' + (y')^2 = 1$, $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 0$.

【解】 (1) 令 $y' = P$,则 $y'' = P\dfrac{dP}{dy}$,原方程化为

$$y^3 \cdot P\frac{dP}{dy} = -1 \quad \Rightarrow \quad PdP = -\frac{1}{y^3}dy \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}P^2 = \frac{1}{2}y^{-2} + \frac{1}{2}C_1 \quad \Rightarrow \quad P^2 = \frac{1}{y^2} + C_1.$$

由 $x = 1, y = 1, y' = P = 0$ 知,$C_1 = -1$. 从而有

$$y' = P = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = \pm dx$$

积分得 $$-\sqrt{1-y^2} = \pm x + C_2.$$

由 $x = 1, y = 1$,得 $C_2 = \mp 1$,故 $-\sqrt{1-y^2} = \pm(x-1)$.

两边平方,得 $x^2 + y^2 = 2x$.

由于在点 $x = 1$ 处,$y = 1$,故在 $x = 1$ 的某邻域内 $y > 0$,因而特解可表示为

$$y = \sqrt{2x - x^2}.$$

(2) 令 $y' = p$,则 $y'' = p'$,原方程化为 $p' - ap^2 = 0$,分离变量即 $\dfrac{dp}{p^2} = a dx$,

积分得 $$-\frac{1}{p} = ax + C_1.$$

代入初始条件 $x = 0, p = y' = -1$ 得 $C_1 = 1$. 从而有 $-\dfrac{1}{y'} = ax + 1$,即

$$y' = -\frac{1}{ax+1} \xRightarrow{\text{积分}} y = -\frac{1}{a}\ln(ax+1) + C_2.$$

代入初始条件 $y\big|_{x=0} = 0$,得 $C_2 = 0$,故所求特解为 $y = -\dfrac{1}{a}\ln(ax+1)$.

(3) 因 $y''' = e^{ax}$,并由初始条件 $x = 1, y'' = 0$,故积分得

$$y'' = \int_1^x y''' dx = \int_1^x e^{ax} dx = \frac{1}{a}(e^{ax} - e^a).$$

又因 $x = 1$ 时,$y' = 0$,故积分得

$$\begin{aligned} y' &= \int_1^x y'' dx = \int_1^x \frac{1}{a}(e^{ax} - e^a) dx \\ &= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}(e^{ax} - e^a) - e^a(x-1)\right] \\ &= \frac{1}{a^2}e^{ax} - \frac{e^a}{a}x + \frac{e^a}{a}\left(1 - \frac{1}{a}\right). \end{aligned}$$

又因 $x = 1$ 时,$y = 0$,故再积分得

$$y=\int_1^x y'\mathrm{d}x=\int_1^x\left[\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{ax}-\frac{\mathrm{e}^a}{a}x+\frac{\mathrm{e}^a}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a^3}(\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^a)-\frac{\mathrm{e}^a}{2a}(x^2-1)+\frac{\mathrm{e}^a}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)(x-1)$$

$$=\frac{1}{a^3}\mathrm{e}^{ax}-\frac{\mathrm{e}^a}{2a}x^2+\frac{\mathrm{e}^a}{a^2}(a-1)x+\frac{\mathrm{e}^a}{2a^3}(2a-a^2-2).$$

(4) 令 $y'=P$，则 $y''=P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，于是方程化为

$$P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=\mathrm{e}^{2y}\quad\Rightarrow\quad P\mathrm{d}P=\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{2}P^2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}+\frac{1}{2}C_1\quad\Rightarrow\quad P^2=\mathrm{e}^{2y}+C_1.$$

因为 $x=0$ 时，$y'=y=0$，故 $C_1=-1$，

则 $P=y'=\pm\sqrt{\mathrm{e}^{2y}-1}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{e}^{2y}-1}}=\pm\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\quad\arcsin\mathrm{e}^{-y}=\mp\,x+C_2$. 因为 $x=0$ 时，$y=0$. 所以 $C_2=\dfrac{\pi}{2}$.

于是所求的特解为 $\arcsin\mathrm{e}^{-y}=\mp\,x+\dfrac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad\mathrm{e}^{-y}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\pm x\right)=\cos x$

$\Rightarrow\quad-y=\ln\cos x\quad\Rightarrow\quad y=\ln\sec x$.

(5) 令 $y'=P$，$y''=P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，则原方程化为

$$P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=3y^{\frac{1}{2}}\quad\Rightarrow\quad P\mathrm{d}P=3y^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}P^2=2y^{\frac{3}{2}}+C_1.$$

因为 $x=0$ 时，$y'=P=2$，$y=1$，所以 $C_1=0$.

故 $y'=P=\pm\,2y^{\frac{3}{4}}$，由于 $y''=3\sqrt{y}>0$，

$y'=2y^{\frac{3}{4}}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{3}{4}}}=2\mathrm{d}x$，积分得 $4y^{\frac{1}{4}}=2x+C_2$.

因为 $x=0$ 时，$y=1$，所以 $C_2=4$. 所以所求特解为 $y=\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)^4$.

(6) 令 $y'=P\quad\Rightarrow\quad P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=1-P^2$.

$$\Rightarrow\quad\frac{P\mathrm{d}P}{1-P^2}=\mathrm{d}y\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}\ln(P^2-1)=-y+C$$

$$\Rightarrow\quad\ln(P^2-1)=-2y+2C\quad\Rightarrow\quad P^2-1=C_1\mathrm{e}^{-2y}.$$

因为 $x=0$ 时，$y=y'=0$. 所以 $C_1=-1$.

则 $P^2=1-\mathrm{e}^{-2y}\quad\Rightarrow\quad y'=\pm\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2y}}$

$$\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2y}}}=\pm\,\mathrm{d}x\quad\Rightarrow\quad\pm\,x=\ln(\mathrm{e}^y+\sqrt{\mathrm{e}^{2y}-1})+C_2.$$

因为 $x=0$ 时，$y=0$，所以 $C_2=0$，

则 $\pm\,x=\ln(\mathrm{e}^y+\sqrt{\mathrm{e}^{2y}-1})$，$\mathrm{e}^{\pm x}=\mathrm{e}^y+\sqrt{\mathrm{e}^{2y}-1}$.

由 $e^x = e^y + \sqrt{e^{2y}-1}$ 知 $\quad e^{2y}-1=(e^x-e^y)^2 \quad \Rightarrow \quad e^y = \dfrac{e^{-x}+e^x}{2}$.

由 $e^{-x} = e^y + \sqrt{e^{2y}-1}$ 知 $\quad e^{2y}-1=(e^{-x}-e^y)^2 \quad \Rightarrow \quad e^y = \dfrac{e^{-x}+e^x}{2}$.

从而总有 $\quad y = \ln \mathrm{ch} x$.

3 试求 $y''=x$ 的经过点 $M(0,1)$ 且在此点与直线 $y=\dfrac{1}{2}x+1$ 相切的积分曲线.

【解】 因为 $y''=x, y'=\int x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2+C_1$,

$$y=\int\left(\frac{1}{2}x^2+C_1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2.$$

积分曲线经过 $M(0,1)$ 点,即 $y\big|_{x=0}=1$,积分曲线在 $M(0,1)$ 外与 $y=\dfrac{1}{2}x+1$ 相切,即 $y'\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$. 所以 由 $x=0,y=1,y'=\dfrac{1}{2}$ 解得 $C_1=\dfrac{1}{2},C_2=1$.

故所求曲线为 $\quad y=\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x+1$.

4 设有一质量为 m 的物体,在空中由静止开始下落,如果空气阻力为 $R=cv$(其中 c 为常数,v 为物体运动的速度),试求物体下落的距离 s 和时间 t 的函数关系.

【解】 根据牛顿第二定律,有关系式 $m\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=mg-c\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$,并依据题设条件,得初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g-\frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\quad s\big|_{t=0}=0,\quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}=0.$$

令 $\quad \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$,方程成为$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g-\dfrac{c}{m}v$,分离变量后积分$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{c}{m}v}=\int\mathrm{d}t$ 得

$$\ln\left(g-\frac{c}{m}v\right)=-\frac{c}{m}t+C_1,$$

代入初始条件 $v\big|_{t=0}=0$,得 $C_1=\ln g$. 于是有 $\quad v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dfrac{mg}{c}(1-e^{-\frac{c}{m}t})$;

积分得 $\quad s=\dfrac{mg}{c}\left(t+\dfrac{m}{c}e^{-\frac{c}{m}t}\right)+C_2$. 代入初始条件 $s\big|_{t=0}=0$,得 $C_2=-\dfrac{m^2g}{c^2}$.

故所求特解(即下落的距离与时间的关系)为

$$s=\frac{mg}{c}\left(t+\frac{m}{c}e^{-\frac{c}{m}t}-\frac{m}{c}\right)=\frac{mg}{c}t+\frac{m^2g}{c^2}(e^{-\frac{c}{m}t}-1).$$

习题 7-6 高阶线性微分方程

1 下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的?

(1) x, x^2; (2) $x, 2x$; (3) $e^{2x}, 3e^{2x}$;

(4) e^{-x}, e^x; (5) $\cos 2x, \sin 2x$; (6) e^{x^2}, xe^{x^2};

(7) $\sin 2x, \sin x\cos x$; (8) $e^x\cos 2x, e^x\sin 2x$;

(9) $\ln x, x\ln x$;　　　　(10) $e^{ax}, e^{bx}(a \neq b)$.

【解】 (1) 设存在常数 k_1, k_2,使等式

$$k_1 x + k_2 x^2 \equiv 0 = 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

成立,等式右端为一个二次多项式,根据恒等式对应次数系数相等,必有 $k_1 = 0, k_2 = 0$,故 x, x^2 线性无关.

(2) 取 $k_1 = -2, k_2 = 1$,有 $k_1 \cdot x + k_2 \cdot 2x \equiv 0$. 故 $x, 2x$ 线性相关.

(3) 线性相关. 因为 $(-3) \cdot e^{2x} + 1 \cdot 3e^{2x} \equiv 0$.

(4) 设 $k_1 e^x + k_2 e^{-x} \equiv 0$, 令 $x = 0$ 得 $k_1 + k_2 = 0$, 令 $x = 1$, 得 $k_1 e + k_2 e^{-1} = 0$, 故有 $\begin{cases} k_1 + k_2 = 0, \\ k_1 e + k_2 e^{-1} = 0, \end{cases}$ 解之得 $k_1 = k_2 = 0$. 因此 e^x, e^{-x} 线性无关.

(5) 线性无关. 设 $k_1 \cos 2x + k_2 \sin 2x \equiv 0$,令 $x = 0$,得 $k_1 = 0$,即 $k_2 \sin 2x \equiv 0$,故 $k_2 = 0$.

(6) 线性无关. 设 $k_1 e^{x^2} + k_2 (x e^{x^2}) \equiv 0$,有 $(k_1 + k_2 x) e^{x^2} \equiv 0$,所以 $k_1 + k_2 x \equiv 0$. 故 $k_1 = k_2 = 0$.

(7) 线性相关. 因为 $\frac{1}{2} \cdot \sin 2x + (-1) \cdot \sin x \cos x \equiv 0$.

(8) 线性无关. 由上面(5)可推出.

(9) 线性无关. 设 $k_1 \ln x + k_2 x \ln x \equiv 0$. 取 $x = e$,有 $k_1 + k_2 e = 0$,取 $x = e^2$,有 $2k_1 + 2k_2 e^2 = 0$,解得 $k_1 = k_2 = 0$.

(10) 线性无关. 设 $k_1 e^{ax} + k_2 e^{bx} \equiv 0$,令 $x = 0$,有 $k_1 + k_2 = 0$,令 $x = 1$,有 $k_1 e^a + k_2 e^b = 0$,解得 $k_1 = k_2 = 0$.

2 验证 $y_1 = \cos wx$ 及 $y_2 = \sin wx$ 都是方程 $y'' + w^2 y = 0$ 的解,并写出该方程的通解.

【解】 $y_1' = -w \sin wx$, $y_1'' = -w^2 \cos wx$,所以 $y_1'' + w^2 y_1 = -w^2 \cos wx + w^2 \cos wx = 0$.

故 y_1 是方程的解. 同理可证 y_2 也是方程的解. 又因 $\frac{y_2}{y_1} = \tan wx$ 不是常数,故 y_1, y_2 线性无关,所以方程的通解为:$y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$.

3 验证 $y_1 = e^{x^2}$ 及 $y_2 = x e^{x^2}$ 都是方程 $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ 的解,并写出该方程的通解.

【解】 $y_1' = 2x e^{x^2}, y_1'' = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} = 2e^{x^2}(1 + 2x^2)$,

$y_2' = e^{x^2}(1 + 2x^2), y_2'' = e^{x^2}(6x + 4x^3)$.

所以 $y_1'' - 4xy_1' + (4x^2 - 2)y_1 = 2e^{x^2}(1 + 2x^2) - 4x \cdot 2x e^{x^2} + (4x^2 - 2)e^{x^2} = 0$,

$y_2'' - 4xy_2' + (4x^2 - 2)y_2 = e^{x^2}(6x + 4x^3) - 4x e^{x^2}(1 + 2x^2) + (4x^2 - 2)x e^{x^2} = 0$.

从而 y_1, y_2 都是方程的解. 又 $\frac{y_2}{y_1} = x$ 不是常数,故原方程的通解为 $y = C_1 e^{x^2} + C_2 x e^{x^2}$.

4 验证:

(1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x}$ (C_1, C_2 为任意常数) 是方程 $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$ 的通解;

(2) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{32}(4x \cos x + \sin x)$ (C_1, C_2 为任意常数) 是方程 $y'' + 9y = x \cos x$

的通解；

(3)$y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$(C_1,C_2 为任意常数）是方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的通解；

(4)$y=C_1x^5+\dfrac{C_2}{x}-\dfrac{x^2}{9}\ln x$($C_1,C_2$ 为任意常数）是方程 $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$ 的通解；

(5)$y=\dfrac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})+\dfrac{1}{2}e^x$($C_1,C_2$ 为任意常数）是方程 $xy''+2y'-xy=e^x$ 的通解；

(6) $=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-x^2$ （C_1,C_2,C_3,C_4 是任意常数）是方程 $y^{(4)}-y=x^2$ 的通解.

【证】 (1)$y^*=\dfrac{1}{12}e^{5x},y^{*\prime}=\dfrac{5}{12}e^{5x},y^{*\prime\prime}=\dfrac{25}{12}e^{5x}$,

所以 $y^{*\prime\prime}-3y^{*\prime}+2y^*=\dfrac{25}{12}e^{5x}-3\cdot\dfrac{5}{12}e^{5x}+2\cdot\dfrac{1}{12}e^{5x}=e^{5x}$.

故 $y^*=\dfrac{1}{12}e^{5x}$ 为原方程的特解. 又设 $y_1=e^x,y_2=e^{2x},y_1'=e^x,y_1''=e^x;y_2'=2e^{2x},y_2''=4e^{2x}$,所以有

$y_1''-3y_1'+2y_1=e^x-3e^x+2e^x=0$, $y_2''-3y_2'+2y_2=4e^{2x}-3\cdot2e^{2x}+2e^{2x}=0$,

即 y_1,y_2 为原方程所对应的齐次线性方程的两个解. 且 $\dfrac{y_2}{y_1}=e^x$ 不是常数,y_1,y_2 线性无关. 所以 $Y=C_1y_1+C_2y_2$ 为对应的齐次线性方程的通解. 根据非齐次线性方程与其对应的齐次线性方程解的关系知,$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\dfrac{1}{12}e^{5x}$ 是原方程的通解.

(2) 设 $y^*=\dfrac{1}{32}(4x\cos x+\sin x),y^{*\prime}=\dfrac{1}{32}(5\cos x-4x\sin x),y^{*\prime\prime}=-\dfrac{1}{32}(9\sin x+4x\cos x)$,有

$$y^{*\prime\prime}+9y^*=-\frac{1}{32}(9\sin x+4x\cos x)+9\cdot\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)=x\cos x,$$

所以 y^* 为 $y''+9y=x\cos x$ 的一个特解.

又设 $y_1=\cos3x,y_2=\sin3x$,有 $y_1'=-3\sin3x,y_1''=-9\cos3x;y_2'=3\cos3x,y_2''=-9\sin3x$,所以有 $y_1''+9y_1=-9\cos3x+9\cos3x=0;y_2''+9y_2=-9\sin3x+9\sin3x=0$. 即 y_1,y_2 为齐次方程 $y''+9y=0$ 的两个解,且 y_1,y_2 线性无关,故 $Y=C_1y_1+C_2y_2$ 为 $y''+9y=0$ 的通解. 从而 $y=C_1\cos3x+C_2\sin3x+\dfrac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$ 是原方程的通解.

(3) 设 $y_1=x^2,y_2=x^2\ln x,y_1'=2x,y_1''=2;y_2'=2x\ln x+x,y_2''=2\ln x+3$,所以有：

$x^2y_1''-3xy_1'+4y_1=2x^2-3x\cdot2x+4x^2=0$,

$x^2y_2''-3xy_2'+4y_2=2x^2\ln x+3x^2-6x^2\ln x-3x^2+4x^2\ln x=0$,

即 y_1,y_2 是方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的两个解. 且 $\dfrac{y_2}{y_1}=\ln x$ 不是常数,所以 y_1,y_2 线性无关,故 $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$ 是原方程的通解.

(4) 设 $y^*=-\dfrac{x^2}{9}\ln x,y^{*\prime}=-\dfrac{2x}{9}\ln x-\dfrac{x}{9},y^{*\prime\prime}=-\dfrac{2}{9}\ln x-\dfrac{3}{9}$,有

$x^2y^{*\prime\prime}-3xy^{*\prime}-5y^*=-\dfrac{2}{9}x^2\ln x-\dfrac{3}{9}x^2+\dfrac{6x^2}{9}\ln x+\dfrac{3x^2}{9}+\dfrac{5}{9}x^2\ln x=x^2\ln x$,所以 y^* 是方

程 $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$ 的一个特解.

又设 $y_1=x^5, y_2=\dfrac{1}{x}, y_1'=5x^4, y_1''=20x^3, y_2'=-\dfrac{1}{x^2}, y_2''=\dfrac{2}{x^3}$. 有

$x^2y_1''-3xy_1'-5y_1=20x^5-15x^5-5x^5=0, x^2y_2''-3xy_2'-5y_2=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x}=0$,故 y_1,y_2 为方程 $x^2y''-3xy'-5y=0$ 的两个解. 且 y_1,y_2 线性无关,所以 $Y=C_1y_1+C_2y_2$ 为 $x^2y''-3xy'-5y=0$ 的通解,从而 $y=C_1x^5+C_2\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^2}{9}\ln x$ 是原方程的通解.

(5) 设 $y^*=\dfrac{e^x}{2}, y^{*\prime}=\dfrac{1}{2}e^x, y^{*\prime\prime}=\dfrac{1}{2}e^x$,

所以 $xy^{*\prime\prime}+2y^{*\prime}-xy^*=\dfrac{1}{2}e^x\cdot x+e^x-x\cdot\dfrac{e^x}{2}=e^x$.

故 $y^*=\dfrac{e^x}{2}$ 为 $xy''+2y'-xy=e^x$ 的一个特解.

又设 $y_1=\dfrac{1}{x}e^x, y_2=\dfrac{1}{x}e^{-x}$, 有 $y_1'=e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right), y_1''=e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right), y_2'=-e^{-x}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right), y_2''=e^{-x}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)$,

故 $xy_1''+2y_1'-xy_1=e^x\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)+2e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)-e^x=0$.

$$xy_2''+2y_2'-xy_2=e^{-x}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)-2e^{-x}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-e^{-x}=0.$$

所以 y_1,y_2 为齐次方程 $xy''+2y'-xy=0$ 的两个解,且 $\dfrac{y_1}{y_2}=e^{2x}$ 不是常数, y_1,y_2 线性无关. 所以 $Y=C_1y_1+C_2y_2$ 为 $xy''+2y'-xy=0$ 的通解. 从而知: $y=\dfrac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})+\dfrac{e^x}{2}$ 为 $xy''+2y'-xy=e^x$ 的通解.

(6) 令 $y_1=e^x, y_2=e^{-x}, y_3=\cos x, y_4=\sin x$,易见 $y_i^{(4)}=y_i, i=1,2,3,4$.
故 $y_i(i=1,2,3,4)$ 是原方程对应的齐次方程 $y^{(4)}-y=0$ 的解.

下面说明 $y_i(i=1,2,3,4)$ 在它们的定义域 $\mathbf{R}$ 中是线性无关的. 令

$$k_1e^x+k_2e^{-x}+k_3\cos x+k_4\sin x\equiv 0,$$

分别取 $x=0,\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2},\pi$,则有

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3+0=0,\\ e^{\frac{\pi}{2}}k_1+e^{-\frac{\pi}{2}}k_2+0+k_4=0,\\ e^{-\frac{\pi}{2}}k_1+e^{\frac{\pi}{2}}k_2+0-k_4=0,\\ e^{\pi}k_1+e^{-\pi}k_2-k_3+0=0.\end{cases}$$

根据线性代数的知识,经计算,上述齐次线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1&0\\ e^{\frac{\pi}{2}}&e^{-\frac{\pi}{2}}&0&1\\ e^{-\frac{\pi}{2}}&e^{\frac{\pi}{2}}&0&-1\\ e^{\pi}&e^{-\pi}&-1&0\end{vmatrix}\neq 0,$$

故齐次线性方程组仅有零解 $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0, k_4 = 0$.

这说明 y_1, y_2, y_3, y_4 是线性无关的.

又令 $y^* = -x^2$,则 $y^{*(4)} = 0$,且 $y^{*(4)} - y^* = 0 - (-x^2) = x^2$,故 y^* 是原方程的一个特解.

所以 $$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4 + y^* = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x + x^2$$

是原方程的通解.

5 已知 $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ 是齐次线性方程

$$(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$$

的一个解,求此方程的通解.

【解】 令 $y_2(x) = u(x)\cdot\mathrm{e}^x$, $y_2'(x) = \mathrm{e}^x[u(x) + u'(x)]$,$y_2''(x) = \mathrm{e}^x[u(x) + 2u'(x) + u''(x)]$,代入方程得

$$(2x-1)\mathrm{e}^x[u(x) + 2u'(x) + u''(x)] - (2x+1)\mathrm{e}^x[u(x) + u'(x)] + 2u(x)\mathrm{e}^x = 0,$$

即 $$(2x-1)u''(x) + (2x-3)u'(x) = 0.$$

令 $z = u'$,上式变为 $(2x-1)z' + (2x-3)z = 0$,分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}z}{z} = -\dfrac{2x-3}{2x-1}\mathrm{d}x$,积分得

$\ln z = -x + \ln(2x-1)$,所以 $z = \mathrm{e}^{-x}(2x-1)$.

故 $u(x) = \int(2x-1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\int(2x-1)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} = -(2x-1)\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x}$

所以 $y_2(x) = u(x)\mathrm{e}^x = -(2x+1)$.

故所求通解为 $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2(2x+1)$.

6 已知 $y_1(x) = x$ 是齐次线性方程 $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ 的一个解,求非齐次线性方程 $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$ 的通解.

【解】 设非齐次线性方程的通解为 $y = xu(x)$,则 $y' = u(x) + xu'(x)$,$y'' = xu''(x) + 2u'(x)$,代入原方程并整理得 $u''(x) = 2$.

所以 $u'(x) = 2x + C_2$,$u(x) = x^2 + C_2x + C_1$.

故原方程的通解为 $y = xu(x) = x^3 + C_2x^2 + C_1x$.

7 已知齐次线性方程 $y'' + y = 0$ 的通解为 $Y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$,求非齐次线性方程 $y'' + y = \sec x$ 的通解.

【解】 $y_1 = \cos x$,$y_2 = \sin x$,是 $y'' + y = 0$ 的两个线性无关解.

$$f(x) = \sec x, W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1.$$

且 $$\int\frac{y_1 f}{W}\mathrm{d}x = \int\cos x\sec x\mathrm{d}x = x, \quad \int\frac{y_2 f}{W}\mathrm{d}x = \int\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \ln\cos x.$$

故所求通解为 $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x\ln\cos x + x\sin x$.

8 已知齐次线性方程 $x^2y'' - xy' + y = 0$ 的通解为 $Y(x) = C_1x + C_2x\ln|x|$,求非齐次线性方程 $x^2y'' - xy' + y = x$ 的通解.

【解】 $y_1 = x$,$y_2 = x\ln|x|$ 是 $x^2y'' - xy' + y = 0$ 的两个线性无关解. 把非齐次方程变形为

$y''-\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=\frac{1}{x}$,有 $f(x)=\frac{1}{x}$,而 $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & x\ln|x| \\ 1 & 1+\ln|x| \end{vmatrix}=x$,且 $\int\frac{y_1 f}{W}\mathrm{d}x=$

$\int\frac{x\cdot\frac{1}{x}}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|$,$\int\frac{y_2 f}{W}\mathrm{d}x=\int\frac{x\ln|x|\cdot\frac{1}{x}}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2|x|$,

故所求通解为
$$\begin{aligned} y &= C_1x+C_2x\ln|x|-y_1\int\frac{y_2 f}{W}\mathrm{d}x+y_2\int\frac{y_1 f}{W}\mathrm{d}x \\ &= C_1x+C_2x\ln|x|-\frac{1}{2}x\ln^2|x|+x\ln^2|x| \\ &= C_1x+C_2x\ln|x|+\frac{1}{2}x\ln^2|x|. \end{aligned}$$

习题7－7 常系数齐次线性微分方程

1 求下列微分方程的通解:

(1) $y''+y'-2y=0$;

(2) $y''-4y'=0$;

(3) $y''+y=0$;

(4) $y''+6y'+13y=0$;

(5) $4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-20\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+25x=0$;

(6) $y''-4y'+5y=0$;

(7) $y^{(4)}-y=0$;

(8) $y^{(4)}+2y''+y=0$;

(9) $y^{(4)}-2y'''+y''=0$;

(10) $y^{(4)}+5y''-36y=0$.

【解】 (1) 特征方程为 $r^2+r-2=0$,解得 $r_1=1$,$r_2=-2$,故原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

(2) 特征方程为 $r^2-4r=0$,解得 $r_1=0$,$r_2=4$,故原方程的通解为 $y=C_1+C_2e^{4x}$.

(3) 特征方程为 $r^2+1=0$,解得 $r_{1,2}=\pm i$,故原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

(4) 特征方程为 $r^2+6r+13=0$,解得 $r_{1,2}=-3\pm 2i$,故原方程的通解为 $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

(5) 特征方程为 $4r^2-20r+25=0$,解得 $r_1=r_2=\frac{5}{2}$,故原方程的通解为 $x=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}$.

(6) 特征方程为 $r^2-4r+5=0$,解得 $r_{1,2}=2\pm i$,故原方程的通解为 $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

(7) 特征方程为 $r^4-1=0 \Rightarrow r_1=-1,r_2=1,r_{3,4}=\pm i$.故原方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3\cos x+C_4\sin x$.

(8) 特征方程为 $r^4+2r^2+1=0$,即 $(r^2+1)^2=0 \Rightarrow r_1=r_2=i,r_3=r_4=-i$.通解为 $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$.

(9) 特征方程为 $r^4-2r^3+r^2=0 \Rightarrow r_1=r_2=0,r_3=r_4=1$ 通解为 $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x$.

(10) 特征方程为 $r^4+5r^2-36=0$,解之得 $r^2=4$,或 $r^2=-9$,于是 $r_1=-2$,$r_2=2$,$r_3=3i$,$r_4=-3i$.通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$.

2 求下列微分方程满足所给初值条件的特解：

(1) $y''-4y'+3y=0,\quad y\big|_{x=0}=6,\quad y'\big|_{x=0}=10$;

(2) $4y''+4y'+y=0,\quad y\big|_{x=0}=2,\quad y'\big|_{x=0}=0$;

(3) $y''-3y'-4y=0,\quad y\big|_{x=0}=0,\quad y'\big|_{x=0}=-5$;

(4) $y''+4y'+29y=0,\quad y\big|_{x=0}=0,\quad y'\big|_{x=0}=15$;

(5) $y''+25y=0,\quad y\big|_{x=0}=2,\quad y'\big|_{x=0}=5$;

(6) $y''-4y'+13y=0,\quad y\big|_{x=0}=0,\quad y'\big|_{x=0}=3$.

【解】 (1) 特征方程 $r^2-4r+3=0 \Rightarrow r_1=1,r_2=3$. $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$, $y'=C_1e^x+3C_2e^{3x}$. 由初始条件得：$C_1+C_2=6$, $C_1+3C_2=10$. 解得 $C_1=4$, $C_2=2$. 故所求特解为 $y=4e^x+2e^{3x}$.

(2) 特征方程为 $4r^2+4r+1=0 \Rightarrow r_1=r_2=-\frac{1}{2}$. $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{1}{2}x}$, $y'=\left(C_2-\frac{1}{2}C_1-\frac{x}{2}C_2\right)e^{-\frac{x}{2}}$, 由初始条件得：$C_1=2$, $C_2-\frac{1}{2}C_1=0$. 解得 $C_1=2$, $C_2=1$. 故所求特解为 $y=(2+x)e^{-\frac{1}{2}x}$.

(3) 特征方程为 $r^2-3r-4=0 \Rightarrow r_1=-1,r_2=4$. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$, $y'=-C_1e^{-x}+4C_2e^{4x}$. 由 $x=0,y=0,y'=-5$, 知 $C_1+C_2=0$, $-C_1+4C_2=-5$. 解得 $C_1=1$, $C_2=-1$. 故所求特解为 $y=e^{-x}-e^{4x}$.

(4) 特征方程为 $r^2+4r+29=0$, 解得 $r_{1,2}=-2\pm5i$.
所以 $y=e^{-2x}(C_1\cos5x+C_2\sin5x)$, $y'=e^{-2x}[(5C_2-2C_1)\cos5x+(-5C_1-2C_2)\sin5x]$. 由 $x=0$, $y=0$, $y'=15$ 知 $C_1=0$, $5C_2-2C_1=15$. 解得 $C_1=0$, $C_2=3$. 故所求的特解为 $y=3e^{-2x}\sin5x$.

(5) 特征方程为 $r^2+25=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm5i$. $y=C_1\cos5x+C_2\sin5x$, $y'=-5C_1\sin5x+5C_2\cos5x$. 由 $x=0,y=2,y'=5$ 知 $C_1=2$, $5C_2=5$ 解得 $C_1=2$, $C_2=1$. 故所求特解为 $y=2\cos5x+\sin5x$.

(6) 特征方程为 $r^2-4r+13=0 \Rightarrow r_{1,2}=2\pm3i$.
所以 $y=e^{2x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x)$, $y'=e^{2x}[(2C_1+3C_2)\cos3x+(2C_2-3C_1)\sin3x]$. 由 $x=0$, $y=0$, $y'=3$ 知 $C_1=0$, $2C_1+3C_2=3$ 解得 $C_1=0$, $C_2=1$. 故所求的特解为 $y=e^{2x}\sin3x$.

3 一个单位质量的质点在数轴上运动，开始时质点在原点 O 处且速度为 v_0，在运动过程中，它受到一个力的作用，这个力的大小与质点到原点的距离成正比（比例系数 $k_1>0$），而方向与初速度一致．又介质的阻力与速度成正比（比例系数 $k_2>0$），求反映这质点的运动规律的函数．

【解】 设数轴为 x 轴，由题意知 $x''=k_1x-k_2x'$ 且 $x\big|_{t=0}=0,\quad x'\big|_{t=0}=v_0$.

此方程的特征方程为 $r^2+k_2r-k_1=0$，解之得 $r_{1,2}=\dfrac{-k_2\pm\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}$.

故有 $x=C_1e^{\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}+C_2e^{\frac{-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}$,

$$x' = \frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2} C_1 e^{\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t} + \frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2} \cdot C_2 e^{\frac{-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t}.$$

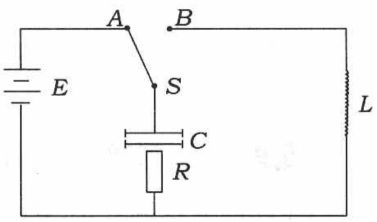
由初始条件当 $t = 0$ 时，$x = 0, x' = v_0$ 知

$$C_1 + C_2 = 0, \frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2} C_1 + \frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2} C_2 = v_0.$$

所以 $C_1 = \dfrac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}, C_2 = \dfrac{-v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}$,

故 $x = \dfrac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}} \left(e^{\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t} - e^{\frac{-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t} \right)$.

4 在如图所示的电路中先将开关 K 拨向 A，达到稳定状态后再将开关 K 拨向 B，求电压 $u_c(t)$ 及电流 $i(t)$. 已知 $E = 20$ 伏，$C = 0.5 \times 10^{-6}$F(法)，$L = 0.1$ 享，$R = 2000$ 欧.



第 4 题图

【解】 由回路电压定律知 $L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{q}{C} + Ri = E$. 又 $q = Cu_c, i = \dfrac{dq}{dt} = Cu_c', \dfrac{di}{dt} = Cu_c''$, 所以 $LCu_c'' + u_c + RCu_c' = 0$,

即 $u_c'' + \dfrac{R}{L}u_c' + \dfrac{1}{L_c}u_c = 0$. $\dfrac{R}{L} = \dfrac{2000}{0.1} = 2 \times 10^4$, $\dfrac{1}{LC} = \dfrac{1}{0.1 \times 0.5 \times 10^{-6}} = \dfrac{1}{5} \times 10^8$.

所以 $u_c'' + 2 \times 10^4 u_c' + \dfrac{1}{5} \times 10^8 u_c = 0$.

特征方程为 $r^2 + 2 \times 10^4 r + \dfrac{1}{5} \times 10^8 = 0$，解得 $r_1 = -1.9 \times 10^4, r_2 = -10^3$.

所以 $u_c = C_1 e^{-1.9 \times 10^4 t} + C_2 e^{-10^3 t}$, $u_c' = -1.9 \times 10^4 C_1 e^{-1.9 \times 10^4 t} - 10^3 C_2 e^{-10^3 t}$.

当 $t = 0$ 时，$u_c = E = 20, u_c' = 0$，从而知

$$C_1 + C_2 = 20, \quad -1.9 \times 10^4 C_1 - 10^3 C_2 = 0.$$

解得 $C_1 = -\dfrac{10}{9}, C_2 = \dfrac{190}{9}$. 从而得出

$$u_c = \frac{10}{9}(19e^{-10^3 t} - e^{-1.9 \times 10^4 t})(\text{伏}), \quad i = \frac{19}{18} \times 10^{-2}(e^{-1.9 \times 10^4 t} - e^{-10^3 t})(\text{安}).$$

5 设底面直径为 0.5m 的圆柱形浮筒铅直放在水中，当稍向下压后突然放开，浮筒在水中上下振动的周期为 2s，求浮筒的质量.

【解】 设 x 轴的正向铅直向下，原点在水面处. 平衡状态下浮筒上一点 A 在水平面处，又设在时刻 t，点 A 的位置为 $x = x(t)$，此时它受到的恢复力的大小为 $1000g\pi R^2 |x|$（R 是浮筒的半径），恢复力的方向与位移方向相反，故有

$$mx'' = -1000g\pi R^2 x,$$

其中 m 是浮筒的质量.

记 $\omega^2 = \dfrac{1000g\pi R^2}{m}$，则得微分方程

$$x'' = \omega^2 x = 0.$$

解特征方程 $r^2+\omega^2=0$,得 $r_{1,2}=\pm\omega i$,故

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t=A\sin(\omega t+\varphi),$$

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\sin\varphi=\frac{C_1}{A}.$$

由于振动周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2$,故 $\omega=\pi$,即

$$\frac{1000g\pi R^2}{m}=\pi^2,$$

从中解出 $$m=\frac{1000gR^2}{\pi}\approx 195(\mathrm{kg}).$$

习题7－8　常系数非齐次线性微分方程

1 求下列微分方程的通解:

(1) $2y''+y'-y=2e^x$;　　(2) $y''+a^2y=e^x$;

(3) $2y''+5y'=5x^2-2x-1$;　　(4) $y''+3y'+2y=3xe^{-x}$;

(5) $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$;　　(6) $y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$;

(7) $y''+5y'+4y=3-2x$;　　(8) $y''+4y=x\cos x$;

(9) $y''+y=e^x+\cos x$;　　(10) $y''-y=\sin^2 x$.

【解】 (1) $2r^2+r-1=0 \Rightarrow r_1=-1,r_2=\dfrac{1}{2}$,求得相应齐次方程的通解为

$$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}.$$

右端是 $P_0(x)e^{1\cdot x}$ 形状,且1不是特征根,因此令特解 $y^*=Ae^x$,将它代入原方程得 $2Ae^x+Ae^x-Ae^x=2e^x$. 所以 $A=1,y^*=e^x$.

故原方程的通解为 $y=e^x+C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}$.

(2) $r^2+a^2=0 \Rightarrow r=\pm ai,\bar{y}=C_1\cos ax+C_2\sin ax$.

令 $y^*=Ae^x$ 代入原方程,得 $Ae^x+a^2Ae^x=e^x$,所以 $A=\dfrac{1}{1+a^2}$. $y^*=\dfrac{1}{1+a^2}e^x$. 故原方程的通解为 $y=\dfrac{1}{1+a^2}e^x+C_1\cos ax+C_2\sin ax$.

(3) $2r^2+5r=0 \Rightarrow r_1=0,r_2=-\dfrac{5}{2},\bar{y}=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}$. 因为0是特征方程的单根,故令 $y^*=x(ax^2+bx+c)$. 代入原方程得

$$2(6ax+2b)+5(3ax^2+2bx+c)=5x^2-2x-1.$$

比较等式两边系数得 $a=\dfrac{1}{3},b=-\dfrac{3}{5},c=\dfrac{7}{25}$,所以 $y^*=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{5}x^2+\dfrac{7}{25}x$. 故所求通解为

$$y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x\right).$$

(4) $r^2+3r+2=0 \Rightarrow r_1=-1,r_2=-2.\ \bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$. 因为 -1 是特征方程的单根,故令 $y^*=x(Ax+B)e^{-x}$. 代入原方程并整理得 $(2Ax+B+2A)e^{-x}=3xe^{-x}$,

所以 $A=\frac{3}{2}, B=-3$. $y^*=\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right)e^{-x}$. 故所求通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right)e^{-x}.$$

(5) $r^2-2r+5=0 \Rightarrow r=1\pm 2i$，所以 $\bar{y}=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. 由于 $1\pm 2i$ 是方程的根，故令 $y^*=xe^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$. 代入原方程并整理，化简得

$$4B\cos 2x-4A\sin 2x=\sin 2x. \text{所以} \quad A=-\frac{1}{4}, B=0.$$

$y^*=-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x$，故所求通解为 $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x$.

(6) $r^2-6r+9=0 \Rightarrow r_1=r_2=3$. $\bar{y}=(C_1+C_2x)e^{3x}$. 由于 3 是特征方程的重根，令 $y^*=x^2e^{3x}(Ax+B)$. 代入原方程，并整理、化简得 $6Ax+2B=x+1$，

所以 $A=\frac{1}{6}, B=\frac{1}{2}$. $y^*=\frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{3}x+1\right)e^{3x}$，故所求通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{3}x+1\right)e^{3x}.$$

(7) $r^2+5r+4=0 \Rightarrow r_1=-1, r_2=-4$, $\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}$. 令 $y^*=Ax+B$ 代入原方程，并整理得 $4Ax+(5A+4B)=3-2x$，则 $A=-\frac{1}{2}, B=\frac{11}{8}$, $y^*=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}$.

故所求通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}+\left(\frac{11}{8}-\frac{1}{2}x\right)$.

(8) $r^2+4=0 \Rightarrow r=\pm 2i$, $\bar{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.
令 $y^*=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$，代入原方程，并整理得 $(2C+3B+3Ax)\cos x+(-2A+3D+3cx)\sin x=x\cos x$. 则 $A=\frac{1}{3}, B=0, C=0, D=\frac{2}{9}$, $y^*=\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$. 故所求通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\left(\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x\right).$$

(9) $r^2+1=0 \Rightarrow r=\pm i$, $\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

考虑方程 $y''+y=e^x$，观察知其有特解 $y_1^*=\frac{1}{2}e^x$.

再考虑方程 $y''+y=\cos x$，因为 $\pm i$ 是特征方程的根. 令 $y_2^*=x(A\cos x+B\sin x)$，代入方程 $y''+y=\cos x$，整理得 $2B\cos x-2A\sin x=\cos x$，则 $A=0, B=\frac{1}{2}$. 故 $y_2^*=\frac{1}{2}\sin x$，从而原方程有特解 $y^*=y_1^*+y_2^*=\frac{1}{2}(e^x+\sin x)$，故所求方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}(e^x+\sin x)$.

(10) $r^2=1 \Rightarrow r=\pm 1$, $\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}$. 又原方程可变为

$$y''-y=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x.$$

考虑 $y''-y=\frac{1}{2}$，经观察得特解 $y_1^*=-\frac{1}{2}$.

再考虑 $y''-y=-\frac{1}{2}\cos 2x$，由于 $\pm 2i$ 不是特征方程的根. 令 $y_2^*=A\cos 2x+B\sin 2x$，代入方程

并化简得

$$-5A\cos2x-5B\sin2x=-\frac{1}{2}\cos2x,\text{则}\quad A=\frac{1}{10},B=0.$$

$y_2^*=\frac{1}{10}\cos2x,y^*=y_1^*+y_2^*=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos2x$,故所求通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{10}\cos2x-\frac{1}{2}.$$

2 求下列各微分方程满足已给初值条件的特解:

(1) $y''+y+\sin2x=0,\quad y\big|_{x=\pi}=1,\quad y'\big|_{x=\pi}=1$;

(2) $y''-3y'+2y=5,\quad y\big|_{x=0}=1,\quad y'\big|_{x=0}=2$;

(3) $y''-10y'+9y=e^{2x},\quad y\big|_{x=0}=\frac{6}{7},\quad y'\big|_{x=0}=\frac{33}{7}$;

(4) $y''-y=4xe^x,\quad y\big|_{x=0}=0,\quad y'\big|_{x=0}=1$;

(5) $y''-4y'=5,\quad y\big|_{x=0}=1,\quad y'\big|_{x=0}=0$.

【解】 (1) 特征方程 $r^2+1=0\ \Rightarrow\ r=\pm i,\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$. 令 $y^*=A\sin2x+B\cos2x$,代入原方程并整理得 $-3B\cos2x-3A\sin2x=-\sin2x\ \Rightarrow\ B=0,A=\frac{1}{3}$.

故得通解为 $\quad y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{3}\sin2x$.

将初始条件代入得 $\begin{cases}-C_1=1,\\ -C_2+\frac{2}{3}=1,\end{cases}$ 所以 $\quad C_1=-1,C_2=-\frac{1}{3}$.

故所求特解为 $\quad y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin2x$.

(2) $r^2-3r+2=0\ \Rightarrow\ r_1=1,r_2=2,\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$,由观察得特解 $y^*=\frac{5}{2}$,故通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{5}{2}$. 代入初始条件,解出 $C_1=-5,C_2=\frac{7}{2}$,故 $y=-5e^x+\frac{7}{2}e^{2x}+\frac{5}{2}$ 为所求.

(3) $r^2-10r+9=0\ \Rightarrow\ r_1=1,r_2=9,\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{9x}$. 令 $y^*=Ae^{2x}$,代入原方程求得 $A=-\frac{1}{7}$. 从而得通解为 $y=-\frac{1}{7}e^{2x}+C_1e^x+C_2e^{9x}$. 再代入初始条件求得 $C_1=\frac{1}{2},C_2=\frac{1}{2}$,故所求特解为 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{9x})-\frac{1}{7}e^{2x}$.

(4) $r^2-1=0\ \Rightarrow\ r=\pm1,\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}$,由于 1 是特征方程的单根,故令 $y^*=x(Ax+B)e^x$,代入原方程,并整理简化得:$4Ax+2A+2B=4x$,所以 $\quad A=1,B=-1$. $y^*=(x^2-x)e^x$,从而通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+(x^2-x)e^x$,代入初始条件,求得 $C_1=-1,C_2=1$,故所求特解为

$$y=e^x-e^{-x}+(x^2-x)e^x.$$

(5) $r^2-4r=0\ \Rightarrow\ r_1=0,r_2=4,\bar{y}=C_1+C_2e^{4x}$,

因 0 是特征方程的单根,故令 $y^*=Ax+B$,代入原方程,解得 $A=-\frac{5}{4},B=0,y^*=-\frac{5}{4}x$.

从而得通解为 $y = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{5}{4}x$. 再将初始条件代入,可求得 $C_1 = \frac{11}{6}, C_2 = \frac{5}{16}$,故所求通解为 $y = \frac{11}{16} + \frac{5}{16}e^{4x} - \frac{5}{4}x$.

3 大炮以仰角 α、初速度 v_0 发射炮弹,若不计空气阻力,求弹道曲线.

【解】 取炮口为原点,炮弹前进的水平方向为 x 轴,铅直方向为 y 轴,并设 t 时刻,炮弹的位置在点(x,y) 处. 由牛顿第二定律及题意得

$$\begin{cases} 0 = m\dfrac{d^2x}{dt^2}, \\ x\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{dx}{dt}\bigg|_{t=0} = v_0\cos\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 - mg = m\dfrac{d^2y}{dt^2}, \\ y\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{dy}{dt}\bigg|_{t=0} = v_0\sin\alpha. \end{cases}$$

解上述二阶常系数线性微分方程得

$$x = (v_0\cos\alpha)t, \quad y = (v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

从而弹道曲线为 $\begin{cases} x = (v_0\cos\alpha)t, \\ y = (v_0\sin\alpha)t - \dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$

4 在 RLC 含源串联电路中,电动势为 E 的电源对电容器 C 充电. 已知 $E = 20$ 伏,$C = 0.2$ 微法,$L = 0.1$ 亨,$R = 1000$ 欧,试求合上开关 S 后的电流 $i(t)$ 及电压 $u_c(t)$.

【解】 由回路电压定律可知

$$LCu_C'' + RCu_C' + u_c = E,\text{即} \quad u_C'' + \frac{R}{L}u_C' + \frac{1}{LC}u_c = \frac{E}{LC}.$$

初始条件为 $u_c\big|_{t=0} = 0, \quad u_C'\big|_{t=0} = 0$.

将 $R = 1000, L = 0.1, C = 0.2 \times 10^{-6}$ 代入,得

$$u_C'' + 10^4 u_C' + 5 \times 10^7 u_c = 10^9. \qquad ①$$

其特征方程为 $r^2 + 10^4 r + 5 \times 10^7 = 0$,所以 $r_{1,2} = -5 \times 10^3 \pm 5 \times 10^3 i$,

所以 ① 对应的齐次方程的通解为

$$u_c = e^{-5\times10^3 t}[C_1\cos(5 \times 10^3 t) + C_2\sin(5 \times 10^3 t)].$$

又 $f(t) = 10^9$,则设 $u_c^* = A$,代入 ① 得 $A = 20$,即 $u_c^* = 20$. 从而 ① 的通解为

$$u_c = e^{-5\times10^3 t}[C_1\cos(5 \times 10^3 t) + C_2\sin(5 \times 10^3 t)] + 20. \qquad ②$$

$$u_C' = -5 \times 10^3 e^{-5\times10^3 t}[C_1\cos(5 \times 10^3 t) + C_2\sin(5 \times 10^3 t)] + e^{-5\times10^3 t} \cdot [-5 \times 10^3 C_1\sin(5 \times 10^3 t) + 5 \times 10^3 C_2\cos(5 \times 10^3 t)]. \qquad ③$$

将初始条件代入 ②,③,得

$20 + C_1 = 0, -5 \times 10^3 C_1 + 5 \times 10^3 C_2 = 0$,所以 $C_1 = C_2 = -20$.

故 $u_c(t) = 20 - 20e^{-5\times10^3 t}[\cos(5 \times 10^3 t) + \sin(5 \times 10^3 t)]$(伏),

$i_c(t) = Cu_C' = 4 \times 10^{-2} e^{-5\times10^3 t}\sin(5 \times 10^3 t)$(安).

5 一链条悬挂在钉子上,起动时一端离开钉子 8m,另一端离开钉子 12m,分别在以下两种情况下求链条滑下来所需的时间:

(1) 若不计钉子对链条所产生的摩擦力；

(2) 若摩擦力的大小等于 1m 长的键条所受重力的大小.

【解】 (1) 设在时刻 t 时,链条上较长的一段垂下 $s = s(t)$ m,且设链条的线密度为 ρ,则向下拉链条下滑的作用力 $F = s\rho g - (20 - s)\rho g = 2\rho g(s - 10)$.

又 $F = ma$,即 $20\rho s'' = 2\rho g(s - 10)$,

即
$$s'' - \frac{g}{10}s = -g. \qquad ①$$

初始条件为 $s\big|_{t=0} = 12$, $s'\big|_{t=0} = 0$.

解 ① 所对应的齐次方程 $s'' - \frac{g}{10}s = 0$. ②

由特征方程 $r^2 - \frac{g}{10} = 0$,得 $r_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{10}}$,则 ② 的通解为

$$s = C_1\exp\left(-\sqrt{\frac{g}{10}}t\right) + C_2\exp\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right).$$

又 ① 的右边 $f(t) = -g$,故令 $s^* = A$,代入 ① 得 $A = 10$,即 $s^* = 10$. 从而 ① 的通解为

$$s = C_1\exp\left(-\sqrt{\frac{g}{10}}t\right) + C_2\exp\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right) + 10,$$

$$s' = -\sqrt{\frac{g}{10}}C_1\exp\left(-\sqrt{\frac{g}{10}}t\right) + \sqrt{\frac{g}{10}}C_2\exp\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right).$$

将 $s(0) = 12, s'(0) = 0$ 代入以上两式,得

$C_1 + C_2 = 2$, $-C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 1$,

故 $s = \exp\left(-\sqrt{\frac{g}{10}}t\right) + \exp\left(+\sqrt{\frac{g}{10}}t\right) + 10$,即 $\operatorname{ch}\sqrt{\frac{g}{10}}t = \frac{s}{2} - 5$.

$$t = \sqrt{\frac{10}{g}}\operatorname{arch}\left(\frac{s}{2} - 5\right) = \sqrt{\frac{10}{g}}\ln\left[\frac{s}{2} - 5 + \sqrt{\left(\frac{s}{2} - 5\right)^2 - 1}\right].$$

当 $s = 20$ 时,求得链条完全滑下来所需时间为

$$t = \sqrt{\frac{10}{g}}\ln(5 + 2\sqrt{6})\text{(秒)}.$$

(2) $F = s\rho g - (20 - s)\rho g - 1\cdot\rho g$, $s'' - \frac{g}{10}s = -1.05g$. ③

解法同(1),得 ③ 的通解为

$$s = C_3\exp\left(-\sqrt{\frac{g}{10}}t\right) + C_4\exp\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right) + 10.5.$$

且可得 $C_3 = C_4 = \frac{3}{4}$,故 $s = \frac{3}{4}\exp\left(-\sqrt{\frac{g}{10}}t\right) + \frac{3}{4}\exp\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right) + 10.5$,即 $\operatorname{ch}\sqrt{\frac{g}{10}}t = \frac{2}{3}s - 7$.

$$t = \sqrt{\frac{10}{g}}\operatorname{arch}\left(\frac{2}{3}s - 7\right) = \sqrt{\frac{10}{g}}\ln\left[\frac{2}{3}s - 7 + \sqrt{\left(\frac{2}{3}s - 7\right)^2 - 1}\right].$$

当 $s = 20$ 时,所求时间为 $t = \sqrt{\frac{10}{g}}\ln\left(\frac{19}{3} + \frac{4\sqrt{22}}{3}\right)$(秒).

6 设函数 $\varphi(x)$ 连续,且满足

$$\varphi(x)=e^x+\int_0^x t\varphi(t)\,dt-x\int_0^x\varphi(t)\,dt, \tag{①}$$

求 $\varphi(x)$.

【解】 $$\varphi'(x)=e^x+x\varphi(x)-\int_0^x\varphi(t)\,dt-x\varphi(x)=e^x-\int_0^x\varphi(t)\,dt. \tag{②}$$

$$\varphi''(x)=e^x-\varphi(x),\text{即 }\varphi''(x)+\varphi(x)=e^x. \tag{③}$$

特征方程 $r^2+1=0 \Rightarrow r=\pm i,\overline{\varphi}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$. 由于 1 不是特征方程的根,故令 $\varphi^*(x)=Ae^x$. 代入方程 ③ 解得 $A=\dfrac{1}{2}$. 从而 ③ 的通解为

$$\varphi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x.$$

又由 ①、② 知,$\varphi(0)=1,\varphi'(0)=1$,从而得 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$. 故所求 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$.

习题 7-9 欧拉方程

求下列欧拉方程的通解:

(1) $x^2y''+xy'-y=0$;

(2) $y''-\dfrac{y'}{x}+\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{2}{x}$;

(3) $x^3y'''+3x^2y''-2xy'+2y=0$;

(4) $x^2y''-2xy'+2y=\ln^2x-2\ln x$;

(5) $x^2y''+xy'-4y=x^3$;

(6) $x^2y''-xy'+4y=x\sin(\ln x)$;

(7) $x^2y''-3xy'+4y=x+x^2\ln x$;

(8) $x^3y'''+2xy'-2y=x^2\ln x+3x$.

【解】 (1) 作变换 $x=e^t$,即 $t=\ln x$,原方程变为:$D(D-1)y+Dy-y=0$,即$\dfrac{d^2y}{dt^2}-y=0$.

特征方程为 $r^2-1=0 \Rightarrow r_1=-1,r_2=1$,故 $y=C_1e^{-t}+C_2e^t=C_1\dfrac{1}{x}+C_2x$.

(2) 原方程可变为 $x^2y''-xy'+y=2x$,令 $x=e^t$,则 $t=\ln x$. 故 $D(D-1)y-Dy+y=2e^t$,即$\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=2e^t$. 特征方程为 $r^2-2r+1=0 \Rightarrow r_1=r_2=1$. 齐次方程的通解为 $\overline{y}=(C_1+C_2t)e^t$. 设 $y^*=At^2e^t$ 为方程$\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=2e^t$ 的特解,代入后得 $A=1$,故 $y=(C_1+C_2t)e^t+t^2e^t=(C_1+C_2\ln|x|)x+x\ln^2|x|$.

(3) 令 $x=e^t$,得 $D(D-1)(D-2)y+3D(D-1)y-2Dy+2y=0$,$\dfrac{d^3y}{dt^3}-3\dfrac{dy}{dt}+2y=0$.

特征方程为 $r^3-3r+2=0 \Rightarrow r_1=1,r_2=1,r_3=-2$. 所以 $y=(C_1+C_2t)e^t+C_3e^{-2t}=(C_1+C_2\ln|x|)x+C_3\cdot\dfrac{1}{x^2}$.

(4) 令 $x=e^t$. 得 $D(D-1)y-2Dy+2y=t^2-2t$,即

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=t^2-2t. \tag{①}$$

特征方程为 $r^2-3r+2=0 \quad \Rightarrow \quad r_1=1, r_2=2$. ① 所对应的齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{2t}$.
又设 $y^*=At^2+Bt+C$ 为 ① 的特解. 代入 ① 后化简得

$2At^2+(2B-6A)t+2A-3B+2C=t^2-2t$.

所以 $\quad A=\dfrac{1}{2}, B=\dfrac{1}{2}, C=\dfrac{1}{4}, y^*=\dfrac{1}{2}(t^2+t)+\dfrac{1}{4}$.

故 $y=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{2t}+\dfrac{1}{2}(t^2+t)+\dfrac{1}{4}=C_1x+C_2x^2+\dfrac{1}{2}(\ln|x|+\ln^2|x|)+\dfrac{1}{4}$.

(5) 设 $x=\mathrm{e}^t$,则原方程变为

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y+\mathrm{D}y-4y=\mathrm{e}^{3t}, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-4y=\mathrm{e}^{3t}. \qquad ①$$

特征方程为 $r^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad r_1=-2, r_2=2$. 故 ① 所对应的齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2\mathrm{e}^{2t}$.
又设 $y^*=A\mathrm{e}^{3t}$ 为 ① 的特解,代入 ① 化简得 $9A-4A=1$,所以 $\quad A=\dfrac{1}{5}$. $y^*=\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{3t}$.

故 $y=C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2\mathrm{e}^{2t}+\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{3t}=C_1x^{-2}+C_2x^2+\dfrac{1}{5}x^3$.

(6) 令 $x=\mathrm{e}^t$,有 $\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y-\mathrm{D}y+4y=\mathrm{e}^t\sin t$,即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+4y=\mathrm{e}^t\sin t \qquad ①$$

特征方程 $r^2-2r+4=0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2}=1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$. 故 ① 所对应的齐次方程的通解为 $\bar{y}=\mathrm{e}^t(C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t)$. 又设 $y^*=\mathrm{e}^t(A\cos t+B\sin t)$ 为 ① 的特解,代入 ① 后化简得 $A=0, B=\dfrac{1}{2}$,则

$y^*=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t\sin t$. 故

$$\begin{aligned}
y&=\mathrm{e}^t(C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^t\sin t\\
&=x[C_1\cos(\sqrt{3}\ln x)+C_2\sin(\sqrt{3}\ln x)]+\frac{1}{2}x\sin(\ln x).
\end{aligned}$$

(7) 令 $x=\mathrm{e}^t$,则 $t=\ln x$,原方程变为 $\quad y''_t-4y'_t+4y=\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^{2t}$. ①
特征方程为 $r^2-4r+4=0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2}=2$. 方程 ① 对应的齐次方程的通解为 $\bar{y}=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{2t}$.

又设 $y^*=A\mathrm{e}^t+Bt^3\mathrm{e}^{2t}$ 为 ① 的特解,代入 ① 并求得 $A=1, B=\dfrac{1}{6}$,

所以 $\quad y^*=\mathrm{e}^t+\dfrac{1}{6}t^3\mathrm{e}^{2t}$. 故

$$y=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t+\frac{1}{6}t^3\mathrm{e}^{2t}=(C_1+C_2\ln x)x^2+x+\frac{1}{6}x^2\ln^3x.$$

(8) 令 $x=\mathrm{e}^t$,则 $t=\ln x$,原方程变为

$$y'''_t-3y''_t+4y'_t-2y=t\mathrm{e}^{2t}+3\mathrm{e}^t \qquad ①$$

特征方程为 $r^3-3r^2+4r-2=0 \quad \Rightarrow \quad r_1=1, r_{2,3}=1\pm\mathrm{i}$. 故 ① 所对应的齐次方程的通解为

$\bar{y}=C_1\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^t(C_2\cos t+C_3\sin t)$.

设 $y_1^*=(At+B)\mathrm{e}^{2t}$ 为方程 $y'''_t-3y''_t+4y'_t-2y=t\mathrm{e}^{2t}$ 的一个特解. 代入方程解得 $A=\dfrac{1}{2}$,

$B=-1$,所以 $\quad y_1^*=\left(\frac{1}{2}t-1\right)e^{2t}$.

设 $y_2^*=cte^t$ 为 $y'''_t-3y''_t+4y'_t-2y=3e^t$ 的一个特解,代入方程解得 $c=3$,所以 $\quad y_2^*=3te^t$. 故

$$\begin{aligned}y&=C_1e^t+e^t(C_2\cos t+C_3\sin t)+\left(\frac{1}{2}t-1\right)e^{2t}+3te^t\\&=C_1x+x[C_2\cos(\ln x)+C_3\sin(\ln x)]+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)x^2+3x\ln x.\end{aligned}$$

习题 7-10 常系数线性微分方程组解法举例

1 求下列微分方程组的通解:

(1) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z,\\\dfrac{dz}{dx}=y;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=y,\\\dfrac{d^2y}{dt^2}=x;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=-x+y+3,\\\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=x+y-3;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+5x+y=e^t,\\\dfrac{dy}{dt}-x-3y=e^{2t};\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+2x+\dfrac{dy}{dt}+y=t,\\5x+\dfrac{dy}{dt}+3y=t^2;\end{cases}$ (6) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-3x+2\dfrac{dy}{dt}+4y=2\sin t,\\2\dfrac{dx}{dt}+2x+\dfrac{dy}{dt}-y=\cos t.\end{cases}$

【解】 (1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dz}{dx}=y \Rightarrow y''-y=0 \Rightarrow r^2-1=0 \Rightarrow r=\pm1 \Rightarrow y=C_1e^{-x}+C_2e^x \Rightarrow z=y'=C_1e^{-x}+C_2e^x$.

故所求解为 $\begin{cases}y=C_1e^{-x}+C_2e^x,\\z=-C_1e^{-x}+C_2e^x.\end{cases}$

(2) $\dfrac{d^4x}{dt^4}=\dfrac{d^2y}{dt^2}=x \Rightarrow x^{(4)}-x=0 \Rightarrow r^4-1=0 \Rightarrow r_1=1,r_2=-1,r_3=i,r_4=-i \Rightarrow x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t \Rightarrow \dfrac{dx}{dt}=C_1e^t-C_2e^{-t}-C_3\sin t+C_4\cos t$.

$$y=\frac{d^2x}{dt^2}=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t.$$

故所求通解为 $\begin{cases}x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t,\\y=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t.\end{cases}$

(3) 将原方程组两个方程分别相加减得

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\\dfrac{dy}{dt}=-x+3\end{cases} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}=-x+3 \Rightarrow x''+x=3. \quad ①$$

相应齐次方程为 $x''+x=0 \Rightarrow r^2+1=0, r=\pm \mathrm{i} \Rightarrow \bar{x}=C_1\cos t+C_2\sin t$. 经观察 $x^*=3$ 为①的特解，故 $\begin{cases} x=C_1\cos t+C_2\sin t+3, \\ y=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=C_2\cos t-C_1\sin t \end{cases}$ 为所求.

(4) 对第一个方程两边关于 t 求导得

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^t &= x_t''+5x_t'+y_t'=x_t''+5(\mathrm{e}^t-5x-y)+(\mathrm{e}^{2t}+x+3y) \\ &= x_t''+5\mathrm{e}^t-24x-2y+\mathrm{e}^{2t}=x_t''+5\mathrm{e}^t-24x-2(\mathrm{e}^t-x_t'-5x)+\mathrm{e}^{2t}, \end{aligned}$$

经整理得 $\quad x_t''+2x_t'-14x=-\mathrm{e}^{2t}-2\mathrm{e}^t.$ ①

$$r^2+2r-14=0 \Rightarrow r=-1\pm\sqrt{15} \Rightarrow \bar{x}=C_1\mathrm{e}^{(-1+\sqrt{15})t}+C_2\mathrm{e}^{(-1-\sqrt{15})t}.$$

再解 $x''+2x'-14x=-\mathrm{e}^{2t}$，可求特解 $x_1^*=\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{2t}$.

$x''+2x'-14x=-2\mathrm{e}^t$ 可得特解 $x_2^*=\dfrac{2}{11}\mathrm{e}^t$.

故方程①的通解为

$$\begin{cases} x=C_1\mathrm{e}^{(-1+\sqrt{15})t}+C_2\mathrm{e}^{(-1-\sqrt{15})t}+\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{2t}+\dfrac{2}{11}\mathrm{e}^t, \\ y=\mathrm{e}^t-5x-x_t' \\ \quad =(-4-\sqrt{15})C_1\mathrm{e}^{(-1+\sqrt{15})t}-(4-\sqrt{15})C_2\mathrm{e}^{(-1-\sqrt{15})t}-\dfrac{\mathrm{e}^t}{11}-\dfrac{7}{6}\mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$$

(5) $\begin{cases} x'+2x+y'+y=t, & ① \\ 5x+y'+3y=t^2, & ② \end{cases}$

① − ② 得: $\quad x'-3x-2y=t-t^2 \Rightarrow x''-3x'-2y'=1-2t.$ ③

② − 3 × ① 整理得 $\quad -2y'=t^2-3t+x+3x'$,

代入③并整理得 $\quad x''+x=1+t-t^2.$ ④

特征方程 $r^2+1=0 \Rightarrow r=\pm\mathrm{i} \Rightarrow \bar{x}=C_1\cos t+C_2\sin t$.

令 $x^*=At^2+Bt+C$ 代入④得

$2A+(At^2+Bt+C)=1+t-t^2 \Rightarrow A=-1, B=1, C=3$.

故得通解 $\begin{cases} x=C_1\cos t+C_2\sin t-t^2+t+3, \\ y=\dfrac{1}{2}(x'-3x+t^2-t) \\ \quad =-\dfrac{C_1+3C_2}{2}\sin t+\dfrac{C_2-3C_1}{2}\cos t+2t^2-3t-4. \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x'-3x+2y'+4y=2\sin t, & ① \\ 2x'+2x+y'-y=\cos t, & ② \end{cases}$

2 × ② − ① 得 $\quad 3x'+7x-6y=2\cos t-2\sin t \Rightarrow$

$\quad 3x''+7x'-6y'=-2\sin t-2\cos t$ ③

① + 4 × ② 得 $\quad 9x'+5x+6y'=2\sin t+4\cos t$ ④

③ + ④ 得 $\quad 3x''+16x'+5x=2\cos t$ ⑤

特征方程为 $3r^2+16r+5=0 \Rightarrow r_1=-\dfrac{1}{3}, r_2=-5 \Rightarrow \bar{x}=C_1\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}+C_2\mathrm{e}^{-5t}$. 再令 x^*

$= A\cos t + B\sin t$ 代入 ⑤ 解得 $A = \dfrac{1}{65}, B = \dfrac{8}{65}$,从而求得通解为

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-\frac{1}{3}t} + C_2 e^{-5t} + \dfrac{1}{65}\cos t + \dfrac{8}{65}\sin t, \\ y = \dfrac{1}{6}(3x' + 7x + 2\sin t - 2\cos t) \\ \quad = -\dfrac{4}{3}C_2 e^{-5t} + C_1 e^{-\frac{t}{3}} + \dfrac{61}{130}\sin t - \dfrac{33}{130}\cos t. \end{cases}$$

2 求下列微分方程组满足所给初值条件的特解:

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, & x\big|_{t=0} = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x, & y\big|_{t=0} = 1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dx} - x = 0, x\big|_{t=0} = 1, \\ \dfrac{dx}{dt} + y = 0, y\big|_{t=0} = 0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x - y = 0, & x\big|_{t=0} = 1, \\ \dfrac{dy}{dt} - 8x + y = 0, & y\big|_{t=0} = 4; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} - 4x + \dfrac{dy}{dt} - y = e^t, x\big|_{t=0} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{dx}{dt} + 3x + y = 0, y\big|_{t=0} = 0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x - \dfrac{dy}{dt} = 10\cos t, & x\big|_{t=0} = 2, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y + 4e^{-2t}, & y\big|_{t=0} = 0; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{dy}{dt} + 3y = e^{-t} - 1, & x\big|_{t=0} = \dfrac{48}{49}, \\ \dfrac{dx}{dt} + 2x + \dfrac{dy}{dt} + y = e^{2t} + t, & y\big|_{t=0} = \dfrac{95}{98}. \end{cases}$

【解】 (1) $x'' = y' = -x \Rightarrow x'' + x = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$,故通解为

$$\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t, \\ y = x' = -C_1\sin t + C_2\cos t. \end{cases}$$

将初始条件代入,求得 $C_1 = 0, C_2 = 1$,故所求特解为 $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x'' + 2y' - x = 0, & ① \\ x' + y = 0, & ② \end{cases}$

由 ② $x'' + y' = 0 \Rightarrow y' = -x''$ 代入 ① 得

$$-x'' - x = 0 \Rightarrow x'' + x = 0 \qquad ③$$

$\Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$,故 $\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t, \\ y = -x' = C_1\sin t - C_2\cos t. \end{cases}$

将初始条件代入,求得 $C_1 = 1, C_2 = 0$. 故所求特解为 $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x' + 3x - y = 0, & ① \\ y' - 8x + y = 0, & ② \end{cases}$

由 ① 得 $x'' + 3x' - y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x'' + 3x' - (8x - y) = 0 \quad \Rightarrow$

$x'' + 3x' - 8x + (x' + 3x) = 0$,即 $\quad x'' + 4x' - 5x = 0$. ③

特征方程 $r^2 + 4r - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = -5, r_2 = 1$ 得通解为

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-5t} \\ y = x' + 3x = 4C_1 e^t - 2C_2 e^{-5t}. \end{cases}$$

代入初始条件得 $C_1 = 1, C_2 = 0$,故所求特解为 $\begin{cases} x = e^t \\ y = 4e^t. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x' - 4x + y' - y = e^t, & ① \\ x' + 3x + y = 0, & ② \end{cases}$

① + ② 得 $\quad 3x' - x + y' = e^t$, ③

由 ② 得 $\quad x'' + 3x' + y' = 0$, ④

④ - ③ 得 $\quad x'' + x = -e^t$, ⑤

可得 $r^2 + 1 = 0, r = \pm i \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = C_1 \cos t + C_2 \sin t$,又令 $x^* = Ae^t$ 代入 ⑤ 求得 $A = -\frac{1}{2}$. 故方程组的通解为

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{2} e^t, \\ y = -(x' + 3x) = (C_1 - 3C_2) \sin t - (3C_1 + C_2) \cos t + 2e^t. \end{cases}$$

代入初始条件,得 $C_1 = 2, C_2 = -4$,故所求特解为:

$$\begin{cases} x = 2\cos t - 4\sin t - \frac{1}{2} e^t, \\ y = 14\sin t - 2\cos t + 2e^t. \end{cases}$$

(5) $\begin{cases} x' + 2x - y' = 10\cos t, & ① \\ x' + y' + 2y = 4e^{-2t}, & ② \end{cases}$

① + ② 得:$2x' + 2x + 2y = 10\cos t + 4e^{-2t}$,

即 $\qquad x' + x + y = 5\cos t + 2e^{-2t}$. ③

由 ③ $\quad x'' + x' + y' = -5\sin t - 4e^{-2t}$

$\Rightarrow \quad x'' + x' + (x' + 2x - 10\cos t) = -5\sin t - 4e^{-2t}$

$\Rightarrow \quad x'' + 2x' + 2x = 10\cos t - 5\sin t - 4e^{-2t}$. ④

特征方程为 $r^2 + 2r + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -1 \pm i$

$\Rightarrow \quad \bar{x} = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$

考虑 $\quad x'' + 2x' + 2x = 10\cos t - 5\sin t$ ⑤

令 $x_1^* = A\cos t + B\sin t$ 代入 ⑤,求得 $A = 4, B = 3$.

所以 $\quad x_1^* = 4\cos t + 3\sin t$. 再考虑

$$x'' + 2x' + 2x = -4e^{-2t} \qquad ⑥$$

令 $x_2^* = Ae^{-2t}$,代入 ⑥,得 $A = -2$,故 $x_2^* = -2e^{-2t}$.

故得方程组的通解为

$$\begin{cases} x = e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + 4\cos t + 3\sin t - 2e^{-2t}, \\ y = 5\cos t + 2e^{-2t} - x' - x \\ \quad = e^{-t}(C_1\sin t - C_2\cos t) + \sin t - 2\cos t. \end{cases}$$

由初始条件,求出 $C_1 = 0, C_2 = -2$,故所求特解为

$$\begin{cases} x = 4\cos t + 3\sin t - 2e^{-2t} - 2e^{-t}\sin t, \\ y = \sin t - 2\cos t + 2e^{-t}\cos t. \end{cases}$$

(6) $\begin{cases} x' - x + y' + 3y = e^{-t} - 1, & ① \\ x' + 2x + y' + y = e^{2t} + t, & ② \end{cases}$

② - ① 得 $\quad 3x - 2y = e^{2t} - e^{-t} + t + 1,$ ③

$\quad 3x' - 2y' = 2e^{2t} + e^{-t} + 1.$ ④

$2 \times ① + ④ \quad 5x' - 2x + 6y = 2e^{2t} + 3e^{-t} - 1$ ⑤

$\Rightarrow \quad 5x' - 2x + 6\left[\dfrac{1}{2}(3x - e^{2t} + e^{-t} - t - 1)\right] = 2e^{2t} + 3e^{-t} - 1$

$\Rightarrow \quad 5x' + 7x = 5e^{2t} + 3t + 2,$

即 $$x' + \frac{7}{5}x = e^{2t} + \frac{3}{5}t + \frac{2}{5}.$$

这是一阶线性方程,故

$$x = e^{-\frac{7}{5}t}\left[\int e^{\frac{7}{5}t}\left(e^{2t} + \frac{3}{5}t + \frac{2}{5}\right)dt + C\right] = \frac{5}{17}e^{2t} + \frac{3}{7}t - \frac{1}{49} + Ce^{-\frac{7}{5}t}.$$

将 $x\big|_{t=0} = \dfrac{48}{49}$ 代入,解得 $C = \dfrac{12}{17}$,故所求特解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{17}e^{2t} + \dfrac{3}{7}t - \dfrac{1}{49} + \dfrac{12}{17}e^{-\frac{7}{5}t}, \\ y = \dfrac{1}{2}(3x - e^{2t} + e^{-t} - t - 1) = -\dfrac{1}{17}e^{2t} + \dfrac{1}{7}t - \dfrac{26}{49} + \dfrac{18}{17}e^{-\frac{7}{5}t} + \dfrac{1}{2}e^{-t}. \end{cases}$$

总习题七

1 填空:

(1) $xy''' + 2x^2y'^2 + x^3y = x^4 + 1$ 是________阶微分方程;

(2) 一阶线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解为________.

(3) 与积分方程 $y = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$ 等价的微分方程初值问题是________.

(4) 已知 $y = 1, y = x, y = x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解,则该方程的通解为________.

【解】 (1)3. (2) $y = e^{-\int P(x)dx}\left[Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$. (3) $y' = f(x,y)$, $y\big|_{x=x_0} = 0$.

【注】 ① 方程中 $\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$ 的积分上限 x 是积分方程的变量,它是与 y 相对应的;而积分表达式中 $f(x,y)\,dx$ 中的 x 是积分变量,不能将它与积分上限相混淆,故积分方程应理解为 $y =$

$\int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt$.

② 由于积分方程 $y = \int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt$ 确定了隐函数 $y = y(x)$，因此积分方程中的 y 取 $y = y(x)$ 后，有恒等式 $\quad y(x) \equiv \int_{x_0}^{x} f[t,y(t)]\,dt$.

于是上式两端对 x 求导，就得 $y'(x) = f[x,y(x)]$，即 $y' = f(x,y)$. 显然，当 $x = x_0$ 时，$y = \int_{x_0}^{x_0} f(x,y)\,dx = 0$，即 $y\big|_{x=x_0} = 0$.

(4) $y = C_1(x-1) + C_2(x^2-1) + 1$.

因为由叠加原理知 $x-1$ 与 x^2-1 是非齐次方程对应的齐次方程的解，且它们是线性无关的. 于是根据线性方程通解结构得出以上结论.

2 以下两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

(1) 设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解：$y_1(x)$ 与 $y_2(x)$，C 为任意常数，则该方程的通解是(　).

(A) $C[y_1(x) - y_2(x)]$　　(B) $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$

(C) $C[y_1(x) + y_2(x)]$　　(D) $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$

【解】 $y_1(x) - y_2(x)$ 是对应的齐次方程 $y' + P(x)y = 0$ 的非零解，从而由线性微分方程解的性质定理知 $C[y_1(x) - y_2(x)]$ 是齐次方程的通解，再由非齐次线性方程解的结构定理知 $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$ 是原方程的通解. 故选(B).

(2) 具有特解 $y_1 = e^{-x}, y_2 = 2xe^{-x}, y_3 = 3e^{x}$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是(　).

(A) $y''' - y'' - y' + y = 0$　　(B) $y''' + y'' - y' - y = 0$

(C) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$　　(D) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

【解】 由题设知 $r = -1, -1, 1$ 为所求齐次线性微分方程对应的特征方程的3个根，而 $(r+1)^2(r-1) = r^3 + r^2 - r - 1$，故应选(B).

3 求以下各式所表示的函数为通解的微分方程：

(1) $(x+C)^2 + y^2 = 1$(其中 C 为任意常数)；

(2) $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x}$(其中 C_1、C_2 为任意常数).

【解】 (1) 将 $(x+C)^2 + y^2 = 1$ 两端关于 x 求导，得

$$x + C + yy' = 0，\text{即有} \quad C = -x - yy',$$

将其代入 $(x+C)^2 + y^2 = 1$ 中，得 $\quad y^2(1 + y'^2) = 1$.

(2) 将 $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x}$ 关于 x 求二次导数，得 $\begin{cases} y' = C_1e^{x} + 2C_2e^{2x}, \\ y'' = C_1e^{x} + 4C_2e^{2x}. \end{cases}$

把以上两式看成是以 C_1 与 C_2 为未知量的线性方程组，解得

$$C_1 = (2y' - y'')e^{-x}, \quad C_2 = \frac{1}{2}(y'' - y')e^{-2x},$$

代入 $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x}$ 中，得 $\quad y = (2y' - y'') + \frac{1}{2}(y'' - y')$，即 $\quad y'' - 3y' + 2y = 0$.

4 求下列微分方程的通解：

(1) $xy' + y = 2\sqrt{xy}$;　　(2) $xy'\ln x + y = ax(\ln x + 1)$;

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2(\ln y - x)}$;　　* (4) $\dfrac{dy}{dx} + xy - x^3y^3 = 0$;

(5) $y'' + y'^2 + 1 = 0$;　　(6) $yy'' - y'^2 - 1 = 0$;

(7) $y'' + 2y' + 5y = \sin 2x$;　　(8) $y''' + y'' - 2y' = x(e^x + 4)$;

* (9) $(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0$;　　(10) $y' + x = \sqrt{x^2 + y}$.

【解】 (1) 将方程化为 $y' + \dfrac{y}{x} = 2\sqrt{\dfrac{y}{x}}$,并令 $\dfrac{y}{x} = u$,则方程成为

$$xu' = 2\sqrt{u} - 2u.$$

分离变量后有 $$\frac{du}{2\sqrt{u}(1-\sqrt{u})} = \frac{dx}{x},$$

积分得 $$\ln|1-\sqrt{u}| = -\ln|x| + \ln C_1,$$

即 $x(1-\sqrt{u}) = C$,代入 $u = \dfrac{y}{x}$,得原方程的通解 $x - \sqrt{xy} = C$.

(2) 原方程可化为 $y' + \dfrac{1}{x\ln x}y = a\left(1 + \dfrac{1}{\ln x}\right)$,由一阶线性方程的通解公式,得

$$y = e^{-\int\frac{1}{x\ln x}dx}\left[\int a\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}dx + C\right] = \frac{1}{\ln x}\left[\int a(\ln x + 1)dx + C\right]$$

$$= \frac{1}{\ln x}(ax\ln x + C) = ax + \frac{C}{\ln x}.$$

故方程的通解为 $y = ax + \dfrac{C}{\ln x}$.

(3) 原方程可表示为 $\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{2}{y}x = \dfrac{2\ln y}{y}$,由一阶线性方程的通解公式,得

$$x = e^{-\int\frac{2}{y}dy}\left(\int\frac{2\ln y}{y}e^{\int\frac{2}{y}dy}dy + C\right) = \frac{1}{y^2}\left(\int 2y\ln y\,dy + C\right) = \frac{1}{y^2}\left(y^2\ln y - \frac{1}{2}y^2 + C\right)$$

$$= \ln y - \frac{1}{2} + \frac{C}{y^2}.$$

故方程的通解为 $x = \dfrac{C}{y^2} + \ln y - \dfrac{1}{2}$.

* (4) 原方程为伯努利方程 $y' + xy = x^3y^3$. 该方程两端同除以 y^3 后成为

$$\frac{y'}{y^3} + x\frac{1}{y^2} = x^3.$$

令 $\dfrac{1}{y^2} = z$,则 $-2\dfrac{y'}{y^3} = z'$,且原方程化为

$$z' - 2xz = -2x^3.$$

得 $$z = e^{\int 2xdx}\left(\int -2x^3e^{-\int 2xdx}dx + C\right) = e^{x^2}\left(\int -2x^3e^{-x^2}dx + C\right)$$

$$= e^{x^2}\left(x^2e^{-x^2} - \int 2xe^{-x^2}dx + C\right) = e^{x^2}(x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C) = x^2 + 1 + Ce^{x^2}.$$

代入 $z = \dfrac{1}{y^2}$,即得原方程的通解

$$\frac{1}{y^2}=Ce^{x^2}+x^2+1.$$

(5) 令 $y'=p$,则 $y''=p'$ 且方程成为

$$p'+p^2+1=0.$$

分离变量并积分

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=-\int\mathrm{d}x,$$

得 $\arctan p=-x+C_1$,即

$$y'=p=\tan(-x+C_1),$$

于是得通解

$$y=\int-\tan(x-C_1)\mathrm{d}x=\ln\left|\cos(x-C_1)\right|+C_2,$$

或写成 $y=\ln\left|\cos(x+C_1)\right|+C_2$.

(6) 此方程不显含 x,令 $y'=p$,则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,且原方程化为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2-1=0.$$

分离变量 $\quad\dfrac{p\mathrm{d}p}{p^2+1}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y},$

积分得 $\quad\dfrac{1}{2}\ln(p^2+1)=\ln y+\ln C_1,$

即 $p^2+1=(C_1y)^2$,故 $p=\pm\sqrt{(C_1y)^2-1}$. 取 $y'=\sqrt{(C_1y)^2-1}$,分离变量并积分

$$x=\int\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(C_1y)^2-1}}=\frac{1}{C_1}\int\frac{\mathrm{d}(C_1y)}{\sqrt{(C_1y)^2-1}}$$

$$=\frac{1}{C_1}\{\ln[C_1y+\sqrt{(C_1y)^2-1}]-C_2\},$$

即 $C_1y=\dfrac{e^{C_1x+C_2}+e^{-(C_1x+C_2)}}{2}$.

对于 $y'=-\sqrt{(C_1y)^2-1}$,可得相同的结果,故原方程的通解为

$$y=\frac{1}{2C_1}(e^{C_1x+C_2}+e^{-C_1x-C_2}).$$

(7) 原方程对应的齐次方程的特征方向为 $r^2+2r+5=0$,有根 $r_{1,2}=-1\pm2i$,故对应齐次方程的通解为 $Y=e^{-x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$.

因 $f(x)=\sin2x$,$\lambda+i\omega=2i$ 不是特征方程的根,故令 $y^*=A\cos2x+B\sin2x$ 是原方程的特解. 将 y^* 代入原方程,可得

$$(A+4B)\cos2x+(B-4A)\sin2x=\sin2x.$$

比较系数,得 $\begin{cases}A+4B=0,\\B-4A=1,\end{cases}$ 即 $A=-\dfrac{4}{17}$,$B=\dfrac{1}{17}$. 于是

$$y^*=-\frac{4}{17}\cos2x+\frac{1}{17}\sin2x.$$

故原方程的通解为

$$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - \frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x.$$

(8) 原方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^3 + r^2 - 2r = 0$,有根 $r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = -2$,故对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-2x}$.

对于方程

$$y''' + y'' - 2y' = xe^x, \tag{①}$$

因 $f_1(x) = xe^x$,其中 $\lambda = 1$ 是特征方程的(单)根,故令 $y_1^* = x(A_1x + B_1)e^x$,代入①中并消去 e^x,得 $6A_1x + 8A_1 + 3B_1 = x$,比较系数得

$$\begin{cases} 6A_1 = 1, \\ 8A_1 + 3B_1 = 0, \end{cases}$$

即 $A_1 = \frac{1}{6}, B_1 = -\frac{4}{9}$. 于是 $y_1^* = \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}x\right)e^x$.

对于方程

$$y''' + y'' - 2y' = 4x. \tag{②}$$

因 $f_2(x) = 4x$,其中 $\lambda = 0$ 是特征方程的(单)根,故令 $y_2^* = x(A_2x + B_2)$,代入②中,得 $-4A_2x + 2A_2 - 2B_2 = 4x$. 比较系数得 $A_2 = -1, B_2 = -1$. 于是 $y_2^* = -x^2 - x$.

根据线性方程解的叠加原理知 $y^* = y_1^* + y_2^*$ 是原方程的特解,故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-2x} + \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}x\right)e^x - x^2 - x.$$

*(9) 原方程可改写成 $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -y^3x^{-1}$,这是伯努利方程. 在此方程两端同乘以 x,得 $x\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x^2 = -y^3$.

令 $x^2 = z$,则 $\frac{dz}{dy} = 2x\frac{dx}{dy}$,且原方程化为

$$\frac{dz}{dy} - \frac{6}{y}z = -2y^3,$$

解得

$$z = e^{\int \frac{6}{y}dy}\left(\int -2y^3e^{-\int\frac{6}{y}dy}dy + C\right) = y^6\left(\int -\frac{2}{y^3}dy + C\right) = y^6\left(\frac{1}{y^2} + C\right) = y^4 + Cy^6.$$

代入 $z = x^2$,得原方程的通解 $x^2 = y^4 + Cy^6$.

(10) 令 $u = \sqrt{x^2 + y}$,即 $y = u^2 - x^2$,则 $\frac{dy}{dx} = 2u\frac{du}{dx} - 2x$. 且原方程化为 $2u\frac{du}{dx} - x = u$,即 $\frac{du}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{u}\right) = \frac{1}{2}$.

又令 $\frac{u}{x} = v$,即 $u = xv$,则 $\frac{du}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$. 且原方程化为

$$v + x\frac{dv}{dx} - \frac{1}{2v} = \frac{1}{2}.$$

分离变量得 $\frac{udv}{2v^2 - v - 1} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$. 积分

$$-\frac{1}{2}\ln|x| = \int\frac{vdv}{2v^2 - v - 1} = \frac{1}{3}\left(\int\frac{1}{v-1}dv + \int\frac{1}{2v+1}dv\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln|v-1|+\frac{1}{2}\ln|2v-1|\right]+C_1,$$

即 $(v-1)^2(2v-1)x^3=C_2(C_2=e^{-6C_1})$. 代入 $v=\frac{u}{x}$,得

$$2u^3-3xu^2+x^3=C_2.$$

再代入 $u=\sqrt{x^2+y}$,得原方程的通解

$$2(x^2+y)^{\frac{3}{2}}-3x(x^2+y)+x^3=C_2,$$

即 $(x^2+y)^{\frac{3}{2}}=x^3+\frac{3}{2}xy+C\left(C=\frac{C_2}{2}\right)$.

5 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

(1) $y^3\mathrm{d}x+2(x^2-xy^2)\mathrm{d}y=0$, $x=0$ 时 $y=1$;

(2) $y''-ay'^2=0$, $x=0$ 时 $y=0$, $y'=-1$;

(3) $2y''-\sin 2y=0$, $x=0$ 时 $y=\frac{\pi}{2}$, $y'=1$;

(4) $y''+2y'+y=\cos x$, $x=0$ 时 $y=0$, $y'=\frac{3}{2}$.

【解】 (1) 原方程改写为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{2}{y}x=-\frac{2}{y^3}x^2$. 令 $z=x^{1-2}=x^{-1}$,得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{2}{y}z=\frac{2}{y^3}.$$

$$z=e^{-\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left(C+\int\frac{2}{y^3}\cdot e^{\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right)=y^{-2}(C+2\ln y).$$

通解为 $\quad y^2=x(C+2\ln y)$.

由 $x=0,y=1$ 得 $C=1$,特解为 $\quad y^2=x(1+2\ln y)$.

(2) 令 $y'=P$,原方程变为 $\quad P'-aP^2=0$.

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=aP^2 \quad\Rightarrow\quad \int\frac{\mathrm{d}P}{P^2}=\int a\mathrm{d}x,$$

得 $\quad P=-\frac{1}{ax+C}$. 由 $x=0$ 时,$P=-1$,得 $C=1$. 即 $P=-\frac{1}{ax+1}$,从而

$$y=-\int\frac{1}{ax+1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)+C_1.$$

由 $x=0$ 时,$y=0$ 得 $C_1=0$. 特解为 $\quad y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$.

(3) 令 $y'=P$, $y''=P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$,代入原方程得 $\quad 2P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=\sin 2y$.

解得 $\quad P^2=-\frac{1}{2}\cos 2y+C_1$,由 $x=0$ 时,$y=\frac{\pi}{2}$, $P=-1$,得 $C=\frac{1}{2}$.

故 $\quad P^2=\frac{1}{2}(1-\cos 2y)=\sin^2 y$.

从而 $\qquad P=\sin y \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin y$,解得 $\quad y=2\arctan(C_1e^x)$.

由 $x=0$ 时,$y=\dfrac{\pi}{2}$,得 $C_1=1$,故特解为 $\quad y=2\arctan e^x$.

(4) 由原方程对应齐次方程的特征方程 $r^2+2r+1=0$,解得 $r_{1,2}=-1$,故对应齐次方程的通解为 $\quad Y=(C_1+C_2x)e^{-x}$.

因 $f(x)=\cos x$,$\lambda+i\omega=0+i$ 不是特征方程的根,故令 $y^*=A\cos x+B\sin x$ 是原方程的特解,并代入原方程,得 $-2A\sin x+2B\cos x=\cos x$.

比较系数得 $A=0$,$B=\dfrac{1}{2}$,故 $y^*=\dfrac{1}{2}\sin x$,且原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{2}\sin x,$$

并有 $$y'=(C_2-C_1-C_2x)e^{-x}+\frac{1}{2}\cos x.$$

代入初始条件 $x=0,y=0,y'=\dfrac{3}{2}$,有 $\begin{cases}C_1=0,\\ C_2-C_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2},\end{cases}$ 即 $C_1=0,C_2=1$.

故所求特解为 $\quad y=xe^{-x}+\dfrac{1}{2}\sin x$.

6 已知某曲线经过(1,1),它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标,求它的方程.

【解】 设所求曲线为 $y=y(x)$,在其上任取一点 (x,y),过该点的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$. 令 $X=0$ 得 $Y=y-xy'$,依题意得

$$\begin{cases}y-xy'=x,\\ y\big|_{x=1}=1.\end{cases}\quad \text{方程可变为}\quad y'-\frac{1}{x}y=-1.$$

$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int(-1)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=x(C-\ln x).$$

当 $x=1$ 时,$y=1$,得 $C=1$,故所求曲线方程为 $\quad y=x-x\ln x$.

7 已知某车间的体积为 $30\times30\times6\text{m}^3$,其中的空气含 0.12% 的 CO_2(以体积计算). 现以含 CO_2 0.04% 的新鲜空气输入,问每分钟应输入多少,才能使 30min 后使车间空气中 CO_2 的含量不超过 0.06%?(假定输入新鲜空气与原有空气很快混合均匀后,以相同的流量排出).

【解】 设每分钟应输入 $k\text{m}^3$,且 t 时刻车间内含 CO_2 的百分比为 $x(t)\%$,在 $[t,t+dt]$ 内,CO_2 百分比的改变量为 $dx\%$. 因车间内 CO_2 的改变量为进入量与排出量之差,故

$$5400dx\%=k(0.04)\%dt-kx(t)\%dt,$$

即 $$\frac{dx}{dt}+\frac{k}{5400}x=\frac{k\times0.04}{5400}.$$

且 $\quad x(0)=0.12,x(30)=0.06$.

将上述方程看作线性方程或可分离变量的微分方程,解之得 $\quad x=0.04+Ce^{-\frac{k}{5400}t}$.

由 $x(0)=0.12$,得 $C=0.08$. 故 $\quad x(t)=0.04+0.08e^{-\frac{k}{5400}t}$.

由 $x(30)=0.06$,得 $k\approx249.53$(米^3).

8 设可导函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\varphi(x)\cos x + 2\int_0^x \varphi(t)\sin t\mathrm{d}t = x + 1,$$

求 $\varphi(x)$.

【解】 方程两边对 x 求导得

$\varphi'(x)\cos x - \varphi(x)\sin x + 2\varphi(x)\sin x = 1$,即 $\quad \varphi'(x) + \tan x \cdot \varphi(x) = \sec x$.

所以 $\quad \varphi(x) = \mathrm{e}^{-\int \tan x\mathrm{d}x}\left(C + \int \sec x\mathrm{e}^{\int \tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) = C\cos x + \sin x$.

又由方程知 $\quad \varphi(0) = 1$,故 $C = 1$. 于是 $\quad \varphi(x) = \cos x + \sin x$.

9 设光滑曲线 $y = \varphi(x)$ 过原点,且当 $x > 0$ 时 $\varphi(x) > 0$,对应于 $[0,x]$ 一段曲线的弧长为 $\mathrm{e}^x - 1$,求 $\varphi(x)$.

【解】 根据题设条件得 $\quad \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - 1$,且 $y\big|_{x=0} = 0$.

在积分方程两端对 x 求导,得 $\quad \sqrt{1 + y'^2} = \mathrm{e}^x$,即 $\quad y' = \pm\sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 1}$.

取 $y' = \sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 1}$,积分得 $\quad y = \sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 1} - \arctan\sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 1} + C$,

由初始条件 $y\big|_{x=0} = 0$ 知 $C = 0$,故 $\quad y = \sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 1} = \arctan\sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 1}$.

10 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个解,令

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

证明:(1) $W(x)$ 满足方程 $W' + p(x)W = 0$; (2) $W(x) = W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^x p(t)\mathrm{d}t}$.

【证】 (1) 因为 $y_1(x), y_2(x)$ 同是原方程的解,故有

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0, \quad y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0.$$

分别用 y_2, y_1 乘上述两等式,再相减得

$$y_1y_2'' - y_2y_1'' + p(x)(y_1y_2' - y_2y_1') = 0. \qquad ①$$

考虑到 $\quad \dfrac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_1y_2' - y_2y_1') = y_1y_2'' - y_2y_1''$,

故 ① 式可写成 $\quad \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} + p(x)W = 0. \qquad ②$

(2) 将 ② 式两边乘以 $\mathrm{e}^{\int_{x_0}^x p(t)\mathrm{d}t}$,$x_0$ 是定义域内任一点,整理后可得 $\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(W\mathrm{e}^{\int_{x_0}^x p(t)\mathrm{d}t}\right) = 0$.

所以 $\quad W\mathrm{e}^{\int_{x_0}^x p(t)\mathrm{d}t} = C$,即 $W = C\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^x p(t)\mathrm{d}t}$.

如果在上式中令 $x = x_0$,则 $W(x_0) = C$,于是 $\quad W(x) = W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^x p(t)\mathrm{d}t}$.

11 求下列欧拉方程的通解:

(1) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$; $\qquad$ (2) $x^2y'' - 4xy' + 6y = x$.

【解】 (1) 作变换 $x = \mathrm{e}^t$,原方程变为

$$\mathrm{D}(\mathrm{D} - 1)y + 3\mathrm{D}y + y = 0, \text{即} \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0.$$

它的通解为 $\quad y = (C_1 + C_2t)\mathrm{e}^{-t}$.

所以,原方程的通解为 $y = \dfrac{1}{x}(C_1 + C_2\ln|x|)$.

(2) 作变换 $x = e^t$,原方程变为 $D(D-1)y - 4Dy + 6y = e^t$,即

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = e^t. \quad ①$$

其对应的齐次方程 $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0$ 的通解为 $\bar{y} = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$.

设 $y^* = Ae^t$ 是 ① 的特解,代入 ① 求得 $A = \dfrac{1}{2}$,故 ① 的通解为 $y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + \dfrac{1}{2}e^t$. 于是原方程的通解为 $y = C_1x^2 + C_2x^3 + \dfrac{1}{2}x$.

12 求下列常系数线性微分方程组的通解:

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = 0, \\ 3\dfrac{dx}{dt} + 2x + 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = t; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + x + \dfrac{dy}{dt} + y = 0, \\ \dfrac{dx}{dt} + x + \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = e^t. \end{cases}$

【解】 (1) $\begin{cases} x' + 2y' + y = 0, & ① \\ 3x' + 2x + 4y' + 3y = t, & ② \end{cases}$

② − 2 × ① 得: $x' + 2x + y = t \Rightarrow$

$$x'' + 2x' + y' = 1. \quad ③$$

3 × ① − ② 得: $2y' - 2x = -t. \quad ④$

2 × ③ − ④ 得 $2x'' + 4x' + 2x = 2 + t$, 即

$$x'' + 2x' + x = 1 + \frac{t}{2}. \quad ⑤$$

特征方程 $r^2 + 2r + 1 = 0, r_1 = r_2 = -1, \bar{x} = (C_1 + C_2t)e^{-t}$.

令 $x^* = At + B$ 代入 ⑤ 求得 $A = \dfrac{1}{2}, B = 0, x^* = \dfrac{1}{2}t$.

故所求通解为 $\begin{cases} x = (C_1 + C_2t)e^{-t} + \dfrac{1}{2}t, \\ y = t - x' - 2x = -(C_1 + C_2 + C_2t)e^{-t} - \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x'' + 2x' + x + y' + y = 0, & ① \\ x' + x + y'' + 2y' + y = e^t, & ② \end{cases}$

由 ① 得 $x''' + 2x'' + x' + y'' + y' = 0. \quad ③$

③ − ② 有 $x''' + 2x'' - x - y' - y = -e^t, \quad ④$

① + ④ 有 $x''' + 3x'' + 2x' = -e^t. \quad ⑤$

特征方程 $r^3 + 3r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = -1, r_3 = -2 \Rightarrow \bar{x} = C_1 + C_2e^{-t} + C_3e^{-2t}$. 令 $x^* = Ae^t$ 代入 ⑤ 得 $A = \dfrac{-1}{6}$. 从而得到方程 ⑤ 的通解 $x = C_1 + C_2e^{-t} + C_3e^{-2t} - \dfrac{1}{6}e^t$. 代入 ① 得

$$\frac{dy}{dt} + y = -(x'' + 2x' + x) = -C_1 - C_3e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t. \quad ⑥$$

⑥ 是线性方程，可求得

$$y = e^{-\int dt}\left[\int e^{\int dt}\left(-C_1 - C_3e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t\right)dt + C_4\right]$$

$$= e^{-t}\left[\int\left(-C_1e^t - C_3e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}\right)dt + C_4\right] = -C_1 + C_3e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t + C_4e^{-t}.$$

故通解为
$$\begin{cases} x = C_1 + C_2e^{-t} + C_3e^{-2t} - \frac{1}{6}e^t, \\ y = -C_1 + C_3e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t + C_4e^{-t}. \end{cases}$$

考研试题选解

1 已知 $y = \frac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ 的解，则 $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ 的表达式为

(A) $-\frac{y^2}{x^2}$. (B) $\frac{y^2}{x^2}$. (C) $-\frac{x^2}{y^2}$. (D) $\frac{x^2}{y^2}$.

【分析】 以 $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$ 代入微分方程，得

$$\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right),\text{即}\quad \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y^2}{x^2}.$$

应选(A).

2 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是________.

【分析】 这是可变量分离的一阶方程，分离变量得

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)dx.$$

积分得 $\ln|y| = \ln|x| - x + C_1$，即 $|y| = e^{C_1}|x|e^{-x}$.

因此，通解为 $y = Cxe^{-x}$，C 为 $\forall$ 常数.

3 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是________.

【分析】 这是可变量分离的一阶方程，分离变量得

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)dx \xrightarrow{\text{积分}} \ln|y| = \ln|x| - x + C_1,\text{即} |y| = e^{C_1}|x|e^{-x}.$$

因此，原微分方程的通解为 $y = Cxe^{-x}$，其中 C 为 $\forall$ 常数.

4 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y =$ ________.

【分析一】 原微分方程可以写成 $(xy)' = 0 \xrightarrow{\text{积分}} xy = C$.

由 $y(1) = 1 \Rightarrow C = 1$. 因此该初值问题的解是 $y = \frac{1}{x}$.

【分析二】 这是分离变量的方程，先分离变量然后积分得

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},\quad \ln|y| = -\ln|x| + C_1,\text{即}\quad |y| = \frac{e^{C_1}}{|x|},\quad y = \frac{C}{x}.$$

由 $y(1)=1 \Rightarrow C=1$. 因此该初值问题的解是 $y=\dfrac{1}{x}$.

5 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=$ ________.

【分析】 本题是求齐次微分方程的特解问题. 令 $y=xu$, 于是 $\mathrm{d}y=x\mathrm{d}u+u\mathrm{d}x$, 代入原方程可化为

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=u-\frac{1}{2}u^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\mathrm{d}u}{u^3}+\frac{\mathrm{d}x}{x}=0.$$

两端求积分得 $\quad -\dfrac{1}{u^2}+\ln|x|=C$, 即 $\ln|x|=C+\dfrac{x^2}{y^2}$.

在通解中令 $x=1, y=1$ 可确定常数 $C=-1$, 于是所求特解为 $\dfrac{x^2}{y^2}=1+\ln|x|$, 整理得

$$y^2=\frac{x^2}{1+\ln|x|}.$$

表达式 $y^2=\dfrac{x^2}{1+\ln|x|}$ 包含四个函数:

$$y=\frac{x}{\sqrt{1+\ln x}} \quad \left(x>\frac{1}{\mathrm{e}}\right), \qquad y=-\frac{x}{\sqrt{1+\ln x}} \quad \left(x>\frac{1}{\mathrm{e}}\right),$$

$$y=\frac{x}{\sqrt{1+\ln(-x)}} \quad \left(x<-\frac{1}{\mathrm{e}}\right), \qquad y=-\frac{x}{\sqrt{1+\ln(-x)}} \quad \left(x<-\frac{1}{\mathrm{e}}\right),$$

其中第一个函数 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+\ln x}}$ 正是所求的特解.

6 微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$ ________.

【分析】 这是求解一阶线性微分方程的初值问题.

方程两边乘 $\mu(x)=\mathrm{e}^x$ 得 $(y\mathrm{e}^x)'=\cos x$, 两边积分

$$\int_0^x (y\mathrm{e}^x)'\mathrm{d}x=\int_0^x \cos x\mathrm{d}x,$$

得 $\quad y\mathrm{e}^x=\sin x$, 即 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$.

7 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解, 若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2}, \mu=\dfrac{1}{2}$.　　(B) $\lambda=-\dfrac{1}{2}, \mu=-\dfrac{1}{2}$.

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3}, \mu=\dfrac{1}{3}$.　　(D) $\lambda=\dfrac{2}{3}, \mu=\dfrac{2}{3}$.

【分析】 按题意

$$(\lambda y_1+\mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=q(x),$$

而

$$\begin{aligned}(\lambda y_1+\mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1+\mu y_2)&=\lambda[y_1'+p(x)y_1]+\mu[y_2'+p(x)y_2]\\&=\lambda q(x)+\mu q(x)=(\lambda+\mu)q(x)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \lambda+\mu=1.$

又 $\quad (\lambda y_1-\mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1-\mu y_2)=0,$

而 $$(\lambda y_1-\mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1-\mu y_2)=\lambda[y_1'+p(x)y_1]-\mu[y_2'+p(x)y_2]$$
$$=\lambda q(x)-\mu q(x)=(\lambda-\mu)q(x),$$

$\Rightarrow$ $$\lambda-\mu=0.$$

由 $\begin{cases}\lambda+\mu=1,\\ \lambda-\mu=0\end{cases}$ $\Rightarrow\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$. 因此选(A).

8 过点$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$且满足关系式 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程为________.

【分析】 所求曲线是初值问题$\begin{cases}y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1,\\ y\big|_{x=\frac{1}{2}}=0\end{cases}$的解. 所给一阶线性方程的标准形式为

$$y'+\frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}y=\frac{1}{\arcsin x}.$$

由于 $e^{\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}}=|\arcsin x|$,两边乘 $\mu(x)=\arcsin x$ 得 $(y\arcsin x)'=1$.

积分得 $y\arcsin x=x+C\Rightarrow$ 通解为 $y=\dfrac{1}{\arcsin x}(C+x)$.

又由 $y\big|_{x=\frac{1}{2}}=0$ 得 $C=-\dfrac{1}{2}$,所求曲线方程为 $y\arcsin x=x-\dfrac{1}{2}$.

【评注】 上述是按解一阶线性方程的标准化方法来求解. 事实上,由求导法则可得

$$y'\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y=(y\arcsin x)'.$$

于是原方程可写成 $(y\arcsin x)'=1$.

9 微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$ 满足 $y\big|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$ 的特解为________.

【分析】 这是一阶线性方程,写成标准形式

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=\frac{x^2}{2},$$

两边乘 $e^{-\int\frac{1}{2x}dx}\xlongequal{取}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 得 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}y\right)'=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{2}$ $\xRightarrow{积分}$ $\dfrac{1}{\sqrt{x}}y=\dfrac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$.

由 $y(1)=\dfrac{6}{5}$ 得 $C=1$. 因此得特解 $y=\dfrac{1}{5}x^3+\sqrt{x}$.

10 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为________.

【分析】 这是一阶线性方程. 原方程变形为

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\ln x.$$

两边乘 $e^{\int\frac{2}{x}dx}=x^2$ 得 $\dfrac{d}{dx}(x^2y)=x^2\ln x$.

积分得 $x^2y=C+\int x^2\ln x dx=C+\dfrac{1}{3}\int\ln x dx^3=C+\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\dfrac{1}{9}x^3$.

由 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 得 $C=0 \Rightarrow y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$.

11 微分方程 $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解是 $y=$ ________.

【分析】 将原方程改写成 $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=xe^{-x}$,这是一阶线性方程.

由 $\mu(x)=e^{-\int\frac{dx}{x}}\xlongequal{\text{取}}\frac{1}{|x|}$,两边乘 $\frac{1}{x}$ 得 $\left(\frac{1}{x}y\right)'=e^{-x}$.

积分得 $\frac{1}{x}y=-e^{-x}+C$.

通解为 $y=Cx-xe^{-x}$,其中 C 为 $\forall$ 常数.

12 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\frac{y}{1+x^2}\Delta x+\alpha$,且当 $\Delta x\to 0$ 时,α 是 Δx 的高阶无穷小,$y(0)=\pi$,则 $y(1)$ 等于

(A) 2π.　　(B) π.　　(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$.　　(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

【分析】 由可微定义,得微分方程 $y'=\frac{y}{1+x^2}$.分离变量,得 $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{1+x^2}$.

积分得 $\ln|y|=\arctan x+C'$,　即 $y=Ce^{\arctan x}$.

代入初始条件 $y(0)=\pi$,得 $C=\pi$,于是 $y(x)=\pi e^{\arctan x}$.

由此,$y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.应选(D).

13 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的解为________.

【分析】 这是一阶线性微分方程.原方程变形为 $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\ln x$,两边乘 $e^{\int\frac{2}{x}dx}=x^2$ 得

$$\frac{d}{dx}(x^2y)=x^2\ln x.$$

积分得 $x^2y=C+\int x^2\ln x dx=C+\frac{1}{3}\int\ln x dx^3=C+\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3$.

由 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 得 $C=0 \Rightarrow y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$.

14 设 $F(x)=f(x)g(x)$,其中函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件:

$$f'(x)=g(x),\ g'(x)=f(x) \text{ 且 } f(0)=0,\ f(x)+g(x)=2e^x.$$

(1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程; (2) 求出 $F(x)$ 的表达式.

【解】 (1) 由
$$\begin{aligned}F'(x)&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=g^2(x)+f^2(x)\\&=[f(x)+g(x)]^2-2f(x)g(x)=(2e^x)^2-2F(x),\end{aligned}$$

可知 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程为 $F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$.

(2) 用 e^{2x} 同乘方程两边,可得 $[e^{2x}F(x)]'=4e^{4x}$,积分即得 $e^{2x}F(x)=e^{4x}+C$,于是方程的通解是 $F(x)=e^{2x}+Ce^{-2x}$.

将 $F(0)=f(0)g(0)=0$ 代入上式,可确定常数 $C=-1$.故所求函数的表达式为

$$F(x)=e^{2x}-e^{-2x}.$$

【评注】 不难求得 $f(x)=e^x-e^{-x}$, $g(x)=e^x+e^{-x}$.

15 设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x),y_2(x)$,C 为任意常数,则该方程的通解是

(A) $C[y_1(x)-y_2(x)]$.　　(B) $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$.

(C) $C[y_1(x)+y_2(x)]$.　　(D) $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$.

【分析】 由题设以及线性微分方程解的迭加原理知 $y_1(x)-y_2(x)$ 是齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=0$ 的一个非零解,C 是一个任意常数,$y_1(x)$ 是非齐次线性微分方程的一个特解,从而由线性方程通解的结构可知 $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$ 是方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解.故应选(B).

16 设函数 $y(x)$ 具有二阶导数,且曲线 $l:y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点.记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 处切线的倾角,若 $\frac{d\alpha}{dx}=\frac{dy}{dx}$,求 $y(x)$ 的表达式.

【解】 这是微分方程问题.由题设知:$y(0)=0,y'(0)=1$.由导数的几何意义知

$$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}.$$

上式两边对 x 求导得 $\quad \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$,代入 $\frac{d\alpha}{dx}=\frac{dy}{dx}$ 得

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

这是可降阶的二阶方程,令 $P=\frac{dy}{dx}$,得 $\quad (1+P^2)P=\frac{dP}{dx}$.

分离变量得 $$dx=\frac{dP}{P(1+P^2)}=\left(\frac{1}{P}-\frac{P}{1+P^2}\right)dP.$$

积分得 $$x=\frac{1}{2}\ln\frac{P^2}{1+P^2}+C.$$

由 $P(0)=1$ 得 $C=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$,代入得

$$x=\frac{1}{2}\ln\frac{2P^2}{1+P^2}\Rightarrow P=\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}.$$

由 $y(0)=0$,再积分得

$$y(x)=\int_0^x\frac{e^t}{\sqrt{2-e^{2t}}}dt=\int_0^x\frac{d\left(\frac{e^t}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{e^t}{\sqrt{2}}\right)^2}}=\arcsin\frac{e^t}{\sqrt{2}}\Big|_0^x=\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}.$$

17 求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

【分析与求解】 令 $P=y'$ 得 $\quad \frac{dP}{dx}(x+P^2)=P$.改写成

$$\frac{dx}{dP}-\frac{x}{P}=P.$$

这是一阶线性方程,两边乘 $\frac{1}{P}\left(e^{-\int\frac{dP}{P}}\xlongequal{\text{取}}\frac{1}{|P|}\right)$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}P}\left(\frac{1}{P}\cdot x\right)=1 \xRightarrow{\text{积分}} \frac{1}{P}x=P+C_1.$$

由初值 $x=1$ 时 $P=1 \Rightarrow C_1=0 \Rightarrow x=P^2, P=\sqrt{x}$.

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{x} \xRightarrow{\text{积分}} y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

由 $y(1)=1 \Rightarrow C=\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}$.

18 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$, $y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是________.

【分析】 这是二阶的可降阶微分方程.

方法 1° 令 $y'=P(y)$(以 y 为自变量),则 $y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$. ①

代入方程得 $yP\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}+P^2=0$,即 $y\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}+P=0\left(\text{或 } P=0\text{,但其不满足初始条件 } y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}\right)$.

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}P}{P}+\frac{\mathrm{d}y}{y}=0$,

积分得 $\ln|P|+\ln|y|=C'$, 即 $P=\frac{C_1}{y}$ ($P=0$ 对应 $C_1=0$);

由 $x=0$ 时 $y=1, P=y'=\frac{1}{2}$,得 $C_1=\frac{1}{2}$. 于是

$$y'=P=\frac{1}{2y}, \quad 2y\mathrm{d}y=\mathrm{d}x \xRightarrow{\text{积分}} y^2=x+C_2.$$

又由 $y\big|_{x=0}=1$ 得 $C_2=1$,所求特解为 $y=\sqrt{x+1}$.

方法 2° 不难看出方程可写成 $(yy')'=0$. 积分便得 $yy'=C_1$. 以下与方法 1° 相同.

【评注】 错误解法:在上面方法 1° 中,令 $y'=P$,则原方程 $yy''+y'^2=0$ 化为

$$y\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=-P^2, \quad ②$$

从而 $$\frac{\mathrm{d}P}{P^2}=-\frac{\mathrm{d}y}{y} \xRightarrow{\text{积分}} -\frac{1}{P}=-\ln y+C_1.$$

以 $x=0$ 时 $y=1, P=y'=\frac{1}{2}$ 代入,得 $-2=0+C_1$. 所以有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\ln y+2 \xRightarrow{\text{积分}} x=\int \ln y\mathrm{d}y+2y+C_2=y\ln y+y+C_2,$$

定出 $C_2=-1$. 最后得 $x=y\ln y+y-1$.

错在哪里呢?错在 ② 这一步. 该式中的 P' 是由 y'' 而来,所以其中的 P' 是 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$ 而不是 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$. 请对照 ① 这一步,这是一种典型的错误.

此题还有一种错误解法是,由 $y^2=x+1$,开方得 $y=\pm\sqrt{x+1}$. 因为初始条件为 $y\big|_{x=0}=1$,这里只能取 $y=+\sqrt{x+1}$,而不能取 $y=-\sqrt{x+1}$.

19 在下列微分方程中,以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$($C_1, C_2, C_3$ 为任意常数)为通解的是

(A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$.　　(B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$.

(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$.　　(D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.

【分析】 从通解的结构知，三阶线性常系数齐次方程相应的三个特征根是：1，$\pm 2i$（$i = \sqrt{-1}$），对应的特征方程是

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0,$$

因此所求的微分方程是 $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$．选(D)．

20 3 阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y =$ ________.

【分析】 特征方程为

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \text{即} \quad (\lambda^2 + 1)(\lambda - 2) = 0,$$

于是得特征根为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i \quad (i = \sqrt{-1})$．

因此，通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$，其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数．

21 微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}(\lambda > 0)$ 的特解形式为

(A) $a(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$.　　(B) $ax(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$.

(C) $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.　　(D) $x^2(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.

【分析】 $y'' - \lambda^2 y = 0$ 的特征方程有单特征根 $\pm\lambda$，于是

$$y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x}, \quad y'' - \lambda^2 y = e^{-\lambda x}$$

分别有特解 $\quad y = axe^{\lambda x}, \quad y = bxe^{-\lambda x}$，

因此原非齐次方程有特解 $y = x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$．选(C)．

22 函数 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + xe^x$ 满足的一个微分方程是

(A) $y'' - y' - 2y = 3xe^x$.　　(B) $y'' - y' - 2y = 3e^x$.

(C) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.　　(D) $y'' + y' - 2y = 3e^x$.

【分析】 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + xe^x$ 是某二阶线性常系数非齐次方程的通解．相应的齐次方程的特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$，特征方程应是 $(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$，于是相应的齐次方程是 $y'' + y' - 2y = 0$．

在(C)与(D)中，方程 $y'' + y' - 2y = 3e^x$ 有形如 $y^* = Axe^x$ 的特解（此处 $e^{\alpha x}$ 中 $\alpha = 1$ 是单特征根）．因此选(D)．

【评注】 可验证 $y^* = xe^x$ 是(D)的特解．

23 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y =$ ________.

【分析】 特征方程 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$ 的根为 $\lambda = 1, \lambda = 3$．

非齐次项 $e^{\alpha x}$，$\alpha = 2$ 不是特征根，非齐次方程有特解 $y^* = Ae^{2x}$．代入方程得

$$(4A - 8A + 3A)e^{2x} = 2e^{2x} \quad \Rightarrow \quad A = -2.$$

因此，通解为 $\quad y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}$.

24 微分方程 $\quad y'' + y = x^2 + 1 + \sin x \quad$ 的特解形式可设为

(A) $y^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$.

(B) $y^* = x(ax^2 + bx + c + A\sin x + B\cos x)$.

(C) $y^* = ax^2 + bx + c + A\sin x$.

(D)$y^* = ax^2 + bx + c + A\cos x$.

【分析】 相应的二阶线性齐次方程的特征方程是 $\lambda^2 + 1 = 0$,特征根为 $\lambda = \pm \mathrm{i}$.

由线性方程解的迭加原理,分别考察方程

$$y'' + y = x^2 + 1, \quad ①$$

与 $$y'' + y = \sin x. \quad ②$$

方程①有特解 $y^* = ax^2 + bx + c$,方程②的非齐次项 $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x = \sin x(\alpha = 0, \beta = 1, \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ 是特征根),它有特解 $y^* = x(A\sin x + B\cos x)$.

因此原方程有特解 $y^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$.应选(A).

25 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^x$,则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $y =$ ________.

【分析】 由通解表达式 $\Rightarrow$ 该二阶线性常系数齐次方程的特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$,于是特征方程为 $$(\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$\Rightarrow$ 该齐次方程为 $y'' - 2y' + y = 0$ (即 $a = -2, b = 1$).

又非齐次方程 $$y'' - 2y' + y = x \quad (*)$$

有特解 $y^* = \alpha x + \beta$,代入(*)式得

$$-2\alpha + \alpha x + \beta = x \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1, \beta = 2.$$

因此(*)有通解 $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^x + x + 2$.

再由初条件 $y(0) = C_1 + 2 = 2, y'(0) = C_1 + C_2 + 1 = 0$,

$\Rightarrow C_1 = 0, C_2 = -1$.因此所求的解为 $y = -x\mathrm{e}^x + x + 2$.

26 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2x\mathrm{e}^x$ 的通解.

【分析与求解】 这是求二阶线性常系数非齐次方程的通解.

1° 由相应的特征方程 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$,得特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow$ 相应齐次方程的通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

2° 非齐次项 $f(x) = 2x\mathrm{e}^{\alpha x}, \alpha = 1$ 是单特征根,故设原方程的特解

$$y^* = x(ax + b)\mathrm{e}^x.$$

代入原方程得

$$ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b - 3[ax^2 + (2a + b)x + b] + 2(ax^2 + bx) = 2x,$$

即 $$-2ax + 2a - b = 2x$$

$\Rightarrow$ $$a = -1, b = -2.$$

3° 原方程的通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} - x(x + 2)\mathrm{e}^x,\text{其中 } C_1, C_2 \text{ 为两个任意常数}.$$

27 欧拉方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 4x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0(x > 0)$ 的通解为________.

【分析】 求解欧拉方程的方法是:作自变量替换 $x = \mathrm{e}^t(t = \ln x)$,将它化成常系数的情形:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + (4 - 1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = 0,\text{即} \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = 0.$$

相应的特征方程 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$,特征根 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$,通解为 $y = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-2t}$.

因此,所求原方程的通解为 $y = \dfrac{C_1}{x} + \dfrac{C_2}{x^2}$,其中 C_1, C_2 为任意常数.

28 用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$,并求其满足 $y\big|_{x=0}=1,y'\big|_{x=0}=2$ 的特解.

【分析与求解】 建立 y 对 t 的导数与 y 对 x 的导数之间的关系.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}(-\sin t)\ ,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\sin^2t-\frac{dy}{dx}\cos t=(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}.$$

于是原方程化为 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=0$. 其通解为 $y=C_1\cos t+C_2\sin t$.

回到 x 为自变量得 $y=C_1x+C_2\sqrt{1-x^2}$.

由 $y(0)=C_2=1\Rightarrow C_2=1$. 由 $y'(0)=C_1+\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\Bigg|_{x=0}=2\Rightarrow C_1=2$.

因此特解为 $y=2x+\sqrt{1-x^2}$.

【评注】 这是二阶线性变系数方程.一般情形的求解是困难的.这里给出了自变量替换后就可化成常系数的情形,并可求得通解.

29 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=1$,且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,dt=0,$$

(1) 求导数 $f'(x)$;(2) 证明:当 $x\geqslant0$ 时,成立不等式 $e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant1$.

【求解与证明】 (1) 首先对恒等式变形后两边求导以便消去积分:

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\,dt=0,$$

$$(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0.$$

在原方程中令变限 $x=0$ 得 $f'(0)+f(0)=0$. 由 $f(0)=1$,得 $f'(0)=-1$.

现降阶:令 $u=f'(x)$,则有 $u'+\dfrac{x+2}{x+1}u=0$,解此一阶线性方程得

$$f'(x)=u=C\frac{e^{-x}}{x+1}.$$

由 $f'(0)=-1$ 得 $C=-1$. 于是 $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x+1}$.

(2) **方法 1°** 用单调性.

由 $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x+1}<0(x\geqslant0)$, $f(x)$ 单调减, $f(x)\leqslant f(0)=1(x\geqslant0)$;

又设 $\varphi(x)=f(x)-e^{-x}$,则 $\varphi'(x)=f'(x)+e^{-x}=\dfrac{x}{x+1}e^{-x}\geqslant0(x\geqslant0)$, $\varphi(x)$ 单调增,因而 $\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0\quad(x\geqslant0)$,即 $f(x)\geqslant e^{-x}(x\geqslant0)$.

综上所述,当 $x\geqslant0$ 时, $e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant1$.

方法 2° 用积分比较定理.由牛顿 - 莱布尼兹公式,有

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,dt,\quad f(x)=1-\int_0^x\frac{e^{-t}}{t+1}dt.$$

由于 $0\leqslant\dfrac{e^{-t}}{t+1}\leqslant e^{-t}(t\geqslant0)$,有

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt \leqslant \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x} (x \geqslant 0).$$

从而有 $\qquad e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 1.$

30 设函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f'(x) = g(x), g'(x) = 2e^x - f(x)$，且 $f(0) = 0, g(0) = 2$，求 $\displaystyle\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx.$

【解】 先求 $f(x), g(x)$：把 $f'(x) = g(x)$ 两边求导得 $f''(x) = g'(x)$，再以 $g'(x) = 2e^x - f(x)$ 代入则消去 $g(x), g'(x)$ 得到 $f(x)$ 的微分方程的初值问题

$$\begin{cases} f''(x) + f(x) = 2e^x, \\ f(0) = 0, f'(0) = g(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \sin x - \cos x + e^x.$$

求积分：

$$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx = \int_0^{\pi}\frac{1}{1+x}df(x) + \int_0^{\pi}f(x)d\left(\frac{1}{1+x}\right) = \int_0^{\pi}d\left[\frac{f(x)}{1+x}\right]$$

$$= \frac{f(x)}{1+x}\bigg|_0^{\pi} = \frac{f(\pi)}{1+\pi} - \frac{f(0)}{1+0} = \frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}.$$

【评注】 计算积分时不必把 $f(x), g(x)$ 的表达式代入，而是利用 $f(x), g(x)$ 之间的关系及凑微分法，这是简化计算的关键.

31 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = \int_0^{t^2}\ln(1+u)du \end{cases}$ 确定，其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0, \\ x\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 的解. 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【分析与求解】 先求出 $x(t)$，它是可分离变量的一阶微分方程的解. 分离变量得

$$e^x dx = 2tdt \xrightarrow{\text{积分}} e^x = t^2 + C.$$

由初条件得 $\quad C = 1$. 于是 $\quad e^x = t^2 + 1$， 即 $x = \ln(t^2 + 1)$.

下求 $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{2t\ln(1+t^2)}{2te^{-x}} = e^x\ln(1+t^2) = xe^x,$

最后求 $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = (x+1)e^x.$

32 设 $y = y(x)$ 是区间 $(-\pi, \pi)$ 内过点 $\left(-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}, \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ 的光滑曲线. 当 $-\pi < x < 0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点；当 $0 \leqslant x < \pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y'' + y + x = 0$. 求函数 $y(x)$ 的表达式.

【分析与求解】 当 $-\pi < x < 0$ 时，曲线 $y = y(x)$ 上 $\forall$ 点 (x,y) 处的法线方程是

$$Y - y(x) = -\frac{1}{y'(x)}(X - x),$$

其中 (X,Y) 是法线上点的坐标. 由于法线均过原点，故 $(X,Y) = (0,0)$ 满足方程，得

$$-y(x) = \frac{x}{y'(x)}, \text{即 } ydy + xdx = 0, d(x^2 + y^2) = 0.$$

解得 $\qquad x^2+y^2=C.$

由初条件 $x=-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}},y=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$,得 $C=\pi^2$. 因此得

$y=\sqrt{\pi^2-x^2}\quad(-\pi<x\leqslant 0)$,(由连续性在 $x=0$ 处也成立,另一支不合题意).

当 $0\leqslant x<\pi$ 时,$y=y(x)$ 满足

$$y''+y=-x.$$

相应齐次方程的特征方程与 $\lambda^2+1=0$,特征根 $\lambda=\pm i(i=\sqrt{-1})$,非齐次方程有特解 $y^*=-x$,因此该方程的通解是

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-x.$$

由曲线的光滑性(即函数连续且可导)得初值

$$y\Big|_{x=0}=\sqrt{\pi^2-x^2}\Big|_{x=0}=\pi,\quad y'\Big|_{x=0}=(\sqrt{\pi^2-x^2})'\Big|_{x=0}=0,$$

由此定出 $\qquad C_1=\pi,C_2=1.$

因此得 $\qquad y=\pi\cos x+\sin x-x.$

最后得 $\qquad y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0,\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

33 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2,\\ y=\psi(t)\end{cases}(t>-1)$ 所确定,其中 $\psi(t)$ 具有2阶导数,且 $\psi(1)=\dfrac{5}{2},\psi'(1)=6$,已知 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$,求函数 $\psi(t)$.

【分析与求解】 用参数求导法求出 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 的表达式,再由已知条件导出 $\psi(t)$ 的二阶微分方程的初值问题,最后解出 $\psi(t)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{2(t+1)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\psi'(t)}{t+1}\right]'_t\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\frac{(t+1)\psi''(t)-\psi'(t)}{(t+1)^2}\cdot\frac{1}{2(t+1)}$$
$$=\frac{1}{4}\frac{(t+1)\psi''(t)-\psi'(t)}{(t+1)^3}.$$

由已知条件 $\Rightarrow$

$$\frac{1}{4}\frac{(t+1)\psi''(t)-\psi'(t)}{(t+1)^3}=\frac{3}{4}\frac{1}{1+t},$$

即 $\qquad (t+1)\psi''(t)-\psi'(t)=3(t+1)^2,$

又 $\qquad \psi(1)=\dfrac{5}{2},\quad \psi'(1)=6.$

这是可降阶类型的二阶微分方程的初值问题. 令 $P=\psi'(t)$,得

$$(t+1)P'-P=3(t+1)^2,\text{即}\quad P'-\frac{1}{t+1}P=3(t+1).$$

两边乘 $\mu(t)=e^{-\int\frac{dt}{t+1}}\xlongequal{\text{取}}\dfrac{1}{t+1}$ 得 $\left(\dfrac{1}{t+1}P\right)'=3$. 两边积分,并用 $P(1)=6$ 得

$$\frac{1}{t+1}P = 3t, \text{即 } \psi'(t) = 3t(t+1).$$

再积分,并用 $\psi(1) = \frac{5}{2}$ 得 $\psi(t) = t^3 + \frac{3}{2}t^2$.

34 设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数,且满足

$$f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t)\,dt + x^2,$$

求 $f(x)$ 的表达式.

【解】 因为函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数,且满足 $f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t)\,dt + x^2$,令 $x = 0$ 有 $f(0) = 0$. 又因为

$$f(x) = x^2\int_0^x f'(t)\,dt - \int_0^x t^2 f'(t)\,dt + x^2,$$

所以

$$f(x) = x^2 f(t)\Big|_0^x - t^2 f(t)\Big|_0^x + 2\int_0^x tf(t)\,dt + x^2$$

$$= x^2 f(x) - x^2 f(x) + 2\int_0^x tf(t)\,dt + x^2,$$

即有

$$f(x) = x^2 + 2\int_0^x tf(t)\,dt.$$

上式两边对 x 求导有:$f'(x) = 2x + 2xf(x)$,即 $\begin{cases} f'(x) - 2xf(x) = 2x, \\ f(0) = 0. \end{cases}$

解得
$$f(x) = e^{\int 2x dx}\left(\int 2xe^{-\int 2x dx}dx + C\right) = e^{x^2}(-e^{-x^2} + C).$$

由 $f(0) = 0$,可知 $C = 1$,所以 $f(x) = e^{x^2}(1 - e^{-x^2}) = e^{x^2} - 1$.

【评注】 本题是涉及变上限积分函数求导及求解一阶线性微分方程的综合题.

35 设位于第一象限的曲线 $y = f(x)$ 过点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,其上任一点 $P(x,y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q,且线段 PQ 被 x 轴平分.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 的方程;

(2) 已知曲线 $y = \sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为 l,试用 l 表示曲线 $y = f(x)$ 的弧长 s.

【解】 (1) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

其中 (X,Y) 为法线上任意点的坐标. 令 $X = 0$,则 $Y = y + \frac{x}{y'}$,点 Q 坐标为 $\left(0, y + \frac{x}{y'}\right)$. 线段 $\overline{PQ}$ 的中点是 $\left(\frac{1}{2}x, y + \frac{1}{2}\frac{x}{y'}\right)$. 由题设知 $2y + \frac{x}{y'} = 0$,即 $2y\,dy + x\,dx = 0$.

积分得 $x^2 + 2y^2 = C$. 由 $y\big|_{x=\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2}$ 得 $C = 1$. 于是曲线 $y = f(x)$ 的方程为

$$x^2 + 2y^2 = 1.$$

(2) 曲线 $y = \sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为 $l = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$.

而由曲线 $y = f(x)$ 的参数方程 $\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta, \end{cases}$ 它在第一象限部分的弧长为

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{\theta = \frac{\pi}{2} - t} \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 t}\mathrm{d}t.$$

由此，　$\sqrt{2}s = \dfrac{l}{2}$，即　$s = \dfrac{\sqrt{2}}{4}l$.

36 设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数，且 $f(0) = 1$. 对任意的 $t \in [0, +\infty)$，直线 $x = 0$，$x = t$，曲线 $y = f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体，若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍，求函数 $f(x)$ 的表达式.

【分析与求解】 记 $f(x)$ 为 $y(x)$.

1）列方程. 由旋转体的侧面积公式与体积公式按题意得

$$2\pi\int_0^t y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^t y^2(x)\mathrm{d}x.$$

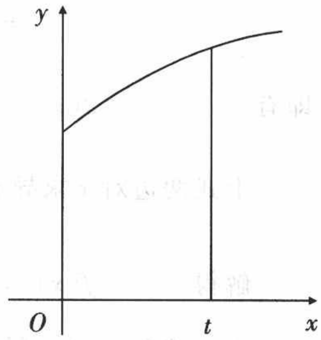
2）转化为微分方程.

上述方程中，令 $t = 0$，等式自然成立. 现两边对 t 求导得

$$y(t)\sqrt{1 + y'^2(t)} = y^2(t).$$

它与原问题等价，又可转化成

$y'(t) = \sqrt{y^2(t) - 1}$（因 $y(t)$ 是单调增函数，$y'(t) \geqslant 0$）.



第 36 题图

3）求解微分方程的初值问题.

将 t 改为 x，又题中要求 $y(0) = 1$，归结为求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{y^2 - 1}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

分离变量得　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - 1}} = \mathrm{d}x$. 积分并由初值得

$$\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = x, \quad y + \sqrt{y^2 - 1} = \mathrm{e}^x,$$

又可改写成　$\ln\dfrac{1}{y - \sqrt{y^2 - 1}} = x, \quad y - \sqrt{y^2 - 1} = \mathrm{e}^{-x}$.

因此　$y = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$.

37 设非负函数 $y = y(x)(x \geqslant 0)$ 满足微分方程 $xy'' - y' + 2 = 0$. 当曲线 $y = y(x)$ 过原点时，其与直线 $x = 1$ 及 $y = 0$ 围成的平面区域 D 的面积为 2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

【分析与求解】 $y = y(x) \geqslant 0(x \geqslant 0)$ 满足

$$xy'' - y' + 2 = 0,$$

这是可降阶的微分方程. 令 $P = y'$，方程化为

$$P' - \frac{1}{x}P = -\frac{2}{x},$$

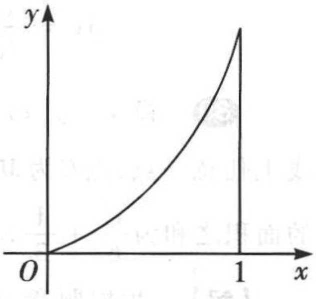
这是一阶线性微分方程. 两边乘 $e^{-\int\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$ 得

$$\left(\frac{1}{x}P\right)' = -\frac{2}{x^2},$$

积分得 $\quad \frac{1}{x}P = \frac{2}{x} + C_1', P = 2 + C_1'x,$

即 $\quad y' = 2 + C_1'x.$

再积分得 $\quad y = 2x + C_1x^2 + C_2.$



第 37 题图

由 $y = y(x)$ 过原点,可得 $C_2 = 0$. 于是 $y = C_1x^2 + 2x$.

又由 $y = y(x)$ 与直线 $x = 1$ 及 $y = 0$ 围成平面区域 D 的面积

$$\int_0^1 y(x)\,dx = \int_0^1 (C_1x^2 + 2x)\,dx = \left(\frac{1}{3}C_1x^3 + x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}C_1 + 1 = 2$$

$\Rightarrow C_1 = 3$. 因此求得 $y = 3x^2 + 2x \ (x \geqslant 0)$.

于是 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V = 2\pi\int_0^1 x(3x^2 + 2x)\,dx = 2\pi\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) = \frac{17}{6}\pi.$$

38 设曲线 $y = f(x)$,其中 $f(x)$ 是可导函数,且 $f(x) > 0$. 已知曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 0, x = 1$ 及 $x = t(t > 1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍,求该曲线的方程.

【解】 由曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 0, x = 1$ 及 $x = t(t > 1)$ 所围成的曲边梯形的面积值是 $\int_1^t f(x)\,dx$,该曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积值是 $\pi\int_1^t f^2(x)\,dx$. 按照题设,当 $t > 1$ 时有

$$\pi\int_1^t f^2(t)\,dx = \pi t\int_1^t f(x)\,dx \iff \int_1^t f^2(x)\,dx = t\int_1^t f(x)\,dx.$$

两边对 t 求导数得

$$f^2(t) = \int_1^t f(x)\,dx + tf(t). \qquad (*)$$

在 $(*)$ 式中令 $t = 1$ 得 $f^2(1) = f(1)$,因 $f(1) > 0$,故 $f(1) = 1$. 将 $(*)$ 式两边对 t 再求导即得

$$2f(t)f'(t) = 2f(t) + tf'(t),$$

把 t 换为 x,把 $f(t)$ 换为 y,即得 $y = f(x)$ 是如下一阶微分方程初值问题的特解:

$$\begin{cases} (2y - x)\dfrac{dy}{dx} = 2y, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

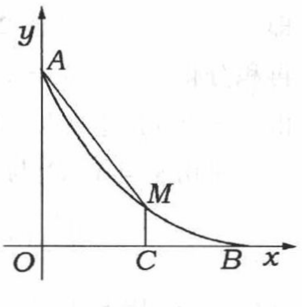
该方程可改写成 $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{2y} = 1$,其通解为

$$x = Ce^{-\int\frac{1}{2y}dy} + e^{-\int\frac{1}{2y}dy}\int e^{\int\frac{1}{2y}dy}\,dy = \frac{C}{\sqrt{y}} + \frac{2}{3}y.$$

利用当 $x = 1$ 时 $y = 1$ 可确定常数 $C = \frac{1}{3}$,从而所求曲线方程为

$$3x = \frac{1}{\sqrt{y}} + 2y.$$

39 设 $y = f(x)$ 是第一象限内连接点 $A(0,1)$，$B(1,0)$ 的一段连续曲线，$M(x,y)$ 为该曲线上任意一点，点 C 为 M 在 x 轴上的投影，O 为坐标原点，若梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为 $\frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}$，求 $f(x)$ 的表达式.



第 39 题图

【解】 根据题意，有 $f(0) = 1$，$f(1) = 0$，且

$$\frac{x}{2}[1 + f(x)] + \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3},$$

将上式两边对 x 求导数，得

$$\frac{1}{2}[1 + f(x)] + \frac{x}{2}f'(x) - f(x) = \frac{x^2}{2}.$$

当 $0 < x \leqslant 1$ 时，可化为一阶线性微分方程

$$f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = x - \frac{1}{x}.$$

方程两边同除 x，即得 $\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = 1 - \frac{1}{x^2}$，积分可得

$$\frac{f(x)}{x} = x + \frac{1}{x} + C.$$

于是，方程的通解为 $f(x) = x^2 + 1 + Cx$.

把 $f(1) = 0$ 代入通解，可确定常数 $C = -2$，故所求函数 $f(x)$ 的表达式为

$$f(x) = x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

40 某飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700km/h．经测试，减速伞打开后，飞机所受的阻力与飞机的速度成正比（比例系数 $k = 6.0 \times 10^6$）．问从着陆点算起，飞机滑行的最大距离是多少？（注：kg 表示千克，km/h 表示千米／小时．）

【分析】 从飞机接触跑道开始时（$t = 0$），设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$，速度为 $v(t) = x'(t)$．按题设，飞机的质量 $m = 9000\text{kg}$，着陆时的水平速度 $v(0) = x'(0) = v_0 = 700\text{km/h}$，$t$ 时刻所受的阻力为 $-kv(t)$，于是按牛顿第二定律得 $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv$，初始条件 $v(0) = v_0$.

【解法一】 求出初值问题的解 $v = v(t)$，然后再求 $\int_0^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}t$.

容易求得一阶线性齐次方程的初值问题 $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}v, \\ v(0) = v_0 \end{cases}$ 的解为 $v(t) = v_0 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$.

飞机滑行的最长距离为 $x = \int_0^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{mv_0}{k}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{mv_0}{k} = 1.05(\text{km})$.

【解法二】 求出 $x = x(v)$，再求 $x\big|_{v=0}$.

由于 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}}$，微分方程可改写成 $m\frac{v}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}} = -kv$， 即 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} = -\frac{m}{k}$，

相应的初值 $x\big|_{v=v_0}=0$，易求得此初值问题的解为 $x=-\dfrac{m}{k}(v-v_0)$．

令 $v=0$ 得飞机滑行的最长距离为 $x=\dfrac{mv_0}{k}=1.05(\mathrm{km})$．

【解法三】 先求 $x=x(t)$，然后再求 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)$.

注意 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，原方程改写成 $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$，

其特征方程 $\lambda^2+\dfrac{k}{m}\lambda=0$，特征根 $\lambda_1=0,\lambda_2==-\dfrac{k}{m}$，于是通解为 $x=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$.

由初条件 $x\big|_{t=0}=0,\quad x'(t)\big|_{t=0}=v_0\ \Rightarrow\ C_1=-C_2=\dfrac{mv_0}{k}$．

于是 $x(t)=\dfrac{mv_0}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right),\quad \lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\dfrac{mv_0}{k}=1.05(\mathrm{km})$．

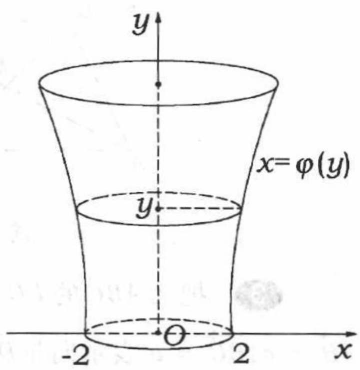
这就是飞机滑行的最长距离．

41 有一平底容器，其内侧壁是由曲线 $x=\varphi(y)\,(y\geqslant0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面（如图），容器的底面圆的半径为2m．根据设计要求，当以 $3\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的速率向容器内注入液体时，液面的面积将以 $\pi\mathrm{m}^2/\mathrm{min}$ 的速率均匀扩大（假设注入液体前，容器内无液体）．

（1）根据 t 时刻液面的面积，写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式；

（2）求曲线 $x=\varphi(y)$ 的方程．

（注：m 表示长度单位米，min 表示时间单位分．）



第 41 题图

【解】（1）设在时刻 t 液面的高度为 y，则由题设知此时液面的面积为 $\pi\varphi^2(y)=4\pi+\pi t$，从而 $t=\varphi^2(y)-4$．

（2）**方法1°** 由液面高度为 y 时，液体的体积为 $\pi\int_0^y\varphi^2(u)\,\mathrm{d}u=3t$，得 $\varphi(y)$ 满足的方程式

$$\pi\int_0^y\varphi^2(u)\,\mathrm{d}u=3[\varphi^2(y)-4].$$

恒等式两边对 y 求导，得

$$\pi\varphi^2(y)=6\varphi(y)\varphi'(y),\quad 即\quad \varphi'(y)=\frac{\pi}{6}\varphi(y).$$

解此微分方程，得 $\varphi(y)=C\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}y}$．

又由 $\varphi(0)=2$ 得 $C=2$．故所求曲线方程为 $x=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}y}$．

方法2° 用微元法讨论这个问题．任取 $[t,t+\Delta t]$ 小区间及相应的容器中液体薄片 $[y,y+\Delta y]$．

从 t 到 $t+\Delta t$：液体体积的增加量 = 注入容器的液体体积．

由此得 $\pi\varphi^2(y)\Delta y\approx3\Delta t$．两边除 Δt，令 $\Delta t\to0$ 得 $\pi\varphi^2(y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3$．

由题(1)得 $1=2\varphi(y)\varphi'(y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，解出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，代入上式得 $\varphi'(y)=\dfrac{\pi}{6}\varphi(y)$．下同方法1°．

第八章　向量代数与空间解析几何

习题8－1　向量及其线性运算

1 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

【解】 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

2 如果平面上一个四边形的对角线互相平分,试用向量证明它是平行四边形.

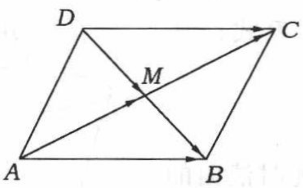
【证】 设四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 交于 M 点(如图所示).依题意有

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$.

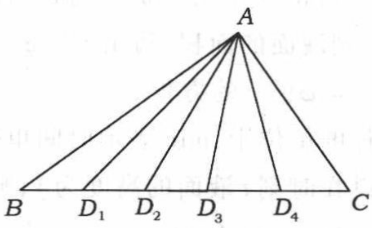
因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DC}$,

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BC}$.

所以 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



第 2 题图



第 3 题图

3 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分,设分点依次为 D_1,D_2,D_3,D_4,再将各分点与 A 点连接.试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$,$\overrightarrow{D_2A}$,$\overrightarrow{D_3A}$,$\overrightarrow{D_4A}$.

【解】 $-\left(\boldsymbol{c}+\dfrac{1}{5}\boldsymbol{a}\right)$; $-\left(\boldsymbol{c}+\dfrac{2}{5}\boldsymbol{a}\right)$; $-\left(\boldsymbol{c}+\dfrac{3}{5}\boldsymbol{a}\right)$; $-\left(\boldsymbol{c}+\dfrac{4}{5}\boldsymbol{a}\right)$.

4 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$.试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

【解】 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,-1-1,0-2)=(1,-2,-2)$.

$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4)$.

5 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=\{6,7,-6\}$ 的单位向量.

【解】 因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$,所以平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^\circ=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{11}=\pm\left\{\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11}\right\}.$$

6 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?

$A(1,-2,3)$;$B(2,3,-4)$;$C(2,-3,-4)$;$D(-2,-3,1)$.

【解】 点 A 在第 Ⅳ 卦限;点 B 在第 Ⅴ 卦限;点 C 在第 Ⅷ 卦限;点 D 在第 Ⅲ 卦限.

7 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征?指出下列各点的位置:

$A(3,4,0)$;$B(0,4,3)$;$C(3,0,0)$;$D(0,-1,0)$.

【解】 坐标面上的点的坐标之特征是:三个坐标中至少有一个坐标必须是零.例如,若点 D 在 yOz 面上,则必须 $x=0$;同样,在 zOx 面上的点,则 $y=0$;在 xOy 面上的点,则 $z=0$.

在坐标轴上的点的坐标之特征是:三个坐标中至少有两个坐标必须是零.例如,若点 P 在 x 轴上,则 $y=z=0$;同样,在 y 轴上的点,则 $z=x=0$;在 z 轴上的点,则 $x=y=0$.

点 A 在 xOy 面上;点 B 在 yOz 面上;点 C 在 x 轴上;点 D 在 y 轴上.

8 求点 (a,b,c) 关于(1) 各坐标面;(2) 各坐标轴;(3) 坐标原点的对称点的坐标.

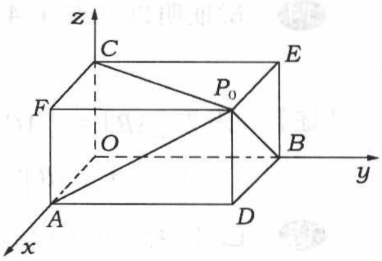
【解】 (1) 点 (a,b,c) 关于 xOy 面的对称点为 $(a,b,-c)$;关于 yOz 面的对称点是 $(-a,b,c)$;关于 zOx 面的对称点为 $(a,-b,c)$.

(2) 点 (a,b,c) 关于 x 轴的对称点是 $(a,-b,-c,)$;关于 y 轴的对称点是 $(-a,b,-c)$;关于 z 轴的对称点是 $(-a,-b,c)$.

(3) 点 (a,b,c) 关于坐标原点的对称点是 $(-a,-b,-c)$.

9 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,并写出各垂足的坐标.

【解】 按作图规则作出空间直角坐标系及点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$(如图所示).



第 9 题图

过点 P_0 作三个分别垂直于三个坐标轴的平面,这三个平面及三个坐标面围成一个以原点 O 与 P_0 点为对角线的长方体,记这个长方体的其余顶点分别为 A,B,C,D,E,F(如图所示),并连接线段 P_0A,P_0B,P_0C.

根据以上所作图形可知:

$P_0D\perp xOy$ 面,垂足 D 的坐标为 $(x_0,y_0,0)$; $P_0E\perp yOz$ 面,垂足 E 的坐标为 $(0,y_0,z_0)$;

$P_0F\perp zOx$ 面,垂足 F 的坐标为 $(x_0,0,z_0)$; $P_0A\perp x$ 轴,垂足 A 的坐标为 $(x_0,0,0)$;

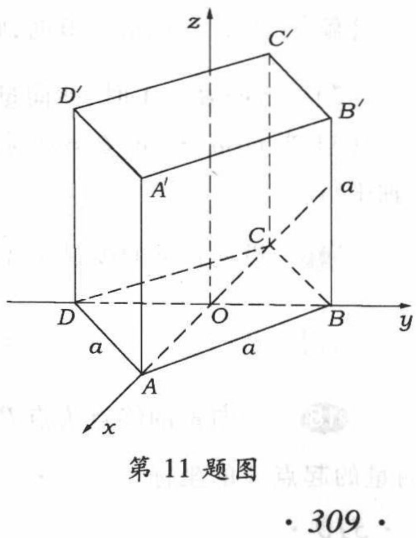
$P_0B\perp y$ 轴,垂足 B 的坐标为 $(0,y_0,0)$; $P_0C\perp z$ 轴,垂足 C 的坐标为 $(0,0,z_0)$.

10 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点的坐标有何特点?

【解】 (1) 过点 P_0 且平行于 z 轴的直线上的点有相同的横坐标 x_0 与相同的纵坐标 y_0.

(2) 过点 P_0 且平行于 xOy 面的平面上的点,它们有相同的竖坐标 z_0.

11 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 x 轴和 y 轴上,求它各顶点的坐标.



第 11 题图

【解】 所给各顶点的坐标为

A 点的坐标是 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$;$B$ 点的坐标是 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$;$C$ 点的坐标是 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$;$D$ 点的坐标是 $\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$;$A'$ 点的坐标是 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$;$B'$ 点的坐标是 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$;$C'$ 点的坐标是

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$；$D'$ 点的坐标是 $\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$.

12 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

【解】 M 点在 x 轴的垂足为 $(4,0,0)$，因此 M 点到 x 轴的距离为

$$d_1=\sqrt{0^2+3^2+5^2}=\sqrt{34}.$$

类似可求 M 点到 y 轴的距离为 $\sqrt{41}$，M 点到 z 轴的距离为 5.

13 在 yOz 面上，求与三个已知点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$ 等距离的点.

【解】 设点 $P(0,y,z)$ 与三个已知点 A,B,C 等距离，则有 $|PA|^2=|PB|^2=|PC|^2$，且

$$|PA|^2=9+(y-1)^2+(z-2)^2;\quad |PB|^2=16+(y+2)^2+(z+2)^2;$$

$$|PC|^2=(y-5)^2+(z-1)^2.$$

于是 $\begin{cases}3y+4z+5=0,\\4y-z-6=0,\end{cases}\Rightarrow\ y=1,z=-2$. 故所求点的坐标为 $(0,1,-2)$.

14 试证明以三点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

【证】 因为 $|AB|=|AC|=7$，且有

$|AC|^2+|AB|^2=49+49=98=|BC|^2$. 故该三角形为等腰直角三角形.

15 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

【解】 因为 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1,-\sqrt{2},1\}$，所以模为

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2;$$

方向余弦为 $\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\gamma=\frac{1}{2}$;

方向角为 $\alpha=\frac{2}{3}\pi,\ \beta=\frac{3}{4}\pi,\ \gamma=\frac{\pi}{3}$.

16 设向量的方向余弦分别满足：(1) $\cos\alpha=0$；(2) $\cos\beta=1$；(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$. 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

【解】 (1) 当 $\cos\alpha=0$ 时，此向量与 x 轴的夹角为 $\frac{\pi}{2}$，即此向量与 x 轴垂直，或平行于 yOz 面.

(2) 当 $\cos\beta=1$ 时，此向量与 y 轴的夹角为 0，即此向量与 y 轴同向，或垂直于 zOx 面.

(3) 当 $\cos\alpha=\cos\beta=0$ 时，此向量既垂直于 x 轴，又垂直于 y 轴，即向量垂直于 xOy 面或与 z 轴平行.

17 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与 u 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影.

【解】 $Prj_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2.$

18 一向量的终点为点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影依次为 4，-4 和 7，求这向量的起点 A 的坐标.

【解】 设此向量的起点 A 的坐标为 (x_1,y_1,z_1)，则 $\overrightarrow{AB}=\{4,-4,7\}=\{2-x_1,-1-y_1,7-z_1\}$，解之得 $x_1=-2,y_1=3,z_1=0$.

19 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

【解】 $\boldsymbol{a}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$.

所以 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 13，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

习题 8－2 数量积 向量积 混合积

1 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$；(3) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

【解】 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3,-1,-2)\cdot(1,2,-1)=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3$，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=(5,1,7).$$

(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}=-6(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=-6\times3=-18$，

$\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(5,1,7)=(10,2,14)$.

$$(3)\ \cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\ \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

2 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

【解】 $0=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=1+\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}$，类似地有 $0=1+\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}$，$0=1+\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}$. 将三式相加，可解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-\dfrac{3}{2}$.

3 已知点 $M_1(1,-1,2)$，$M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$，求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

【解】 设所求单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，因

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,4,-1\},\quad \overrightarrow{M_2M_3}=\{0,-2,2\},$$

再由 $\boldsymbol{a}^\circ\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0$，$\boldsymbol{a}^\circ\cdot\overrightarrow{M_2M_3}=0$ 知

$$\begin{cases}2\cos\alpha+4\cos\beta-\cos\gamma=0,\\-2\cos\beta+2\cos\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\ \cos\beta=\cos\gamma,\cos\alpha=-\frac{3}{2}\cos\gamma.$$

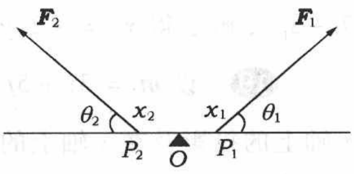
但 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\Rightarrow\dfrac{17}{4}\cos^2\gamma=1\Rightarrow\cos\gamma=\pm\dfrac{2}{\sqrt{17}}$，$\boldsymbol{a}^\circ=\pm\dfrac{1}{\sqrt{17}}\{-3,2,2\}$.

4 设质量为 100kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$. 计算重力所做的功(长度单位为米，重力方向为 z 轴负方向).

【解】 依题意有 $\boldsymbol{f}=\{0,0,-100\times9.8\}$，$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{-2,3,-6\}$，

故　$W = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s} = \{0,0,-980\}\cdot\{-2,3-6\} = 5880(\mathrm{J})$.

❺ 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处，有一与$\overrightarrow{OP_1}$成角 θ_1 的力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用着；在点 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处，有一与$\overrightarrow{OP_2}$成角 θ_2 的力 $\boldsymbol{F}_2$ 作用着（如图所示）. 问当 $\theta_1,\theta_2,x_1,x_2,|\boldsymbol{F}_1|,|\boldsymbol{F}_2|$符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡？



第 5 题图

【解】 如图，已知有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和为零，又由对力矩正负符号的规定可得杠杆保持平衡的条件为

$$|\boldsymbol{F}|\cdot x_1\cdot\sin\theta_1 - |\boldsymbol{F}_2|x_2\cdot\sin\theta_2 = 0,\text{即}\quad |\boldsymbol{F}_1|x_1\sin\theta_1 = |\boldsymbol{F}_2|x_2\sin\theta_2.$$

❻ 求向量 $\boldsymbol{a} = (4,-3,4)$ 在向量 $\boldsymbol{b} = (2,2,1)$ 上的投影.

【解】 $Prj_b\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \dfrac{4\times2-3\times2+4\times1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 2$.

❼ 设 $\boldsymbol{a} = (3,5,-2)$，$\boldsymbol{b} = (2,1,4)$，问 λ 与 μ 有怎样的关系，能使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直？

【解】 向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直，只要与向量 $\boldsymbol{k} = \{0,0,1\}$ 垂直即可，所以 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直的充要条件是

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{k} = \{3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu\}\cdot\{0,0,1\} = 0$$

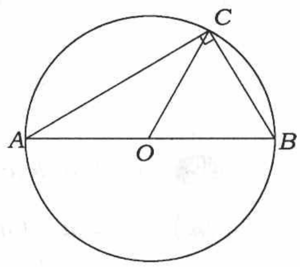
$$\Leftrightarrow\quad -2\lambda+4\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2\mu.$$

❽ 试用向量证明：直径所对的圆周角是直角.

【证】 如图所示，设 AB 是圆 O 的直径，C 点在圆周上，要证 $\angle C = 90°$，只要证明$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ 即可. 因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})\\ &= (\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AO})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO})\\ &= |\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{AO}|^2 = 0,\end{aligned}$$

所以$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，即 $\angle C = 90°$.



第 8 题图

❾ 已知向量 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$；(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

【解】 (1) 因为　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 8$，　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = 8$，所以

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} = 8\boldsymbol{c}-8\boldsymbol{b} = -8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}.$$

(2) 因为　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，

所以　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -4 & 4\\ 2 & -3 & 3\end{vmatrix} = -\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

(3) 因为　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix} = -8\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,

所以　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (-8\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}) = 2$.

❿ 已知$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求 $\triangle OAB$ 的面积.

【解】 因为 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\{-3,-3,1\}$,

所以 $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{19}$.

11 已知 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$,试利用行列式的性质证明:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

【证】 因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$,

所以 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}+c_y\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$,写成行列式形式即为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

利用行列式性质:对换行列式的两行,行列式的值反号,故

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}.$$

同理可证 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$.

故 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

12 试用向量证明不等式:$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$,其中 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3 为任意实数.并指出等号成立的条件.

【证】 设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$.

由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle$ 知,$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos|\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,从而

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2},$$

当 a_1,a_2,a_3 与 b_2,b_2,b_3 成比例,即$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$时,上述等式成立.

习题 8-3 平面及其方程

1 求过点$(3,0,-1)$且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

【解】 设所求平面方程为 $3x-7y+5z+d=0$,将点$(3,0,-1)$代入求得 $d=-4$.
故所求平面方程为 $3x-7y+5z-4=0$.

2 求过点 $M_0(2,9,-6)$ 且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

【解】 因为平面垂直于线段 OM_0，所以向量$\overrightarrow{OM_0}=\{2,9,-6\}$可视为平面的法向量，再由点法式方程即知所求平面的一般方程为 $2x+9y-6z-121=0$.

❸ 过$(1,1,-1)$，$(-2,-2,2)$和$(1,-1,2)$三点的平面方程.

【解】 由 $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -2-1 & -2-1 & 2+1 \\ 1-1 & -1-1 & 2+1 \end{vmatrix}=0$，得 $x-3y-2z=0$，即为所求平面方程.

【注】 设 $M(x,y,z)$ 为平面上任一点，$M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3)$ 为平面上已知点. 由$\overrightarrow{M_1M}\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=0$，即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$ 它就表示过已知三点 $M_i(i=1,2,3)$ 的平面方程.

❹ 指出下列各平面的特殊位置，并画出各平面：

(1)$x=0$；　(2)$3y-1=0$；　(3)$2x-3y-6=0$；

(4)$x-\sqrt{3}y=0$；　(5)$y+z=1$；　(6)$x-2z=0$；

(7)$6x+5y-z=0$.

【解】 (1)$x=0$ 表示 yOz 坐标面(如图(1)).

(2)$3y-1=0$ 表示平行于 xOz 面且在 y 轴上的截距为$\frac{1}{3}$的平面(如图(2)).

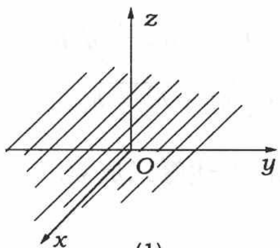
(3)$2x-3y-6=0$ 表示平行于 z 轴且在 x 轴及 y 轴上的截距分别为 $x=3$ 和 $y=-2$ 的平面(如图(3)).

(4)$x-\sqrt{3}y=0$ 表示过 z 轴的平面(如图(4)).

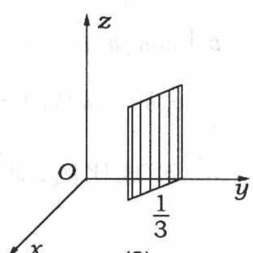
(5)$y+z=1$ 表示平行于 x 轴且在 y,z 两轴上的截距分别为 1 的平面(如图(5)).

(6)$x-2z=0$ 表示过 y 轴的平面(如图(6)).

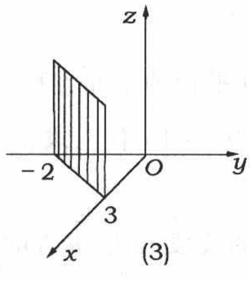
(7)$6x+5y-z=0$ 表示过原点的平面(如图(7)).



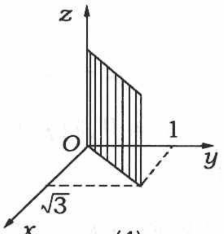
(1)



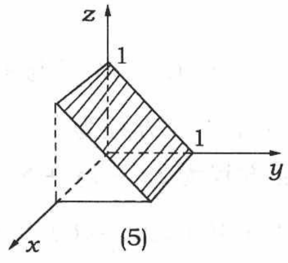
(2)



(3)



(4)



(5)

第 4 题图

5 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

【解】 所给平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=\{2,-2,1\}$,设该平面与 xOy 面,xOz 面,yOz 面的夹角分别为 $\theta_z,\theta_y,\theta_x$. 注意到 xOy 面、xOz 面、yOz 面的法线向量依次为 $\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$,$\boldsymbol{j}=\{0,1,0\}$,$\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$,于是

$$\cos\theta_z=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|2\times0+(-2)\times0+1\times1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{1}{3},$$

$$\cos\theta_y=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|2\times0+(-2)\times1+1\times0|}{3}=\frac{2}{3},$$

$$\cos\theta_x=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|2\times1+(-2)\times0+1\times0|}{3}=\frac{2}{3},$$

即为所给平面依次与 xOy 面,xOz 面和 yOz 面的夹角之余弦.

6 一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$,试求该平面方程.

【解】 因为所求平面平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,所以其法线向量 $\boldsymbol{n}$ 必垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,于是可设

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=\{1,1,-3\}.$$

又因为平面过 $(1,0,-1)$ 点,故所求之平面方程为

$$(x-1)+(y-0)-3(z+1)=0,\text{即}\quad x+y-3z-4=0.$$

7 求三平面 $x+3y+z=1,2x-y-z=0,-x+2y+2z=3$ 的交点.

【解】 联立三平面方程得三元方程组

$$\begin{cases}x+3y+z=1,\\2x-y-z=0,\\-x+2y+2z=3,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x=1,y=-1,z=3.$$

故所求之交点坐标为 $(1,-1,3)$.

8 分别按下列条件求平面方程:

(1) 平行于 xOz 面且经过点 $(2,-5,3)$; (2) 通过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$;

(3) 平行于 x 轴且经过两点 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$.

【解】 (1) 因为所求平面平行于 xOz 面,所以可设平面方程为 $By+D=0$,又因为平面过 $(2,-5,3)$,于是 $D=5B$. 代入方程并化简即知所求平面的方程为 $y+5=0$.

(2) 所求平面过 z 轴,于是可设为 $Ax+By=0$,又由平面过 $(-3,1,-2)$ 点,代入方程有 $B=$

$3A$,从而所求平面方程为 $x+3y=0$.

(3) 因平面平行于 x 轴,可设其为 $By+Cz+D=0$. 又因平面过 $(4,0,-2)$ 与 $(5,1,7)$ 两点,代入上式可得

$$\begin{cases}-2C+D=0,\\ B+7C+D=0,\end{cases}\Rightarrow D=2C,B=-9C.$$

于是有 $-9Cy+Cz+2C=0$. 故所求平面方程为 $-9y+z+2=0$.

9 求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

【解】 $d=\dfrac{|1+2\times2+2\times1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1$.

习题 8-4 空间直线及其方程

1 求过点 $(4,-1,3)$ 且平行于直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{5}$ 的直线方程.

【解】 所求直线与已知直线平行,故所求直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(2,1,5)$,直线方程即为

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}.$$

2 求过两点 $M_1(3,-2,1)$ 和 $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程.

【解】 取所求直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(-1-3,0-(-2),2-1)=(-4,2,1)$,因此所求直线方程为

$$\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

3 用对称式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases}x-y+z=1,\\ 2x+y+z=4.\end{cases}$

【解】 所给直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&1\\2&1&1\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}.$$

另取 $z=1$ 代入直线方程可得 $x=y=1$,于是直线过点 $(1,1,1)$. 因此直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3},$$

且直线的参数方程为 $\begin{cases}x=1-2t,\\ y=1+t,\\ z=1+3t.\end{cases}$

4 求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases}x-2y+4z-7=0,\\ 3x+5y-2z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程.

【解】 直线的方向向量为 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&4\\3&5&-2\end{vmatrix}=-16\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}$.

取平面法向量为$\{-16,14,11\}$,故所求平面方程为 $-16(x-2)+14y+11(z+3)=0$.

5 求直线$\begin{cases}5x-3y+3z-9=0,\\3x-2y+z-1=0\end{cases}$与直线$\begin{cases}2x+2y-z+23=0,\\3x+8y+z-18=0\end{cases}$的夹角的余弦.

【解】 两直线的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{n}_{11}\times\boldsymbol{n}_{12}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\5&-3&3\\3&-2&1\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{n}_{21}\times\boldsymbol{n}_{22}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&-1\\3&8&1\end{vmatrix}=5(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}),$$

所以$\{m_1,n_1,p_1\}=\{3,4,-1\}$,$\{m_2,n_2,p_2\}=\{2,-1,2\}$,设此两直线夹角为$\varphi$,则

$$\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\\&=\frac{|3\times2+4\times(-1)+(-1)\times2|}{\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=0.\end{aligned}$$

6 证明直线$\begin{cases}x+2y-z=7,\\-2x+y+z=7\end{cases}$与直线$\begin{cases}3x+6y-3z=8,\\2x-y-z=0\end{cases}$平行.

【证】 因为两直线的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&-1\\-2&1&1\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&6&-3\\2&-1&-1\end{vmatrix}=-3(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}),$$

所以$\boldsymbol{s}_2=-3\boldsymbol{s}_1$,即$\boldsymbol{s}_1$与$\boldsymbol{s}_2$平行,故两直线平行.

7 求过点$(0,2,4)$且与两平面$x+2z=1$和$y-3z=2$平行的直线方程.

【解】 所求直线平行于两已知平面,且两平面的法向量$\boldsymbol{n}_1$与$\boldsymbol{n}_2$不平行,故所求直线平行于两平面的交线,于是直线的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&2\\0&1&-3\end{vmatrix}=\{-2,3,1\}.$$

又因直线过$(0,2,4)$点,故所求直线的对称式方程为 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$.

8 求过点$(3,1,-2)$且通过直线$\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$的平面方程.

【解】 因为点$A(4,-3,0)$在直线上,所以该点及$B(3,1,-2)$也在所求之平面上,且平面的法线向量$\boldsymbol{n}$垂直于$\overrightarrow{AB}$和直线的方向向量$\boldsymbol{s}=\{5,2,1\}$,于是

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&4&-2\\5&2&1\end{vmatrix}=\{8,-9,-22\}.$$

于是由点法式方程知所求平面方程为

$$8(x-3)-9(y-1)-22(z+2)=0,\text{即}\quad 8x-9y-22z-59=0.$$

9 求直线$\begin{cases}x+y+3z=0,\\x-y-z=0\end{cases}$与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.

【解】 此直线的方向向量为

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & 1 & 3\\1 & -1 & -1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},$$

$$\sin\varphi=\frac{|1\times2+(-1)\times4+(-1)\times(-2)|}{\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=0\Rightarrow\varphi=0.$$

10 试确定下列各组中的直线和平面间的关系：

(1) $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 和 $4x-2y-2z=3$；

(2) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$ 和 $3x-2y+7z=8$；

(3) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z=3$.

【解】 设直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$，直线与平面的夹角为 φ，且 $\sin\varphi=|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}$.

(1) $\boldsymbol{s}=(-2,-7,3)$，$\boldsymbol{n}=(4,-2,-2)$，则

$$\sin\varphi=\frac{|(-2)\cdot4+(-7)\cdot(-2)+3(-2)|}{\sqrt{(-2)^2+(-7)^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+(-2)^2+(-2)^2}}=0,$$

即 $\varphi=0$. 故直线平行于平面或在平面上，现将直线上的点 $A(-3,-4,0)$ 代入平面方程，方程不成立. 故点 A 不在平面上，因此直线不在平面上，直线与平面平行.

(2) $\boldsymbol{s}=(3,-2,7)$，$\boldsymbol{n}=(3,-2,7)$，由于 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}$ 或

$$\sin\varphi=\frac{|3\cdot3+(-2)\cdot(-2)+7\cdot7|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+7^2}\cdot\sqrt{3^2+(-2)^2+7^2}}=1,$$

知 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，故直线与平面垂直.

(3) $\boldsymbol{s}=(3,1,-4)$，$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，由于 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 或

$$\sin\varphi=\frac{|3\cdot1+1\cdot1+(-4)\cdot1|}{\sqrt{3^2+1^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=0,$$

知 $\varphi=0$. 将直线上的点 $A(2,-2,3)$ 代入平面方程，方程成立. 即点 A 在平面上. 故直线在平面上.

11 求过点 $(1,2,1)$ 而与直线$\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\x-y+z-1=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}2x-y+z=0,\\x-y+z=0\end{cases}$平行的平面方程.

【解】 两已知直线的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & 2 & -1\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\2 & -1 & 1\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}).$$

由于两已知直线平行于所求平面,因此平面的法线向量

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&-3\\0&1&1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

故所求平面方程为 $(x-1)-(y-2)+(z-1)=0$,即 $x-y+z=0$.

12 求点$(-1,2,0)$在平面$x+2y-z+1=0$上的投影.

【解】 过点$(-1,2,0)$作垂直于已知平面的直线,则该直线的方向向量即为已知平面的法线向量,且 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}=\{1,2,-1\}$.所以垂线的参数方程为

$$\begin{cases}x=-1+t,\\y=2+2t,\\z=-t.\end{cases}$$

将其代入平面方程可得$(-1+t)+2(2+2t)-(-t)+1=0$,即$t=-\dfrac{2}{3}$.于是所求点$(-1,2,0)$到平面的投影就是此平面与垂线的交点$\left(-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

13 求点$P(3,-1,2)$到直线$\begin{cases}x+y-z+1=0,\\2x-y+z-4=0\end{cases}$的距离.

【解】 直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}=-3(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=-3\{0,1,1\}=-3n,$$

所以由平面的点法式方程可得过$P(3,-1,2)$点且垂直于此直线的平面方程为

$$0(x-3)+(y+1)+(z-2)=0,$$

即$y+z-1=0$.再解方程组

$$\begin{cases}x+y-z+1=0,\\2x-y+z-4=0,\\y+z-1=0,\end{cases}$$

可得P点到已知直线的垂足$M\left(1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$,因此所求距离

$$d=|PM|=\left[(3-1)^2+\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

14 设M_0是直线L外一点,M是直线L上任意一点,且直线的方向向量为$\boldsymbol{s}$,试证:点M_0到直线L的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}. \qquad ①$$

【证】 直线L的向量式方程为 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}+\lambda\boldsymbol{s}$. ②

因为M_0是直线外一点,所以$\overrightarrow{M_0M}$与方向向量$\boldsymbol{s}$为邻边的平行四边形之面积

$$A=|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|. \qquad ③$$

另一方面,点M_0到直线l的距离等于该平行四边形以$|\boldsymbol{s}|$为底边的高,于是它的面积

$$A = d \cdot |s|. \tag{④}$$

联立 ③ 与 ④ 两式即知 $\quad d \cdot |s| = |\overrightarrow{M_0M} \times s|$,

从而 $\qquad d = \dfrac{|\overrightarrow{M_0M} \times s|}{|s|}.$

【注】 $M_0(3, -1, 2)$ 为 L 外一点,易取 L 上一点 $M(1,0,2)$,且 $s = \{0,1,1\}$,于是

$$\overrightarrow{M_0M} \times s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i + 2j - 2k.$$

所以 $\quad d = \dfrac{|\overrightarrow{M_0M} \times s|}{|s|} = \dfrac{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}.$

15 求直线 $\begin{cases} 2x - 4y + z = 0, \\ 3x - y - 2z - 9 = 0 \end{cases}$ 在平面 $4x - y + z = 1$ 上的投影直线的方程.

【解】 设过所给直线的平面束方程为

$$2x - 4y + z + \lambda(3x - y - 2z - 9) = 0,$$

即 $$(2 + 3\lambda)x - (4 + \lambda)y + (1 - 2\lambda)z - 9\lambda = 0, \tag{①}$$

其中 λ 为待定常数,欲使该平面与已知平面 $4x - y + z = 1$ 垂直,则有

$$n_1 \times n_2 = 4(2 + 3\lambda) + (-1)(-4 - \lambda) + (1 - 2\lambda) = 0.$$

解之得 $\lambda = -\dfrac{13}{11}$,将其代入 ① 式,可得投影平面方程为

$$\left(2 - 3 \times \frac{13}{11}\right)x + \left(4 - \frac{13}{11}\right)y + \left(1 + 2 \times \frac{13}{11}\right)z + 9 \times \frac{13}{11} = 0,$$

即 $\qquad 17x + 31y - 37z - 117 = 0.$

因此,所求投影直线的方程为 $\begin{cases} 17x + 31y - 37z - 117 = 0, \\ 4x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$

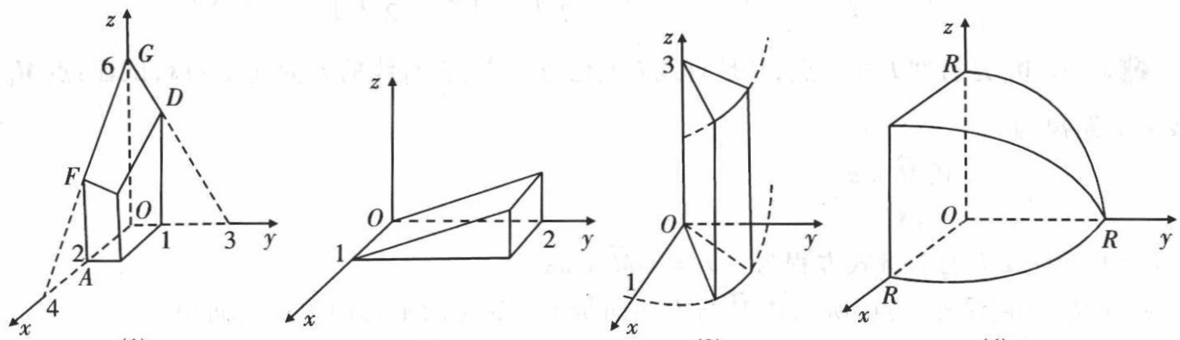
16 画出下列各曲面所围成的立体的图形:

(1) $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 1, 3x + 4y + 2z - 12 = 0$;

(2) $x = 0, z = 0, x = 1, y = 2, z = \dfrac{y}{4}$;

(3) $z = 0, z = 3, x - y = 0, x - \sqrt{3}y = 0, x^2 + y^2 = 1$(在第一卦限内);

(4) $x = 0, y = 0, z = 0, x^2 + y^2 = R^2, y^2 + z^2 = R^2$(在第一卦限内).



(1) (2) (3) (4)

第 16 题图

习题 8－5　曲面及其方程

1 一球面过原点及 $A(4,0,0)$，$B(1,3,0)$ 和 $C(0,0,-4)$ 三点，求球面的方程及球心的坐标和半径．

【解】 设所求球面的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，将已知点的坐标代入上式，得

$$a^2+b^2+c^2=R^2, \tag{1}$$

$$(a-4)^2+b^2+c^2=R^2, \tag{2}$$

$$(a-1)^2+(b-3)^2+c^2=R^2, \tag{3}$$

$$a^2+b^2+(4+c)^2=R^2. \tag{4}$$

联立(1)(2)得 $a=2$．联立(1)(4)得 $c=-2$，将 $a=2$ 代入(2)(3)并联立得 $b=1$，故 $R=3$．因此所求球面方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$，其中球心坐标为 $(2,1,-2)$，半径为 3．

2 建立以点 $(1,3,-2)$ 为球心，且通过坐标原点的球面方程．

【解】 因球心为 $(1,3,-2)$，故可设球面方程为

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=R^2,$$

又球面过坐标原点，于是 $R^2=1^2+3^2+2^2=14$．

从而所求球面方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14$．

3 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面？

【解】 由于 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6$，所以该方程表示以 $(1,-2,-1)$ 为球心，$\sqrt{6}$ 为半径的球面．

4 求与坐标原点 O 及点 $(2,3,4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的点的全体所组成的曲面的方程，它表示怎样的曲面？

【解】 设所求曲面上点的坐标为 (x,y,z)，由题设知

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

即

$$3x^2+3y^2+3z^2+4x+6y+8z-29=0,$$

故所求曲面的方程为 $\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{116}{9}$．

易见它是以点 $\left(-\dfrac{2}{3},-1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 为球心且半径为 $\dfrac{2}{3}\sqrt{29}$ 的球面．

5 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程．

【解】 由题设知所求曲面的形式为 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$．因已知曲线为 $\begin{cases}z^2=5x,\\y=0,\end{cases}$ 且绕 x 轴旋转一周，故其旋转曲面方程为 $y^2+z^2=5x$．

6 将 xOz 坐标面上的圆 $x^2+z^2=9$ 绕 z 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程．

【解】 由题设知曲线$\begin{cases}x^2+z^2=9,\\ y=0\end{cases}$绕 z 轴旋转一周的旋转曲面方程为$(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=9$,故所求曲面方程为 $x^2+y^2+z^2=9$,它是圆心在原点且半径为 3 的球面.

7 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

【解】 由题设知曲线$\begin{cases}4x^2-9y^2=36,\\ z=0\end{cases}$绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为 $4x^2-9z^2-9y^2=36$,它是一个双叶双曲面;该曲线绕 y 轴旋转一周所成旋转曲面方程为 $4x^2+4z^2-9y^2=36$,它是一个单叶双曲面.

8 画出下列各方程所表示的曲面:

(1) $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$;　(2) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;　(3) $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$;

(4) $y^2-z=0$;　(5) $z=2-x^2$.

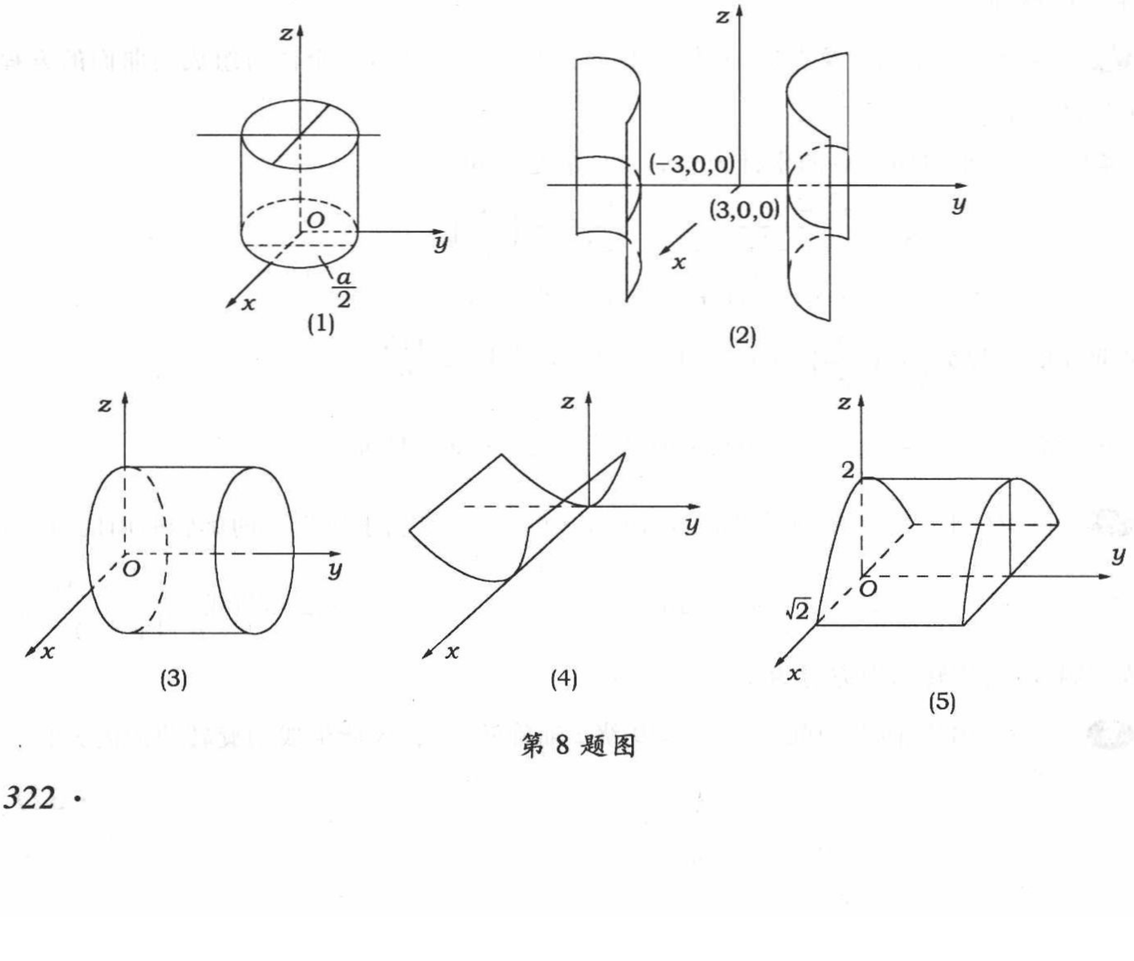
【解】 (1) 它是以平行于 z 轴的直线为母线,并以 xOy 坐标面上的曲线$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$为准线的圆柱面(如图(1)).

(2) 它是母线平行于 z 轴且以 xOy 坐标面上双曲线 $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 为准线的双曲柱面(如图(2)).

(3) 它是母线平行于 y 轴且以 xOz 坐标面上椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ 为准线的椭圆柱面(如图(3)).

(4) 它是母线平行于 x 轴且以 yOz 坐标面上抛物线 $y^2=z$ 为准线的抛物柱面(如图(4)).

(5) 它是母线平行于 y 轴且以 xOz 坐标面上抛物线 $z=2-x^2$ 为准线的抛物柱面(如图(5)).



第 8 题图

9 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $x = 2$；　(2) $y = x + 1$；　(3) $x^2 + y^2 = 4$；　(4) $x^2 - y^2 = 1$.

【解】 所给方程对应的图形如下表所述

方程	xOy 面上的平面图形	空间图形
$x = 2$	平行于 y 轴的直线	平行于 yOz 面的平面
$y = x + 1$	平行于分角线 $y = x$ 的直线	平行于 z 轴的平面
$x^2 + y^2 = 4$	圆心在原点且半径为 2 的圆	以 z 轴为轴半径为 2 的圆柱面
$x^2 - y^2 = 1$	实轴为 x 轴的双曲线	母线平行于 z 轴的双曲柱面

10 说明下列旋转曲面是怎样形成的：

(1) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{9} = 1$；　(2) $x^2 - \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$；

(3) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$；　(4) $(z - a)^2 = x^2 + y^2$.

【解】 (1) 原方程等价于 $\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{9}(y^2 + z^2) = 1$，所以它是由 xOy 坐标面上的椭圆曲线 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ 绕 x 轴旋转一周，或由 xOz 坐标面上的椭圆曲线 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转椭球面.

(2) 方程可化为 $(x^2 + z^2) - \dfrac{1}{4}y^2 = 1$，它是由 xOy 坐标面上的双曲线 $x^2 - \dfrac{1}{4}y^2 = 1$ 绕 y 轴旋转一周，或由 yOz 坐标面上双曲线 $z^2 - \dfrac{1}{4}y^2 = 1$ 绕 y 轴旋转一周所生成的单叶（旋转）双曲面.

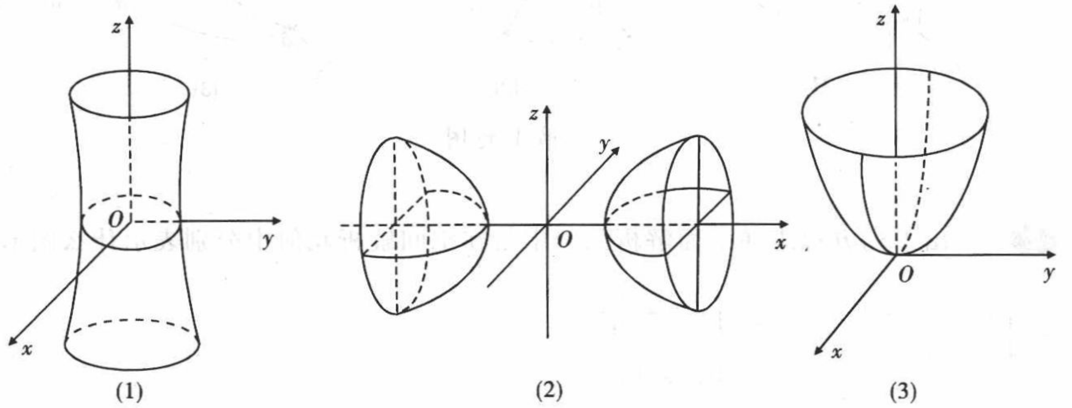
(3) 方程可化为 $x^2 - (y^2 + z^2) = 1$，它是由 xOy 坐标面上双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 或 xOz 坐标面上双曲线 $x^2 - z^2 = 1$ 绕 x 轴旋转一周所生成的双叶（旋转）双曲面.

(4) 它是由 yOz 坐标面上的直线 $z = \pm y + a$ 绕 z 轴旋转一周，或由 xOz 坐标面上的直线 $z = \pm x + a$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面.

11 画出下列方程所表示的曲面：

(1) $4x^2 + y^2 - z^2 = 4$；　(2) $x^2 - y^2 - 4z^2 = 4$；　(3) $\dfrac{z}{3} = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$.

【解】



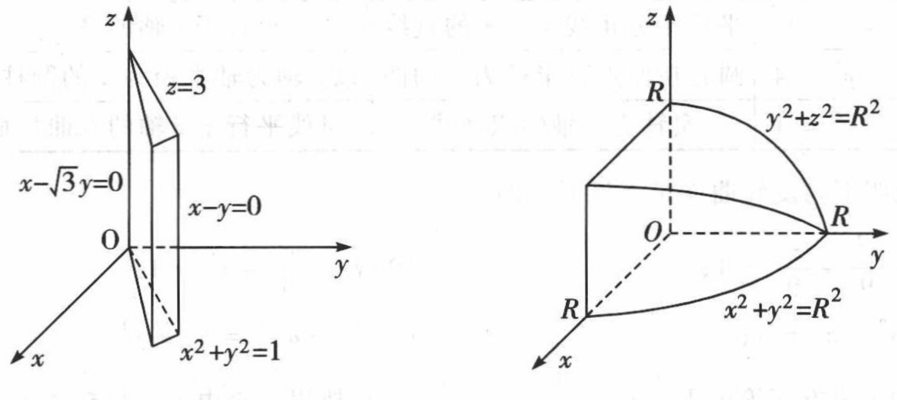
第 11 题图

12 画出下列各曲面所围立体的图形：

(1) $z = 0, z = 3, x - y = 0, x - \sqrt{3}y = 0, x^2 + y^2 = 1$（在第一卦限内）；

(2) $x = 0, y = 0, z = 0, x^2 + y^2 = R^2, y^2 + z^2 = R^2$（在第一卦限内）.

【解】 (1) 如图(1) 所示；(2) 如图(2) 所示.

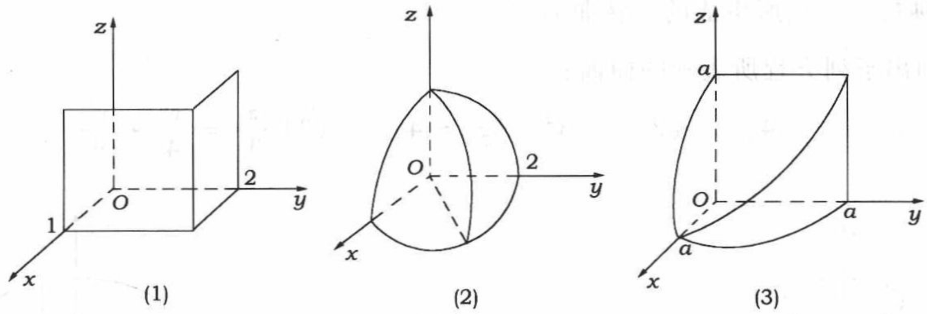


习题 8－6 空间曲线及其方程

1 画出下列曲线在第一卦限内的图形：

(1) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ x - y = 0; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + z^2 = a^2. \end{cases}$

【解】 分别画出每条曲线的一般方程中的两曲面在第一卦限内的图形即可得到其交线.



第 1 题图

2 指出下列方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $\begin{cases} y = 5x + 1, \\ y = 2x - 3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \\ y = 3. \end{cases}$

【解】 (1) 两相交直线的交点 $\left(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{17}{3}\right)$；两平面的交线 $\Big($平行于 z 轴且过点 $\Big(-\dfrac{4}{3},$

$-\frac{17}{3},0\big)\big)$.

(2) 椭圆在(长轴上的)顶点处与其切线的交点(0,3);椭圆柱面与其切平面的交线(它平行于 y 轴且过点(0,3,0)).

3 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 的柱面方程.

【解】 在 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 中消去 x,得 $3y^2-z^2=16$,即为母线平行于 x 轴且通过已知曲线的柱面方程.

在 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 中消去 y,得 $3x^2+2z^2=16$,即为母线平行于 y 轴且通过已知曲线的柱面方程.

4 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

【解】 在 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\x+z=1\end{cases}$ 中消去 z,得 $x^2+y^2+(1-x)^2=9$,即 $2x^2-2x+y^2=8$,它表示母线平行于 z 轴的柱面,故 $\begin{cases}2x^2-2x+y^2=8,\\z=0\end{cases}$ 表示已知交线在 xOy 面上的投影的方程.

5 将下列曲线的一般方程化为参数方程:

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\y=x;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4,\\z=0.\end{cases}$

【解】 (1) 将 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$ 得 $2x^2+z^2=9$,即 $\frac{x^2}{(3/\sqrt{2})^2}+\frac{z^2}{3^2}=1$.

于是只令 $x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta,z=3\sin\theta$. 则所求曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta,\\y=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta,\ (0\leqslant\theta\leqslant2\pi)\\z=3\sin\theta.\end{cases}$

(2) 将 $z=0$ 代入 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$ 得 $(x-1)^2+y^2=3$,于是可令 $x-1=\sqrt{3}\cos\theta$,$y=\sqrt{3}\sin\theta$,则所求曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\sqrt{3}\cos\theta,\\y=\sqrt{3}\sin\theta,\ (0\leqslant\theta\leqslant2\pi)\\z=0.\end{cases}$

6 求螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=a\sin\theta,\\z=b\theta\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

【解】 由螺旋线的定义知,它是圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上的一条空间曲线,所以螺旋线在 xOy 坐标面上的投影方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\z=0.\end{cases}$

再由螺旋线参数方程中第 1 式与第 3 式消去 θ,可得 $\frac{x}{a}=\cos\frac{z}{b}$,即 $x=a\cos\frac{z}{b}$. 于是螺旋线在 xOz 坐标面上的投影方程为 $\begin{cases}x=a\cos\frac{z}{b},\\ y=0.\end{cases}$ 同理,由螺旋线参数方程中第 2 式与第 3 式消去 θ 后与 $x=0$ 联立,即可得螺旋线在 yOz 坐标面上的投影的直角坐标方程为 $\begin{cases}y=a\sin\frac{z}{b},\\ x=0.\end{cases}$

7 求上半球 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax\ (a>0)$ 的公共部分在 xOy 面和 xOz 面上的投影.

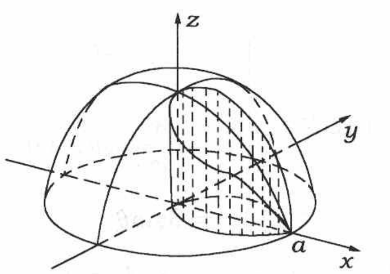
【解】 (1) 先求立体在 xOy 面上的投影区域. 因圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax$ 在 xOy 面上的投影位于半球在 xOy 面上的投影内部. 故其公共部分即为该圆柱体在 xOy 面上的投影:

$$\begin{cases}\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2\leqslant\left(\dfrac{a}{2}\right)^2,\\ z=0.\end{cases}$$ 即它是 xOy 面上的一个圆盘.

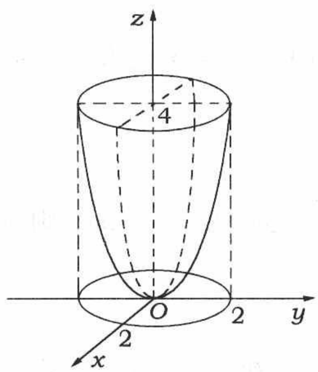
(2) 求立体在 xOz 面上的投影:由两立体的界面方程

$$\begin{cases}x^2+y^2=ax,\\ z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\end{cases}$$

消去 y,可得 $z=\sqrt{a^2-ax}\ (0\leqslant x\leqslant a)$,即 $z^2+ax=a^2\ (0\leqslant x\leqslant a,z\geqslant 0)$
再结合边界 $x=0,z=0$ 知立体在 xOz 面上的投影为 $z^2+ax\leqslant a^2,x\geqslant 0,z\geqslant 0$.



第 7 题图



第 8 题图

8 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$ 在三坐标面上的投影.

【解】 (1) 求曲面在 xOy 面上的投影:由 $0\leqslant z\leqslant 4$,知旋转抛物面在 xOy 面上投影的边界曲线为 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ z=4,\end{cases}$ 故旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$ 在 xOy 面上的投影为 $x^2+y^2\leqslant 4$,它是一个圆盘.

(2) 求曲面在 xOz 面上的投影:令 $y=0$,得抛物线 $z=x^2$ 为曲面在 xOz 面上投影的边界. 再结合 $0\leqslant z\leqslant 4$ 即知旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$ 在 xOz 面上的投影为 $x^2\leqslant z\leqslant 4$.

(3) 由对称性知,旋转抛物面 $z = x^2 + y^2(0 \leqslant z \leqslant 4)$ 在 yOz 面上的投影为 $y^2 \leqslant z \leqslant 4$.

总习题八

1 填空:

(1) 设在坐标系$[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$中点 A 和点 M 的坐标依次为(x_0,y_0,z_0)和(x,y,z),则在$[A;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$坐标系中,点 M 的坐标为________,向量$\overrightarrow{OM}$的坐标为________.

(2) 设数 λ_1、λ_2、λ_3 不全为0,使 $\lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b} + \lambda_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三个向量是________的.

(3) 设 $\boldsymbol{a} = (2,1,2)$,$\boldsymbol{b} = (4,-1,10)$,$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \lambda\boldsymbol{a}$,且 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$,则 $\lambda =$ ________.

(4) 设 $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 4$, $|\boldsymbol{c}| = 5$,且满足 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$,则 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}| =$ ________.

【解】 (1) 点 M 的坐标为 $\underline{(x - x_0, y - y_0, z - z_0)}$,向量$\overrightarrow{OM}$的坐标为$(x - x_0 + x_0, y - y_0 + y_0, z - z_0 + z_0) = \underline{(x,y,z)}$.

(2) 由$[(\lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b} + \lambda_3\boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 得$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$. 即 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ 共面.

(3) $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \lambda\boldsymbol{a} = (4,-1,10) - \lambda(2,1,2) = (4 - 2\lambda, -1 - \lambda, 10 - 2\lambda)$,

由于 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$,故 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = (2,1,2) \cdot (4 - 2\lambda, -1 - \lambda, 10 - 2\lambda) = 27 - 9\lambda = 0$,从而 $\lambda = \underline{3}$.

(4) 由$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{b} = 0$ 知 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b} = 0$,即 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

由$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} = 0$ 知 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = 0$,即 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$.

又由 $|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{c}|^2$ 知以向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 为边的三角形为直角三角形,且 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$. 故

$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}| = 3|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = 3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle \widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle = 3 \times 3 \times 4 \times 1 = \underline{36}$.

2 下列两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

(1) 设直线 L 的方程为$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + y + z = 4, \end{cases}$ 则 L 的参数方程为( );

(A)$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ (B)$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 + t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ (C)$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ (D)$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 - t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

(2) 下列结论中,错误的是( ).

(A)$z + 2x^2 + y^2 = 0$ 表示椭圆抛物面

(B)$x^2 + 2y^2 = 1 + 3z^2$ 表示双叶双曲面

(C)$x^2 + y^2 - (z - 1)^2 = 0$ 表示圆锥面

(D)$y^2 = 5x$ 表示抛物柱面

【解】 (1) 应选(A). 直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s} = (-2,1,3)$,过点$(1,1,1)$.

(2) 应选(B). $x^2 + 2y^2 = 1 + 3z^2$ 表示单叶双曲面.

3 在 y 轴上求与点 $A(1,-3,7)$ 和点 $B(5,7,-5)$ 等距离的点.

【解】 设此点为 $M(0,y,0)$,则 $1^2 + (y + 3)^2 + 7^2 = 5^2 + (7 - y)^2 + 5^2$.
解之得 $y = 2$,即所求点为 $M(0,2,0)$.

4 已知 ΔABC 的顶点为 $A(3,2,-1)$,$B(5,-4,7)$ 和 $C(-1,1,2)$,求从顶点 C 所引中线

的长度.

【解】 设中线为 CD,则 D 为 AB 的中点,且 D 点的坐标为 $(4,-1,3)$,因此

$$|CD| = \sqrt{(4+1)^2+(-1-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{30},$$

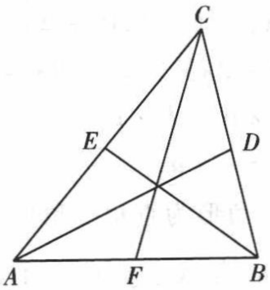
即为所求长度.

5 设 $\triangle ABC$ 的三边 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$、$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,三边中点依次为 D、E 、F,试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$,并证明 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}$.

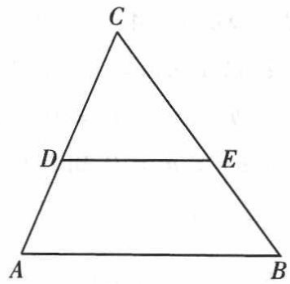
【证】 如图,D、E、F 分别为 BC、CA、AB 的中点,因此 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{\boldsymbol{a}}{2}$,$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{\boldsymbol{b}}{2}$,$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{\boldsymbol{c}}{2}$,从而

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}+\frac{\boldsymbol{a}}{2},\quad \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{2},\quad \overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2},$$

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{c}+\frac{\boldsymbol{a}}{2}+\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{2}+\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}=\frac{3}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}.$$



第 5 题图



第 6 题图

6 试用向量证明三角形两边中点的连续平行于第三边,且其长度等于第三边长度的一半.

【证】 如图,D、E 分别是 CA 与 BC 的中点.

由 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=2(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE})=2\overrightarrow{DE}$, 知 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DE}$ 且 $|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

即三角形两边中点的边线平行于第三边,且长度等于第三边长度的一半.

7 设 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,$\boldsymbol{a}=(3,-5,8)$,$\boldsymbol{b}=(-1,1,z)$,求 z.

【解】 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3-1,-5+1,8+z)=(2,-4,8+z)$,

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3-(-1),-5-1,8-z)=(4,-6,8-z)$,

由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 知 $\sqrt{2^2+(-4)^2+(8+z)^2}=\sqrt{4^2(-6)^2+(8-z)^2}$,经整理得 $z=1$.

8 设 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{b}|=1$,$\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=\frac{\pi}{6}$,求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

【解】 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle$

$$=3+1+2\cdot\sqrt{3}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7,$$

所以　$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$.

同理　$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=2$.

又　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\cos\varphi$,

其中 φ 为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 之夹角,于是　$2=\sqrt{7}\cdot 1\cdot\cos\varphi$,解得　$\varphi=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

9 设$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$,$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,求$\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle$.

【解】　设$\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=\theta$,由题设知

$$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0, \quad ①$$

$$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0, \quad ②$$

由 ① 及 ② 可得:$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}=\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ \dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2}=\dfrac{1}{4}$.

又　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2>0$，　所以 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\ \theta=\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$.

10 设 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-2)$,$\boldsymbol{b}=(1,1,z)$,问 z 为何值时$\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle$ 最小?并求此最小值.

【解】　设$\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=\varphi$,则由 $|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2+z^2}$,得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi=3\sqrt{2+z^2}\cos\varphi.$$

又　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1+(-1)\times1+(-2)\times z=1-2z$,

于是　$3\sqrt{2+z^2}\cos\varphi=1-2z$.

记　$y=\cos\varphi=\dfrac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}\ \Rightarrow\ y'=-\dfrac{z+4}{3(2+z^2)^{3/2}}$,

当 $z<-4$ 时,$y'>0$;当 $z>-4$ 时,$y'<0$.从而 $z=-4$ 时 y 有最大值,此时 θ 有最小值.且此最小值为　$\varphi=\arccos\dfrac{1-2\times(-4)}{3\sqrt{2+(-4)^2}}=\dfrac{\pi}{4}$.

11 设 $|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=\dfrac{\pi}{6}$,求以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

【解】　因为$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=-5\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,

故所求平行四边形面积为

$$S=5[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]=5[\boldsymbol{a}][\boldsymbol{b}]\sin\langle\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=5\times4\times3\times\frac{1}{2}=30.$$

12 设 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$,$\boldsymbol{c}=(2,1,2)$,向量 $\boldsymbol{r}$ 满足 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$,$Prj_c\boldsymbol{r}=14$,求 $\boldsymbol{r}$.

【解】　设 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$,由于 $|\boldsymbol{c}|=3$,且有

$$14=Prj_c\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\langle\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}}\rangle=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{2x+y+2z}{3},$$

即　$2x+y+2z=42$. ①

又由 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$ 可得

$$2x-3y+z=0, \quad ②$$

$$x-2y+3z=0, \tag{③}$$

联立①,②,③式解得 $x=14, y=10, z=2$. 所以 $\boldsymbol{r}=\{14,10,2\}$.

13 设 $\boldsymbol{a}=(-1,3,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,-3,-4)$, $\boldsymbol{c}=(-3,12,6)$, 证明三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面, 并用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$.

【证】 因为 $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix}=0$, 所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

另设 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+l\,\boldsymbol{b}$, 其中 λ, l 为待定常数. 则有 $(-3,12,6)=\lambda(-1,3,2)+l(2,-3,-4)$,

即 $\begin{cases} -\lambda+2l=-3, \\ 3\lambda-3l=12, \\ 2\lambda-4l=6 \end{cases} \Rightarrow \lambda=5, l=1$. 故 $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

14 已知动点 $M(x,y,z)$ 到 xOy 平面的距离与点 M 到点 $(1,-1,2)$ 的距离相等, 求点 M 的轨迹的方程.

【解】 根据题意知 $|z|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}$,

即 $(x-1)^2+(y+1)^2-4(z-1)=0$ 为点 M 的轨迹的方程.

15 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:

(1) $z=2(x^2+y^2)$;　　(2) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{36}=1$;

(3) $z^2=3(x^2+y^2)$;　　(4) $x^2-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=1$.

【解】 (1) $z=2(x^2+y^2)$ 为旋转抛物面, 它的一条母线为 $\begin{cases} z=2x^2, \\ y=0, \end{cases}$ z 轴为旋转轴.

(2) $\dfrac{1}{36}(x^2+z^2)+\dfrac{1}{9}y^2=1$ 为旋转椭球面, $\begin{cases} \dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1, \\ z=0 \end{cases}$ 是它的一条母线, 旋转轴为 y 轴.

(3) $z^2=3(x^2+y^2)$ 为圆锥面, $\begin{cases} z=\sqrt{3}x, \\ y=0 \end{cases}$ 为它的一条母线, 旋转轴为 z 轴.

(4) $x^2-\dfrac{1}{4}(y^2+z^2)=1$ 是旋转双曲面, $\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{4}=1, \\ z=0 \end{cases}$ 是它的一条母线, x 轴为旋转轴.

16 求通过点 $A(3,0,0)$ 和 $B(0,0,1)$ 且与 xOy 面成 $\dfrac{\pi}{3}$ 角的平面方程.

【解】 设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$, 由于 $A(3,0,0)$ 和 $B(0,0,1)$ 在平面上, 故

$$3A+D=0, \tag{①}$$

$$C+D=0, \tag{②}$$

再由二平面的夹角公式得 $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

即

$$A^2+B^2-3C^2=0, \tag{③}$$

由 ①,②,③ 得 $A=-\dfrac{D}{3}$, $B=\pm\dfrac{\sqrt{26}}{3}D$, $C=-D$.

所以所求的平面方程为 $x+\sqrt{26}y+3z-3=0$ 或 $x-\sqrt{26}y+3z-3=0$.

17 设一平面垂直于平面 $z=0$,并通过从点 $(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0\end{cases}$ 的垂线,求此平面方程.

【解】 设直线 $l:\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0\end{cases}$ 的方向向量为 $s=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&1&-1\\1&0&0\end{vmatrix}=\{0,-1,-1\}$.

过点 $A(1,-1,1)$ 以 s 为法向量的平面为

$\Pi_1:0\cdot(x-1)-1\times(y+1)-1\times(z-1)=0$,即 $y+z=0$.

联立 $\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0,\\y+z=0\end{cases}$ 得垂足 $\left(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

所求平面垂直于平面 $z=0$. 设平面方程 $Ax+By+D=0$,平面过点 $(1,-1,1)$ 及垂足 $\left(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,故有

$$\begin{cases}A-B+D=0,\\-\dfrac{1}{2}B+D=0,\end{cases}\quad \text{由此解得 } B=2D, A=D.$$

因此所求平面方程为 $Dx+2Dy+D=0$,即 $x+2y+1=0$.

18 求过点 $(-1,0,4)$,且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$,又与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

【解】 过点 $A(-1,0,4)$,以 $\boldsymbol{n}=\{3,-4,1\}$ 为法向量的平面方程 Π 为:

$$3(x+1)-4y+(z-4)=0 \Rightarrow 3x-4y+z-1=0. \qquad ①$$

已知直线的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+t,\\y=3+t,\\z=2t.\end{cases}$ ②

将 ② 代入 ① 解得 $t=16$. 由此知平面 ① 和直线 ② 的交点为 $B(15,19,32)$. 那么过点 A,B 的直线方程即为所求,它的方程为

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}.$$

19 已知点 $A(1,0,0)$ 及点 $B(0,2,1)$,试在 z 轴上求一点 C,使 $\triangle ABC$ 的面积最小.

【解】 设 $C(0,0,z)$,则 $\overrightarrow{AB}=\{-1,2,1\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-1,0,z\}$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&2&1\\-1&0&z\end{vmatrix}=\{2z,z-1,2\}.$$

故 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{(2z)^2+(z-1)^2+4}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{\left(z-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{24}{25}}.$$

显然，当 $z=\frac{1}{5}$ 时，S 最小，故所求的点为 $\left(0,0,\frac{1}{5}\right)$.

20 求曲线 $\begin{cases}z=2-x^2-y^2,\\ z=(x-1)^2+(y-1)^2\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线方程.

【解】 求在 xOy 面上投影方程，消去 $z \Rightarrow 2-x^2-y^2=(x-1)^2+(y-1)^2 \Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2=x+y,\\ z=0.\end{cases}$

类似在 xOz 面上投影方程，消去 $y \Rightarrow y=\pm\sqrt{2-x^2-z}, z=(x-1)^2+(\pm\sqrt{2-x^2-z}-1)^2=(x-1)^2+2-x^2-z+1\pm2\sqrt{2-x^2-z} \Rightarrow z+x-2=\pm\sqrt{2-x^2-z} \Rightarrow z^2+x^2+4-4z-4x+2xz=2-x^2-z \Rightarrow \begin{cases}2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0,\\ y=0.\end{cases}$

求在 yOz 面上投影方程，消去 $x \Rightarrow \begin{cases}2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0,\\ x=0.\end{cases}$

21 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

【解】 (1) 在 xOy 面上得

$$\begin{cases}x^2+y^2=2x,\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-1)^2+y^2=1,\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-1)^2+y^2\leqslant 1,\\ z=0;\end{cases}$$

(2) 在 xOz 面上 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2},\\ z^2=2x,\\ y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\leqslant z\leqslant\sqrt{2x},\\ y=0;\end{cases}$

(3) 在 yOz 面上 $\begin{cases}z^2=x^2+y^2,\\ z^4=4x^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z^4-4z^2-4y^2=0,\\ x=0\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases}(z^2-2)^2-4y^2=4,\\ x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left(\frac{z^2}{2}-1\right)^2-y^2\leqslant 1,\\ x=0,\\ z\geqslant 0.\end{cases}$$

22 画出下列各曲面所围立体的图形：

(1) 抛物柱面 $2y^2=x$，平面 $z=0$ 及 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$；

(2) 抛物柱面 $x^2=1-z$，平面 $y=0, z=0$ 及 $x+y=1$；

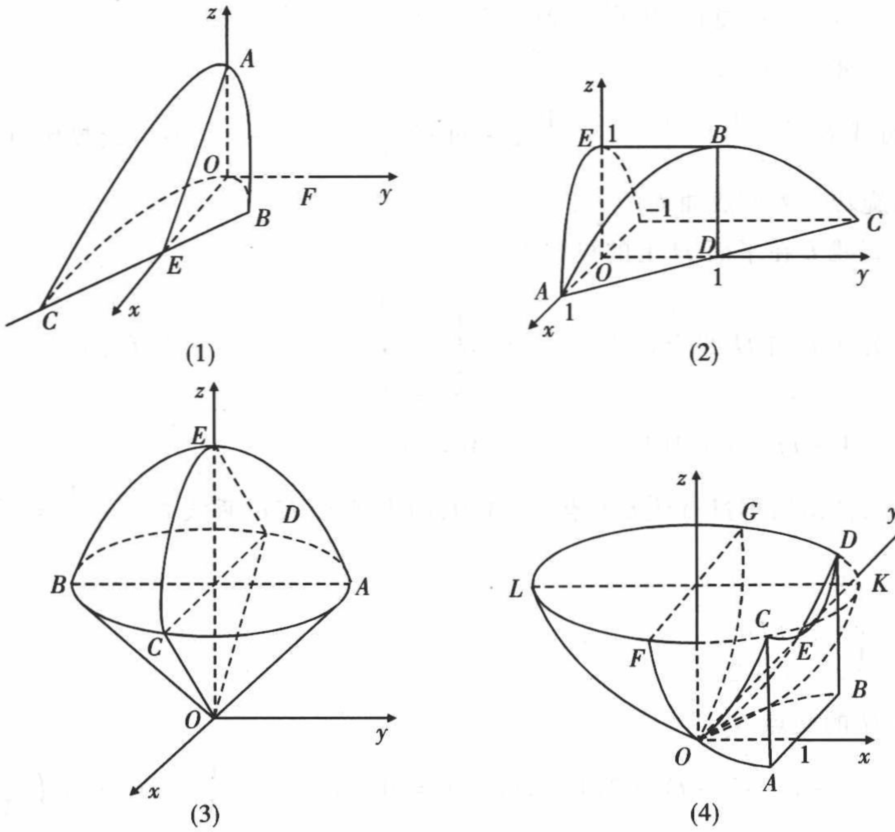
(3) 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$；

(4) 旋转抛物面 $x^2+y^2=z$，柱面 $y^2=x$，平面 $z=0$ 及 $x=1$.

【解】(1) 如图(1)　(2) 如图(2)；　(3) 如图(3)　(4) 如图(4).

【注】 在建立了空间直角坐标后，可按下列方法作图：

$1°$ 先作出立体的各表面(曲面),及它们与各坐标面的交线;$2°$ 再作各界面的交线.



第 22 题图

考研试题选解

1 设一平面经过原点及$(6,-3,2)$,且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直,则此平面方程为________.

【分析一】 所求平面 Π 过 $O(0,0,0)$ 与 $M_0(6,-3,2)$,其法向量 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{OM_0}=\{6,-3,2\}$;平面 Π 垂直于已知平面 $\Pi_0:4x-y+2z=8$,它们的法向量也互相垂直:$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_0=\{4,-1,2\}$.由此,

$$\boldsymbol{n}\ /\!/\ \overrightarrow{OM_0}\times\boldsymbol{n}_0=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\6&-3&2\\4&-1&2\end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k},$$

取 $\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$,则所求过 O 点的 Π 的方程为 $2x+2y-3z=0$.

【分析二】 即求过原点 O,与两个不共线的向量(一个是从原点到点 $M_0(6,-3,2)$ 的向量 $\overrightarrow{OM_0}=\{6,-3,2\}$,另一是平面 $4x-y+2z=8$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_0=\{4,-1,2\}$)平行的平面,即

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,\text{即}\quad 2x + 2y - 3z = 0 \quad \text{为所求}.$$

❷ 求直线 L: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 Π: $x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 L_0 的方程，并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

【解】 求直线 L 在平面 Π 上的投影 L_0:

方法 1° 先求 L 与 Π 的交点 N_1. 以 L: $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = t, \\ z = 1 - t \end{cases}$ 代入平面 Π 的方程,得

$$(1 + t) - t + 2(1 - t) - 1 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

从而交点为 $N_1(2,1,0)$;再过直线 L 上点 $M_0(1,0,1)$ 作平面 Π 的垂线 L': $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$,即

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -t, \\ z = 1 + 2t, \end{cases}$$

并求 L' 与平面 Π 的交点 N_2:

$$(1 + t) - (-t) + 2(1 + 2t) - 1 = 0 \quad \Rightarrow t = -\frac{1}{3},\text{交点为 } N_2\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$

N_1 与 N_2 的连接线即为所求 L_0: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$.

方法 2° 求 L 在平面 Π 上的投影线的最简方法是过 L 作垂直于平面 Π 的平面 Π_0,所求投影线就是平面 Π 与 Π_0 的交线. 平面 Π_0 过直线 L 上的点 $(1,0,1)$ 与不共线的向量 $\boldsymbol{l} = (1,1,-1)$(直线 L 的方向向量) 及 $\boldsymbol{n} = (1,-1,2)$(平面 Π 的法向量) 平行,于是 Π_0 的方程是

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{即} \quad x - 3y - 2z + 1 = 0.$$

投影线为 L_0: $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ x - 3y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$

求 L_0 绕 y 轴的旋转面 S:先把 L_0 表为以 y 为参数的形式 $\begin{cases} x = 2y, \\ z = -\dfrac{1}{2}(y-1), \end{cases}$ 按参数式表示的旋转面方程得 S 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{(2y)^2 + \left[\dfrac{1}{2}(1-y)\right]^2}\cos\theta, \\ y = y, \\ z = \sqrt{(2y)^2 + \left[\dfrac{1}{2}(1-y)\right]^2}\sin\theta. \end{cases}$$

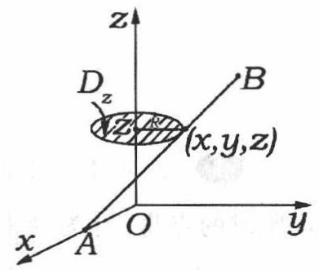
消去 θ 得 S 的方程为 $x^2 + z^2 = (2y)^2 + \left[-\dfrac{1}{2}(y-1)\right]^2$,即

$$4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0 \quad 为所求.$$

【评注】 ① 该题中用了求直线方程的另一方法:用两面式表示直线.

② 求旋转面方程是解析几何中重要内容之一,常有与多元函数微分学及多元函数积分学或一元函数积分学相结合的题型.如第七章第9题,第三章第25题.

3 已知 A 点和 B 点的直角坐标分别为(1,0,0)与(0,1,1).线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S,求由 S 及两平面 $z=0$,$z=1$ 所围成立体的体积.



第3题图

【解】 用定积分.设高度为 z 处的截面 D_z 的面积为 $S(z)$,则所求体积为(如右图)

$$V = \int_0^1 S(z)\,dz.$$

A、B 所在的直线方程为

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad 或 \quad \begin{cases} x = 1 - z, \\ y = z. \end{cases}$$

截面 D_z 半径的平方 $R^2 = x^2 + y^2 = (1-z)^2 + z^2$,则

$$S(z) = \pi R^2 = \pi(1 - 2z + 2z^2),$$

由此,

$$V = \pi\int_0^1 (1 - 2z + 2z^2)\,dz = \frac{2}{3}\pi.$$

第九章　多元函数微分法及其应用

习题9－1　多元函数的基本概念

1 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集?并分别指出它们的聚点所成的点集(称为导集)和边界.

(1) $\{(x,y) \mid x \neq 0, y \neq 0\}$;　　(2) $\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 4\}$;

(3) $\{(x,y) \mid y > x^2\}$;

(4) $\{(x,y) \mid x^2 + (y-1)^2 \geqslant 1\} \cap \{(x,y) \mid x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\}$.

【解】(1) 集合是开集,无界集;导集为 $\mathbf{R}^2$,边界为 $\{(x,y) \mid x = 0 \text{ 或 } y = 0\}$.

(2) 集合既非开集,又非闭集,是有界集;导集为 $\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$,边界为

$$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\}.$$

(3) 集合是开集,区域,无界集;导集为 $\{(x,y) \mid y \geqslant x^2\}$,边界为 $\{(x,y) \mid y = x^2\}$.

(4) 集合是闭集,有界集;导集为集合本身,边界为

$$\{(x,y) \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x,y) \mid x^2 + (y-2)^2 = 4\}.$$

2 已知函数 $f = (x,y) = x^2 + y^2 - xy\tan\dfrac{x}{y}$,试求 $f(tx,ty)$.

【解】$f(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty)\tan\dfrac{tx}{ty} = t^2\left(x^2 + y^2 - xy\tan\dfrac{x}{y}\right) = t^2 f(x,y)$.

3 试证函数 $F(x,y) = \ln x \cdot \ln y$ 满足关系式

$$F(xy,uv) = F(x,u) + F(x,v) + F(y,u) + F(y,v).$$

【证】左边 $= \ln xy \cdot \ln uv = (\ln x + \ln y)(\ln u + \ln v)$

$= \ln x \ln u + \ln x \ln v + \ln y \ln u + \ln y \ln v =$ 右边.

4 已知函数 $f(u,v,w) = u^w + w^{u+v}$,试求 $f(x+y, x-y, xy)$.

【解】$f(x+y,x-y,xy) = (x+y)^{xy} + (xy)^{(x+y)+(x-y)} = (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}$.

5 求下列各函数的定义域:

(1) $z = \ln(y^2 - 2x + 1)$;　　(2) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;

(3) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$;　　(4) $z = \ln(y - x) + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$;

(5) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}}\ (R > r > 0)$;

(6) $u = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

【解】 (1) $\{(x,y) \mid y^2-2x+1>0\}$.　　(2) $\{(x,y) \mid x+y>0, x-y>0\}$.

(3) $\{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 \geqslant y\}$.　　(4) $\{(x,y) \mid y-x>0, x \geqslant 0, x^2+y^2<1\}$.

(5) 要使函数有定义,则 $\begin{cases} R^2-x^2-y^2-z^2 \geqslant 0 \\ x^2+y^2+z^2-r^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, \\ x^2+y^2+z^2>r^2. \end{cases}$

所以函数的定义域是 $D=\{(x,y,z) \mid r^2<x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}$.

(6) 要使函数有定义,必须

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant 1, \\ x^2+y^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2-z^2 \geqslant 0 \text{ 且 } x^2+y^2 \neq 0.$$

从而定义域为 $D=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2-z^2 \geqslant 0, x^2+y^2 \neq 0\}$.

6 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$;　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$;　(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\tan(xy)}{y}$;　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1-0}{0+1}=1$.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}}=\ln 2$.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\dfrac{1}{4}$.

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{1-e^{xy}} \cdot (\sqrt{2-e^{xy}}+1)=-1 \cdot 2=-2$.

【注】 本题利用 $e^{xy}-1 \sim xy((x,y)\to(0,0))$,相当于令 $u=xy$,当 $(x,y)\to(0,0)$ 且 $xy \neq 0$ 时,有 $u\to 0$ 且 $u \neq 0$,于是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{1-e^{xy}}=\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u}{-u}=-1$.

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\tan(xy)}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\tan(xy)}{xy} \cdot x=1 \cdot 2=2$.

【注】 本题利用 $\tan(xy) \sim xy((x,y)\to(2,0))$.

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \cdot \dfrac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}}=\dfrac{1}{2} \cdot 0=0$.

【注】 本题利用 $1-\cos(x^2+y^2) \sim \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2 \quad ((x,y)\to(0,0))$.

7 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

【证】 (1) 如果动点 $P(x,y)$ 沿曲线 $y=\sin x$ 趋于 $(0,0)$ 点,则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\sin x\to 0}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}}=\infty,\text{所以}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}\text{不存在}.$$

(2) 如果 $P(x,y)$ 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 点,则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2\cdot y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^2}{x^2\cdot x^2+0}=1,$$

如果点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=-x$ 趋于 $(0,0)$ 点,则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(-x)^2}{x^2\cdot(-x)^2+4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+4}=0,$$

所以极限不存在.

8 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的?

【解】 该函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid y^2-2x\neq 0\}$,曲线 $y^2-2x=0$ 上各点均为 D 的聚点,且函数在这些点处没有定义,因此曲线 $y^2-2x=0$ 上各点均为函数的间断点.

9 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

【证】 因为 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$,

要使 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$,只要 $\sqrt{x^2+y^2}<2\varepsilon$,所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=2\varepsilon$,则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,就有 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$ 成立,即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

10 设 $F(x,y)=f(x)$,$f(x)$ 在 x_0 处连续,证明:对任意 $y_0\in\mathbf{R}$,$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

【证】 设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$,因为 $f(x)$ 在 x_0 处连续,所以 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 从而,当 $P(x,y)\in U(P_0,\delta)$ 时,$|x-x_0|\leqslant\rho(P,P_0)<\delta$,因而有

$$|F(x,y)-F(x_0,y_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

习题 9－2 偏导数

1 求下列函数的偏导数:

(1) $z=x^3y-y^3x$;　　(2) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$;

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$;　　(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$;

(5) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$;　　(6) $z=(1+xy)^y$;

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$;　　(8) $u=\arctan(x-y)^z$.

【解】 (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x$.

(2) $$\frac{\partial s}{\partial u}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2)\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot\frac{\partial}{\partial u}(uv)}{(uv)^2}=\frac{2u^2v-(u^2+v^2)v}{u^2v^2}=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2},$$

$$\frac{\partial s}{\partial v}=\frac{\frac{\partial}{\partial v}(u^2+v^2)\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot\frac{\partial}{\partial v}(uv)}{(uv)^2}=\frac{2uv^2-(u^2+v^2)u}{u^2v^2}=\frac{1}{u}-\frac{u}{v^2}.$$

(3) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{y}{xy}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{x}{xy}=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}.$$

(4) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy)\cdot y+2\cos(xy)[-\sin(xy)]\cdot y=y[\cos(xy)-\sin(2xy)],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos(xy)\cdot x+2\cos(xy)[-\sin(xy)]\cdot x=x[\cos(xy)-\sin(2xy)].$$

(5) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\cot\frac{x}{y}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\cot\frac{x}{y}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}.$$

(6) $$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[e^{y\ln(1+xy)}]=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right].$$

(7) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1},\quad\frac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x,\quad\frac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x.$$

(8) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+[(x-y)^z]^2}\cdot z(x-y)^{z-1}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{z(x-y)^{z-1}\cdot(-1)}{1+[(x-y)^z]^2}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+[(x-y)^z]^2}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.$$

2 设 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,求证 $l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0$.

【证】 因为 $$\frac{\partial T}{\partial l}=2\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\cdot\frac{1}{g}=\frac{\pi}{\sqrt{gl}},\quad\frac{\partial T}{\partial g}=2\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\cdot\left(-\frac{l}{g^2}\right)=-\frac{\pi\sqrt{l}}{g\sqrt{g}},$$

所以 $$l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=\pi\sqrt{\frac{1}{g}}-\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=0.$$

3 设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$,求证:$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

【证】 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\left[-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{x^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$,由 z 关于 x,y 的对称性,得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)},$$

所以 $$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cdot\frac{1}{x^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}+y^2\cdot\frac{1}{y^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z.$$

4 设$f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$,求$f_x(x,1)$.

【解】 $f_x(x,y) = 1 + (y-1)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{y}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{y}}}\cdot\dfrac{1}{y}$, $f_x(x,1) = 1+0 = 1$.

5 曲线$\begin{cases} z = \dfrac{x^2+y^2}{4}, \\ y = 4 \end{cases}$在点(2,4,5)处的切线对于$x$轴的倾角是多少?

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2}x$,$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4,5)} = 1$.设切线对于$x$轴的倾角为$\alpha$,则$\tan\alpha = 1$,所以$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

6 求下列函数的$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$:

(1)$z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$;　　(2)$z = \arctan\dfrac{y}{x}$;　　(3)$z = y^x$.

【解】 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2$,由$x,y$的对称性,得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -16xy.$$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(x^2+y^2)\cdot 0 - y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^x\ln y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x\ln^2 y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x\cdot y^{x-1}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = y^x\cdot\frac{1}{y} + xy^{x-1}\ln y = y^{x-1}(1+x\ln y).$$

7 设$f(x,y,z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$,求 $f_{xx}(0,0,1)$, $f_{xz}(1,0,2)$, $f_{yz}(0,-1,0)$及$f_{zzx}(2,0,1)$.

【解】 因为$f_x = y^2 + 2xz$, $f_{xx} = 2z$, $f_{xz} = 2x$, $f_y = 2xy + z^2$, $f_{yz} = 2z$,

$f_z = 2yz + x^2$, $f_{zz} = 2y$, $f_{zzx} = 0$.

所以 $f_{xx}(0,0,1) = 2$, $f_{xz}(1,0,2) = 2$, $f_{yz}(0,-1,0) = 0$, $f_{zzx}(2,0,1) = 0$.

8 设$z = x\ln(xy)$,求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$及$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x\cdot\dfrac{y}{xy} + \ln(xy) = 1 + \ln(xy)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{y}{xy} = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = 0$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x}{xy}=\frac{1}{y},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}.$$

9 验证：

(1) $y=e^{-kn^2t}\sin nx$ 满足 $\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$； (2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$.

【证】 (1) $\frac{\partial y}{\partial t}=-kn^2\sin nxe^{-kn^2t},\quad \frac{\partial y}{\partial x}=n\cos nxe^{-kn^2t},$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=ne^{-kn^2t}(-\sin nx)\cdot n=-n^2\sin nxe^{-kn^2t},$$

所以 $$k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-kn^2\sin nxe^{-kn^2t}=\frac{\partial y}{\partial t}.$$

(2) $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r-x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=\frac{r-\frac{x^2}{r}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3},$

由于 r 中，x,y,z 是对称的，所以 $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3},$

于是 $$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-x^2+r^2-y^2+r^2-z^2}{r^3}=\frac{3r^2-(x^2+y^2+z^2)}{r^3}=\frac{2r^2}{r^3}=\frac{2}{r}.$$

习题 9－3　全微分

1 求下列函数的全微分：

(1) $z=xy+\frac{x}{y}$；　　(2) $z=e^{\frac{y}{x}}$；

(3) $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(4) $u=x^{yz}$.

【解】 (1) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$，所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x-\frac{x}{y^2}\right)dy.$$

(2) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}$，所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{y}{x}}(ydx-xdy).$$

(3) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

所以 $dz=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(ydx-xdy).$

(4) 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=yz\cdot x^{yz-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x^{yz}\ln x\cdot z=zx^{yz}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x$,

所以 $dz=yzx^{yz-1}dx+zx^{dz}\ln x dy+yx^{yz}\ln x dz$.

❷ 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1,y=2$ 时的全微分.

【解】 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$,

所以 $dz=\frac{2(xdx+ydy)}{1+x^2+y^2}$, $dz\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{2(dx+2dy)}{6}=\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$.

❸ 求函数 $z=\frac{y}{x}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

【解】 $\Delta z=\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\frac{y}{x}$, $dz=-\frac{y}{x^2}\Delta x+\frac{1}{x}\Delta y$.

当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时,

全增量 $\Delta z=\frac{1+(-0.2)}{2+0.1}-\frac{1}{2}=-0.119$,

全微分 $dz=-\frac{1}{4}\cdot 0.1+\frac{1}{2}\cdot(-0.2)=-0.125$.

❹ 求函数 $z=e^{xy}$ 当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时的全微分.

【解】 $dz=ye^{xy}\Delta x+xe^{xy}\Delta y=e^{xy}(y\Delta x+x\Delta y)$,将 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 代入 dz,得 $dz=e(1\times 0.15+1\times 0.1)=0.25e$.

❺ 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质:

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续. (2) $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续.

(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分. (4) $f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$ 存在.

若用"$P\Rightarrow Q$"表示可由性质 P 推出性质 Q,则下列四个选项中正确的是

(A) $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$. (B) $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$.

(C) $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$. (D) $(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$.

【解】 由于二元函数偏导数存在且连续是二元函数可微分的充分条件,二元函数可微分必定可(偏)导,二元函数可微分必定连续,因此选项(A)正确.

选项(B)中 $(3)\nRightarrow(2)$,选项(C)中 $(4)\nRightarrow(1)$,选项(D)中 $(1)\nRightarrow(4)$.

❻ 计算 $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$ 的近似值.

【解】 设 $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$,则 $f_x(x,y)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$, $f_y(x,y)=\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$,

所以 $df(x,y)=\frac{3}{2\sqrt{x^3+y^3}}(x^2dx+y^2dy)$,

取 $x=1,y=2,dx=1.02-1=0.02,dy=1.97-2=-0.03$,则

$$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}=f(1.02,1.97)\approx f(1,2)+df(1,2)\Big|_{\substack{dx=0.02\\dy=-0.03}}$$

$$=\sqrt{1^3+2^3}+\frac{3}{2\sqrt{1^3+2^3}}[1\times 0.02+4\times(-0.03)]=2.95.$$

7 计算$(1.97)^{1.05}$的近似值($\ln 2 = 0.693$).

【解】 设$z = x^y$,则$dz = yx^{y-1}dx + x^y\ln x dy$. 当$x = 2, y = 1$时,$z = 2$,因为$dx = 1.97 - 2 = -0.03, dy = 1.05 - 1 = 0.05$,当$x = 2, y = 1$时,所以

$$dz = 1 \times 1 \times (-0.03) + 2\ln 2 \times 0.05 = -0.03 + 0.1 \times 0.693 = 0.0393,$$

于是 $1.97^{1.05} \approx 2 + 0.0393 = 2.0393$.

8 已知边长为$x = 6$m与$y = 8$m的矩形,如果x边增加5 cm而y边减少10 cm,问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

【解】 设矩形的对角形长为l,则$l = \sqrt{x^2 + y^2}$,$dl = \dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

当$x = 6, y = 8, dx = 0.05, dy = -0.1$时,$dl = \dfrac{6 \times 0.05 + 8 \times (-0.1)}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = -0.05$.

所以矩形的对角线约减少5 cm.

9 设有一无盖圆柱形容器,容器的壁与底的厚度均为0.1cm,内高为20cm,内半径为4cm. 求容器外壳体积的近似值.

【解】 设容器的内半径为r,内高为h,则容器容积为$V = \pi r^2 h$,

所以 $dV = 2\pi rh dr + \pi r^2 dh = \pi r(2h dr + r dh)$.

当$r = 4, h = 20, dr = 0.1, dh = 0.1$时,

$$dV = 4\pi(2 \times 20 \times 0.1 + 4 \times 0.1) = 17.6\pi \approx 55.3.$$

因此容器外壳体积约为55.3cm^3.

10 设有直角三角形,测得其两直角边的长分别为(7 ± 0.1)cm和(24 ± 0.1)cm. 试利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差.

【解】 设三角形两直角边长为x, y,其斜边长为$l = \sqrt{x^2 + y^2}$.

因为 $\dfrac{\partial l}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\dfrac{\partial l}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,所以计算$l$的绝对误差为

$$\delta_l = \left|\frac{\partial l}{\partial x}\right|\delta_x + \left|\frac{\partial l}{\partial y}\right|\delta_y = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

当$x = 7, y = 24, \delta_x = \delta_y = 0.1$时,

$$\delta_e = \frac{7 \times 0.1 + 24 \times 0.1}{\sqrt{7^2 + 24^2}} = \frac{3.1}{25} = 0.124(\text{cm}).$$

11 测得一块三角形土地的两边长分别为(63 ± 0.1)m和(78 ± 0.1)m,这两边的夹角为$60° \pm 1°$. 试求三角形面积的近似值,并求其绝对误差和相对误差.

【解】 设三角形两边边长为x, y,它们的夹角为θ,则三角形的面积为 $S = \dfrac{1}{2}xy\sin\theta$.

因 $dS = \dfrac{1}{2}y\sin\theta \cdot dx + \dfrac{1}{2}x\sin\theta \cdot dy + \dfrac{1}{2}xy\cos\theta \cdot d\theta$,所以$S$的绝对误差

$$\delta_S = \frac{y}{2}\sin\theta \cdot \delta_x + \frac{x}{2}\sin\theta \cdot \delta_y + \frac{xy}{2}\cos\theta \cdot \delta_\theta.$$

当 $x = 63, y = 78, \theta = 60° = \frac{\pi}{3}, \delta_x = 0.1, \delta_y = 0.1, \delta_\theta = 1° = \frac{\pi}{180}$ 时，

$$S = \frac{1}{2} \times 63 \times 78 \times \sin\frac{\pi}{3} = \frac{63 \times 78}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2127.82,$$

$$\delta_S = \frac{78}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0.1 + \frac{63}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0.1 + \frac{63 \times 78}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{180} = 27.55,$$

$$\frac{\delta_S}{S} = \frac{27.55}{2127.82} = 1.29\%.$$

所以三角形的面积约为 2127.82cm^2，其绝对误差为 27.55cm^2，相对误差为 1.29%.

12 利用全微分证明：两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

【证】 设两数 x, y 之和为 $u = x + y$.

因为 $\Delta u \approx \mathrm{d}u = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$，　$|\mathrm{d}x| \leqslant \delta_x, |\mathrm{d}y| \leqslant \delta_y$，

所以 $|\Delta u| \approx \mathrm{d}u = |\mathrm{d}x + \mathrm{d}y| \leqslant |\mathrm{d}x| + |\mathrm{d}y| \leqslant \delta_x + \delta_y$，即 $\delta_u = \delta_x + \delta_y$.

13 利用全微分证明：乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和；商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

【证】 (1) 设 $v = xy$，则 $\Delta v \approx \mathrm{d}v = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$，于是

$$\left|\frac{\Delta v}{v}\right| \approx \left|\frac{\mathrm{d}v}{v}\right| = \left|\frac{y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{xy}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}y}{y}\right| \leqslant \left|\frac{\mathrm{d}x}{x}\right| + \left|\frac{\mathrm{d}y}{y}\right| \leqslant \left|\frac{\delta_x}{x}\right| + \left|\frac{\delta_y}{y}\right|,$$

即
$$\left|\frac{\delta_v}{v}\right| = \left|\frac{\delta_x}{x}\right| = \left|\frac{\delta_y}{y}\right|.$$

(2) 设 $w = \frac{x}{y}$，则 $\Delta w \approx \mathrm{d}w = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2}$，所以

$$\left|\frac{\Delta w}{w}\right| \approx \left|\frac{\mathrm{d}w}{w}\right| = \left|\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2 \cdot \frac{x}{y}}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{\mathrm{d}y}{y}\right| \leqslant \left|\frac{\mathrm{d}x}{x}\right| + \left|\frac{\mathrm{d}y}{y}\right| \leqslant \left|\frac{\delta_x}{x}\right| + \left|\frac{\delta_y}{y}\right|,$$

即
$$\left|\frac{\delta_w}{w}\right| = \left|\frac{\delta_x}{x}\right| + \left|\frac{\delta_y}{y}\right|.$$

习题 9－4　多元复合函数的求导法则

1 设 $z = u^2 + v^2, u = x + y, v = x - y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \cdot 1 + 2v \cdot 1 = 2(x + y) + 2(x - y) = 4x,$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u - 2v = 4y.$$

2 设 $z = u^2 \ln v, u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \cdot \frac{1}{y} \cdot \ln v + \frac{u^2}{v} \cdot 3$

$$= \frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y) + \frac{3x^2}{y^2(3x-2y)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 2u\cdot\ln v\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{u^2}{v}\cdot(-2)$$

$$= -\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y) - \frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}.$$

3 设 $z = e^{x-2y}$，而 $x = \sin t, y = t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$.

【解】 $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = e^{x-2y}\cos t + e^{x-2y}\cdot(-2)\cdot 3t^2 = e^{\sin t - 2t^3}(\cos t - 6t^2).$

4 设 $z = \arcsin(x-y)$，而 $x = 3t, y = 4t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$.

【解】 $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{3}{\sqrt{1-(x-y)^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 12t^2$

$$= \frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(x+y)^2}} = \frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.$$

5 设 $z = \arctan(xy)$，而 $y = e^x$，求 $\frac{dz}{dx}$.

【解】 $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2y^2} + \frac{x}{1+x^2y^2}\cdot e^x = \frac{(1+x)e^x}{1+x^2e^{2x}}.$

6 设 $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而 $y = a\sin x, z = \cos x$，求 $\frac{du}{dx}$.

【解】 $\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}$

$$= \frac{y-z}{a^2+1}a\cdot e^{ax} + \frac{e^{ax}}{a^2+1}a\cos x + \frac{-e^{ax}}{a^2+1}(-\sin x)$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+1}(ay - az + a\cos x + \sin x)$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+1}(a^2\sin x - a\cos x + a\cos x + \sin x) = e^{ax}\sin x.$$

7 设 $z = \arctan\frac{x}{y}$，而 $x = u+v, y = u-v$，验证：$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$.

【证】 $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y} + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{y-x}{x^2+y^2},$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y} + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot(-1) = \frac{y+x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y-x}{x^2+y^2} + \frac{y+x}{x^2+y^2} = \frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{2(u-v)}{(u+v)^2+(u-v)^2} = \frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

8 求下列函数的一阶偏导数（其中 f 具有一阶连续偏导数）：

(1) $u = f(x^2-y^2, e^{xy})$；　(2) $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$；　(3) $u = f(x, xy, xyz)$.

【解】 (1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot e^{xy}\cdot y=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot(-2y)+f_2'\cdot e^{xy}\cdot x=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'.$$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{y}f_1'$, $\quad\dfrac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)+f_2'\cdot\dfrac{1}{z}=-\dfrac{x}{y^2}f_1'+\dfrac{1}{z}f_2'$,

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_2'\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{y}{z^2}f_2'.$$

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot y+f_3'\cdot yz=f_1'+yf_2'+yzf_3'$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot 0+f_2'\cdot x+f_3'\cdot xz=xf_2'+xzf_3',\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=f_3'\cdot xy=xyf_3'.$$

9 设 $z=xy+xF(u)$,而 $u=\dfrac{y}{x}$,$F(u)$ 均为可导函数,证明:

$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy.$$

【证】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+xF'(u)\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+F(u)=F(u)+y-\dfrac{y}{x}F'(u)$.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+xF'(u)\cdot\frac{1}{x}=x+F'(u),$$

$$\begin{aligned}x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}&=x\left[F(u)+y-\frac{F'(u)y}{x}\right]+y[y+F'(u)]\\&=xF(u)+xy-yF'(u)+xy+yF'(u)\\&=xy+xF(u)+xy=z+xy.\end{aligned}$$

10 设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$,其中 $f(u)$ 为可导函数,验证:$\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

【证】 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{yf'\cdot 2x}{f^2}=-\dfrac{2xyf'}{f^2}$, $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{f-y\cdot f'\cdot(-2y)}{f^2}=\dfrac{f+2y^2f'}{f^2}$,

所以 $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2yf'}{f^2}+\dfrac{f+2y^2f'}{yf^2}=\dfrac{1}{yf}=\dfrac{y}{f}\cdot\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{z}{y^2}$.

11 设 $z=f(x^2+y^2)$,其中 f 具有二阶导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf'$, $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=2yf'$, $\quad\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'+2x\cdot 2xf''=2f'+4x^2f''$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf''\cdot 2y=4xyf''.$$

由对称性,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'+4y^2f''$.

12 求下列函数的 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$(其中 f 具有二阶连续偏导数):

(1) $z=f(xy,y)$;　　(2) $z=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$;

(3) $z=f(xy^2,x^2y)$;　　(4) $z=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})$.

【解】(1) $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot y + f_2' \cdot 0 = yf'$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xf_1' + f_2' \cdot 1 = xf_1' + f_2', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y \cdot f_{11}'' \cdot y = y^2 f_{11}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1' + y(f_{11}'' x + f_{12}'' \cdot 1) = f_1' + xyf_{11}'' + yf_{12}'',$$

由于$f_{12}'' = f_{21}''$,所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 f_{11}'' + 2xf_{12}'' + f_{22}''$.

(2) 由 $z = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$可求得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot 1 + f_2' \cdot \frac{1}{y} = f_1' + \frac{1}{y} f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{11}'' + f_{12}'' \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{y}\left(f_{21}'' + f_{22}'' \cdot \frac{1}{y}\right) = f_{11}'' + f_{12}'' \cdot \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2} f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{12}'' \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) - \frac{1}{y^2} f_2' + \frac{1}{y} f_{22}'' \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}\left(f_{12}'' + \frac{1}{y} f_{22}''\right) - \frac{1}{y^2} f_2',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_2'\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2} f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3} f_2' - \frac{x}{y^2} f_{22}'' \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{2x}{y^3} f_2' + \frac{x^2}{y^4} f_{22}''.$$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot y^2 + f_2' \cdot 2xy = y^2 f_1' + 2xyf_2'$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= y^2(f_{11}'' \cdot y^2 + f_{12}'' \cdot 2xy) + 2yf_2' + 2xy(f_{21}'' \cdot y^2 + f_{22}'' \cdot 2xy) \\ &= 2yf_2' + y^4 f_{11}'' + 4xy^3 f_{12}'' + 4x^2 y^2 f_{22}'',\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2yf_1' + y^2(f_{11}'' \cdot 2xy + f_{12}'' \cdot x^2) + 2xf_2' + 2xy(f_{21}'' \cdot 2xy + f_{22}'' \cdot x^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_1' \cdot 2xy + f_2' \cdot x^2 = 2xyf_1' + x^2 f_2',$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 2xf_1' + 2xy(f_{11}'' \cdot 2xy + f_{12}'' \cdot x^2) + x^2(f_{21}'' \cdot 2xy + f_{22}'' \cdot x^2) \\ &= 2xf_1' + 4x^2 y^2 f_{11}'' + 4x^3 y f_{12}'' + x^4 f_{22}''.\end{aligned}$$

(4) $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot \cos x + f_3' \cdot e^{x+y} = \cos x f_1' + e^{x+y} f_3'$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\sin x f_1' + \cos x(f_{11}'' \cdot \cos x + f_{13}'' \cdot e^{x+y}) + e^{x+y} f_3' + e^{x+y}(f_{31}'' \cos x + f_{33}'' \cdot e^{x+y}) \\ &= e^{x+y} f_3' - \sin x f_1' + \cos^2 x f_{11}'' + 2e^{x+y} \cos x f_{13}'' + e^{2(x+y)} \cdot f_{33}'',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \cos x[f_{12}'' \cdot (-\sin y) + f_{13}'' \cdot e^{x+y}] + e^{x+y} f_3' + e^{x+y} \cdot [f_{32}'' \cdot (-\sin y) + f_{33}'' \cdot e^{x+y}] \\ &= e^{x+y} f_3' - \cos x \sin y f_{12}'' + e^{x+y} \cos x f_{13}'' - e^{x+y} \cos y f_{32}'' + e^{2(x+y)} f_{33}'',\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_2'(-\sin y) + f_3' e^{x+y} = -\sin y f_2' + e^{x+y} f_3',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\cos y f_2' - \sin y[f_{22}''(-\sin y) + f_{23}'' \cdot e^{x+y}] + e^{x+y}f_3' + e^{x+y}[f_{32}''(-\sin y) + f_{33}'' \cdot e^{x+y}]$$

$$= e^{x+y}f_3' - \cos y f_2' + \sin^2 y f_{22}'' - 2e^{x+y}\sin y f_{23}'' + e^{2(x+y)}f_{33}''.$$

13 设 $u = f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续,而 $x = \frac{s-\sqrt{3}t}{2}, y = \frac{\sqrt{3}s+t}{2}$,证明:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \text{及} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

【证】 解方程组 $\begin{cases} x = \frac{s-\sqrt{3}t}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{3}s+t}{2}, \end{cases}$ 得 $s = \frac{\sqrt{3}y+x}{2}, t = \frac{y-\sqrt{3}x}{2}.$

因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial t},$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t},$$

所以 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial s \cdot \partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial t}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \frac{3}{4}\frac{\partial^u}{\partial t^2} + \frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$

习题9－5 隐函数的求导公式

1 设 $\sin y+e^x-xy^2=0$,求$\frac{dy}{dx}$.

【解法一】 用隐函数求导公式,设 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$,则 $F_x=e^x-y^2$,$F_y=\cos y-2xy$.

所以
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}=\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}.$$

【解法二】 方程两边对 x 求导,得
$$\cos y\cdot y'+e^x-(y^2+x\cdot 2yy')=0\Rightarrow\quad y'=\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}.$$

2 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$,求$\frac{dy}{dx}$.

【解】 设 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\arctan\frac{y}{x}$,

因为 $F_x=\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x+y}{x^2+y^2}$,

$$F_y=\frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y-x}{x^2+y^2},$$

所以
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{x+y}{x-y}.$$

3 设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 方程两边求全微分,得
$$dx+2dy+dz-\frac{2(yzdx+xzdy+xydz)}{2\sqrt{xyz}}=0,$$
$$\frac{\sqrt{xyz}-xy}{\sqrt{xyz}}dz=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}}dx+\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}}dy.$$

则
$$dz=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}dx+\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}dy.$$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$$

4 设$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解法一】 设 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}=\frac{x}{z}-\ln z+\ln y$,则
$$F_x=\frac{1}{z},\quad F_y=\frac{1}{y},\quad F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}=-\frac{x+z}{z^2}.$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x+z}{z^2}}=\frac{z}{x+z}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{x+z}{z^2}}=\frac{z^2}{y(x+z)}$.

【解法二】 利用全微分形式的不变性,原方程可变为$\frac{x}{z}=\ln z-\ln y$,两边取全微分得

$$d\left(\frac{x}{z}\right)=d\ln z-d\ln y \quad\Rightarrow\quad \frac{zdx-xdz}{z^2}=\frac{1}{z}dz-\frac{1}{y}dy.$$

解得 $dz=\frac{z}{z+x}dx+\frac{z^2}{y(x+z)}dy$,从而$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{z+x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$.

5 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$,证明: $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

【证】 设 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$,因为

$$F_x=2\cos(x+2y-3z)-1,\quad F_y=4\cos(x+2y-3z)-2,$$
$$F_z=2\cos(x+2y-3z)\cdot(-3)+3=-6\cos(x+2y-3z)+3,$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{6\cos(x+2y-3z)-3}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{4\cos(x+2y-3z)-2}{6\cos(x+2y-3z)-3}$,

故 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

6 设 $x=x(y,z)$,$y=y(x,z)$,$z=z(x,y)$ 都是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数,证明: $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

【证】 因为 $\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x}$, $\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$,所以

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\cdot\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\cdot\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-1.$$

7 设 $\varphi(u,v)$ 具有连续偏导数,证明由方程 $\varphi(cx-ax,cy-bz)=0$ 确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

【证】 方程两边对 x 求导得 $\varphi_1'\left(c-a\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\varphi_2'\left(-b\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$,解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\varphi_1' c}{\varphi_1' a+\varphi_2' b}, \tag{①}$$

类似可得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi_2' c}{a\varphi_1'+b\varphi_2'}. \tag{②}$$

由 ①,② 得 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

8 设 $e^z-xyz=0$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【解】 方程两边对 x 求导,得 $e^z\frac{\partial z}{\partial x}-yz-xy\frac{\partial z}{\partial x}=0$.

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{e^z-xy}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(e^z-xy)\cdot y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-yz\left(e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)}{(e^z-xy)^2}$$

$$= \frac{(e^z - xy)\dfrac{y^2 z}{e^z - xy} - yz\left(\dfrac{yze^z}{e^z - xy} - y\right)}{(e^z - xy)^2} = \frac{2y^2 ze^z - 2xy^3 z - y^2 z^2 e^z}{(e^z - xy)^3}.$$

9 设 $z^3 - 3xyz = a^3$,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

【解】 设 $F(x,y,z) = z^3 - 3xyz - a^3$,则

$$F_x = -3yz, \quad F_y = -3xz, \quad F_z = 3z^2 - 3xy,$$

进而 $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}.$$

所以 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{z^2 - xy}\right) = \frac{(z^2 - xy)\left(z + y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) - yz\left(2z\dfrac{\partial z}{\partial y} - x\right)}{(z^2 - xy)^2}$$

$$= \frac{(z^2 - xy)\left(z + \dfrac{xyz}{z^2 - xy}\right) - yz\left(\dfrac{2xz^2}{z^2 - xy} - x\right)}{(z^2 - xy)^2} = \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}.$$

10 求由下列方程组确定的函数的导数或偏导数:

(1) 设$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20, \end{cases}$ 求$\dfrac{dy}{dx}$,$\dfrac{dz}{dx}$; (2) 设$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$ 求$\dfrac{dx}{dz}$,$\dfrac{dy}{dz}$;

(3) 设$\begin{cases} u = f(ux, v + y), \\ v = g(u - x, v^2 y), \end{cases}$ 其中 f,g 具有一阶连续偏导数,求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$,$\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

(4) 设$\begin{cases} x = e^u + u\sin v, \\ y = e^u - u\cos v, \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$,$\dfrac{\partial u}{\partial y}$,$\dfrac{\partial v}{\partial x}$,$\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

【解】 (1) 原方程组变为 $\begin{cases} y^2 - z = -x^2, \\ 2y^2 + 3z^2 = 20 - x^2, \end{cases}$ 方程两边对 x 求导,得

$$\begin{cases} 2y\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{dz}{dx} = -2x, \\ 2y\dfrac{dy}{dx} + 3z\dfrac{dz}{dx} = -x. \end{cases}$$

当 $D = \begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 3z \end{vmatrix} = 6yz + 2y \neq 0$ 时,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} -2x & -1 \\ -x & 3z \end{vmatrix} = \frac{-6xz - x}{6yz + 2y} = -\frac{x(6z+1)}{2y(3z+1)},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2y & -2x \\ 2y & -x \end{vmatrix} = \frac{2xy}{6yz + 2y} = \frac{x}{3z + 1}.$$

(2) 方程组两边对 z 求导,得 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} + \dfrac{dy}{dz} + 1 = 0, \\ 2x\dfrac{dx}{dz} + 2y\dfrac{dy}{dz} + 2z = 0, \end{cases}$ 解关于$\dfrac{dx}{dz}$,$\dfrac{dy}{dz}$的方程组得

$$\frac{dx}{dz} = \frac{y - z}{x - y}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{z - x}{x - y}.$$

(3) 方法 1° 用雅可比行列式解

设 $F(u,v,x,y)=f(ux,v+y)-u,\quad G(u,v,x,y)=g(u-x,v^2y)-v$,则

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}xf_1'-1 & f_2'\\ g_1' & 2vyg_2'-1\end{vmatrix}=(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'.$$

因为 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}uf_1' & f_2'\\ -g_1' & 2yvg_2'-1\end{vmatrix}=uf_1'(2yvg_2'-1)+f_2'g_1'$,

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}xf_1'-1 & uf_1'\\ g_1' & -g_1'\end{vmatrix}=g_1'(-xf_1'-uf_1'+1),$$

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\dfrac{-uf_1'(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}$,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=\frac{g_1'(xf_1'+uf_1'-1)}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}.$$

方法2° 方程组两边对 x 求导,得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\left(u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+f_2'\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=g_1'\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1\right)+g_2'\cdot 2yv\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}(xf_1'-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_2'\dfrac{\partial v}{\partial x}=-uf_1',\\ g_1'\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2yvg_2'-1)\dfrac{\partial v}{\partial x}=g_1'.\end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix}xf_1'-1 & f_2'\\ g_1' & 2yvg_2'-1\end{vmatrix}=(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'\cdot g_1'\neq 0$ 时,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}-uf_1' & f_2'\\ g_1' & 2yvg_2'-1\end{vmatrix}=\frac{-uf_1'(2yvg_2'-1)-f_2'\cdot g_1'}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'\cdot g_1'},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}xf_1'-1 & -uf_1'\\ g_1' & g_1'\end{vmatrix}=\frac{g_1'(xf_1'+uf_1'-1)}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'\cdot g_1'}.$$

(4)$u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$ 是已知函数的反函数,方程组两边对 x 求导,得

$$\begin{cases}1=e^u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial x}\sin v+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x},\\ 0=e^u\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos v-u(-\sin v)\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}(e^u+\sin v)\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x}=1,\\ (e^u-\cos v)\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}$$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\cos v-e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$.

方程组两边对 y 求导得

$$\begin{cases}0=e^u\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\sin v+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ 1=e^u\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos v+u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y},\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}(e^u+\sin v)\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\ (e^u-\cos v)\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y}=1,\end{cases}$$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\sin v+e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$.

11 设 $y=f(x,t)$,而 $t=t(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的函数,其中 f,F 都具有

一阶连续偏导数,试证明

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

【证】 由方程 $y=f(x,t)$ 和 $F(x,y,t)=0$ 确定了两个一元隐函数 $y=y(x),t=t(x)$. 方程两边对 x 求导,得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}, & ①\\ \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0. & ②\end{cases}$$

参照所证式子右端中分母的形式,将以上方程组中 ① $\times\frac{\partial F}{\partial t}$ + ② $\times\frac{\partial f}{\partial t}$,得

$$\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t},$$

即

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

习题9－6 多元函数微分学的几何应用

1 设 $\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\boldsymbol{i}+f_2(t)\boldsymbol{j}+f_3(t)\boldsymbol{k},\boldsymbol{g}(t)=g_1(t)\boldsymbol{i}+g_2(t)\boldsymbol{j}+g_3(t)\boldsymbol{k},\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{u}$, $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{v}$,证明:$\lim\limits_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)]=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$.

【证】 $$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)]=\lim_{t\to t_0}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ f_1(t)&f_2(t)&f_3(t)\\ g_1(t)&g_2(t)&g_3(t)\end{vmatrix}$$

$$=\lim_{t\to t_0}\Big(f_2(t)g_3(t)-f_3(t)g_2(t),\ f_3(t)g_1(t)-f_1(t)g_3(t),f_1(t)g_2(t)-f_2(t)g_1(t)\Big)$$

$$=\Big(\lim_{t\to t_0}[f_2(t)g_3(t)-f_3(t)g_2(t)],\lim_{t\to t_0}[f_3(t)g_1(t)-f_1(t)g_3(t)],$$

$$\lim_{t\to t_0}[f_1(t)g_2(t)-f_2(t)g_1(t)]\Big),$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \lim\limits_{t\to t_0}f_1(t)&\lim\limits_{t\to t_0}f_2(t)&\lim\limits_{t\to t_0}f_3(t)\\ \lim\limits_{t\to t_0}g_1(t)&\lim\limits_{t\to t_0}g_2(t)&\lim\limits_{t\to t_0}g_3(3)\end{vmatrix}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}.$$

这个结果表示:两上向量值函数的向量积的极限等于它们各自的极限(向量)的向量积,即

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)]=[\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)]\times[\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{g}(t)].$$

2 下列各题中，$\boldsymbol{r}=f(t)$ 是空间中的质点 M 在时刻 t 的位置，求质点 M 在时刻 t_0 的速度向量和加速度向量，以及在任意时刻 t 的速率．

(1) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(t+1)\boldsymbol{i}+(t^2-1)\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k},t_0=1$；

(2) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(2\cos t)\boldsymbol{i}+(3\sin t)\boldsymbol{j}+4t\boldsymbol{k},t_0=\dfrac{\pi}{2}$；

(3) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=[2\ln(t+1)]\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+\dfrac{1}{2}t^2\boldsymbol{k},t_0=1$．

【解】 (1) 速度向量 $\boldsymbol{v}_0=\left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=(\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\big|_{t=1}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，

加速度向量 $\boldsymbol{a}_0=\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=1}=2\boldsymbol{j}$， 速率 $|\boldsymbol{v}(t)|=|\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\sqrt{5+4t^2}$．

(2) 速度向量 $\boldsymbol{v}_0=\left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=[(-2\sin t)\boldsymbol{i}+(3\cos t)\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}]_{t=\frac{\pi}{2}}=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$，

加速度向量 $\boldsymbol{a}_0=\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=[(-2\cos t)\boldsymbol{i}-(3\sin t)\boldsymbol{j}]t_{=\frac{\pi}{2}}=-3\boldsymbol{j}$，

速率 $|\boldsymbol{v}(t)|=|(-2\sin t)\boldsymbol{i}+(3\cos t)\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}|=\sqrt{9\cos^2t+4\sin^2t+16}=\sqrt{20+5\cos^2t}$.

(3) 速度向量 $\boldsymbol{v}_0=\left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=\left.\left(\dfrac{2}{t+1}\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}\right)\right|_{t=1}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，

加速度向量 $\boldsymbol{a}_0=\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=1}=\left[-\dfrac{2}{(t^2+1)^2}\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\right]_{t=1}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，

速率 $|\boldsymbol{v}(t)|=\left|\dfrac{2}{t+1}\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}\right|=\sqrt{5t^2+\dfrac{4}{(t+1)^2}}$.

3 求曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(t-\sin t)\boldsymbol{i}+(1-\cos t)\boldsymbol{j}+\left(4\sin\dfrac{t}{2}\right)\boldsymbol{k}$ 在与 $t_0=\dfrac{\pi}{2}$ 相应的点处的切线及法平面方程．

【解】 与 $t_0=\dfrac{\pi}{2}$ 相应的点为 $\left(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$，曲线在该点处的切向量为 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{f}'(t_0)=(1,1,\sqrt{2})$，于是所求切线方程与法平面方程分别为

$$\frac{x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$1\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}+1\right)+1\cdot(y-1)+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2})=0,\text{即}\quad x+y+\sqrt{2}z=\frac{\pi}{2}+4.$$

4 求曲线 $x=\dfrac{t}{1+t},\quad y=\dfrac{1+t}{t},\quad z=t^2$ 在对应于 $t=1$ 的点处的切线及法平面方程．

【解】 $x'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2},\qquad y'(t)=-\dfrac{1}{t^2},\qquad z'(t)=2t$，

$x'(1)=1/4,\qquad y'(1)=-1,\qquad z'(1)=2.$

$t=1$ 时曲线上的对应点为 $\left(\dfrac{1}{2},2,1\right)$，则在该点处切线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1/4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{8}.$$

法平面方程为 $\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)-(y-2)+2(z-1)=0$,即 $2x-8y+16z-1=0$.

5 求曲线 $y^2=2mx,z^2=m-x$ 在点(x_0,y_0,z_0)处的切线及法平面方程.

【解】 将方程 $y^2=2mx$, $z^2=m-x$ 两边分别对 x 求导,得

$$2y\frac{dy}{dx}=2m,\quad 2z\frac{dz}{dx}=-1\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}=\frac{m}{y},\quad\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{2z}.$$

曲线在点(x_0,y_0,z_0)处的切向量为$\left\{1,\frac{m}{y_0},-\frac{1}{2z_0}\right\}$,则切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\frac{m}{y_0}}=\frac{z-z_0}{-\frac{1}{2z_0}};$$

法平面方程为 $(x-x_0)+\frac{m}{y_0}(y-y_0)-\frac{1}{2z_0}(z-z_0)=0$.

6 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点$(1,1,1)$处的切线与法平面方程.

【解】 方程组两边对 x 求导,得

$$\begin{cases}2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}-3=0,\\[2mm]2-3\frac{dy}{dx}+5\frac{dz}{dx}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=-2x+3,\\[2mm]3\frac{dy}{dx}-5\frac{dz}{dx}=2.\end{cases}$$

解之,得 $\frac{dy}{dx}=\frac{10x-4z-15}{-10y-6z}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{6x+4y-9}{-10y-6z}$.

因为 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1,1)}=\frac{9}{16}$, $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,1,1)}=-\frac{1}{16}$,所以切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{9/16}=\frac{z-1}{-1/16},\text{即}\quad\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1};$$

法平面方程为 $(x-1)+\frac{9}{16}(y-1)-\frac{1}{16}(z-1)=0$,即 $16x+9y-z-24=0$.

7 求出曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上的点,使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

【解】 $x'=1,y'=2t,z'=3t^2$,于是设切线的切向量为$\{1,2t,3t^2\}$.因为平面的法向量为$\{1,2,1\}$,而切线与此平面平行,所以

$$\{1,2t,3t^2\}\cdot\{1,2,1\}=0,\text{即}1+4t+3t^2=0,\text{解得}t=-\frac{1}{3}\text{及}t=-1.$$

故所求点的坐标为$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)$及$(-1,1,-1)$.

8 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点$(2,1,0)$处的切平面及法线方程.

【解】 设 $F(x,y,z)=e^z-z+xy-3$,则 $\boldsymbol{n}=\{F_x,F_y,F_z\}=\{y,x,e^z-1\}$.
在点$(2,1,0)$处,切平面法向量为$\{1,2,0\}$,切平面方程为

$$(x-2)+2(y-1)+0(z-0)=0, \text{即} \quad x+2y-4=0.$$

法线方程为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-0}{0}$.

9 求曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面及法线方程.

【解】 设 $F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2-1$,

$$\boldsymbol{n}=\{F_x,F_y,F_z\}=\{2ax,2by,2cz\}=2\{ax,by,cz\}.$$

在点 (x_0,y_0,z_0) 处,法向量为 $\{ax_0,by_0,cz_0\}$. 故切平面方程为

$$ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)=0, \text{即} \quad ax_0x+by_0y+cz_0z=1.$$

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{ax_0}=\dfrac{y-y_0}{by_0}=\dfrac{z-z_0}{cz_0}$.

10 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

【解】 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$,则切平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{2x,4y,2z\}$.

因平面 $x-y+2z=0$ 的法向量为 $\{1,-1,2\}$,所以 $\dfrac{2x}{1}=\dfrac{4y}{-1}=\dfrac{2z}{2}$,

得 $y=-\dfrac{1}{2}x, z=2x$,代入椭球面方程,得 $x^2+2\left(-\dfrac{1}{2}x\right)^2+(2x)^2=1$,

解得 $x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{11}}$,因而切点坐标为 $\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{11}}, \mp\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{11}}, \pm\sqrt{\dfrac{2}{11}}\right)$. 所求切平面方程为

$$\left(x\mp\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-\left(y\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\right)+2\left(z\mp\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0, \text{即} \quad x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

11 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(-1,-2,3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

【解】 设 $F(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2-16$,切平面法向量 $\boldsymbol{n}=\{F_x,F_y,F_z\}=\{6x,2y,2z\}$.

在点 $(-1,-2,3)$ 处,$\boldsymbol{n}=\{-6,-4,6\}$,$xOy$ 面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\{0,0,1\}$,所以切平面与 xOy 面的夹角 γ 的余弦为

$$\cos\gamma=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{n}_1|}=\frac{-6\times0+(-4)\times0+6\times1}{\sqrt{(-6)^2+4^2+6^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{22}}.$$

12 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\,(a>0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

【证】 设 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$,有

$$F_x=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad F_y=\frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad F_z=\frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

则曲面在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

即
$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}.$$

化为截距式得$\dfrac{x}{\sqrt{ax_0}}+\dfrac{y}{\sqrt{ay_0}}+\dfrac{z}{\sqrt{az_0}}=1$.所以切平面在各坐标轴上的截距之和为

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a.$$

13 设$\boldsymbol{u}(t)$、$\boldsymbol{v}(t)$是可导的向量值函数,证明:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\pm\boldsymbol{v}'(t)$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}'(t)$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\times\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}'(t)$.

【证】 (1)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)]&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\pm\boldsymbol{v}(t+\Delta t)]-[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)]}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\pm\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}=\boldsymbol{u}'(t)\pm\boldsymbol{v}'(t),\end{aligned}$$

其中用到了向量值函数的极限的四则运算法则.

$$\begin{aligned}(2)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)]&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\cdot\boldsymbol{v}(t+\Delta t)]-[\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)]}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\cdot\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t+\Delta t)}{\Delta t}+\\&\quad\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\\&=\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\right]\cdot\left[\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{v}(t+\Delta t)\right]+\left[\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{u}(t)\right]\cdot\\&\quad\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\right]\\&=\boldsymbol{u}'(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}'(t),\end{aligned}$$

其中用到了向量值函数极限的四则运算法则以及数量积与极限运算次序的交换.

(3)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)]=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\times\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\times\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+\Delta t)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\times\boldsymbol{v}(t+\Delta t)\right]+\lim_{\Delta t\to 0}\left[\boldsymbol{u}(t)\times\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\right]$$

$$=\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\right]\times\left[\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{v}(t+\Delta t)\right]+\left[\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{u}(t)\right]\times\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\right]$$

$$=\boldsymbol{u}'(t)\times\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}'(t),$$

其中用到了向量值函数极限的四则运算法则以及向量积与极限运算次序的交换.

习题9－7 方向导数与梯度

1 求函数$z=x^2+y^2$在点$M(1,2)$处沿从点$M(1,2)$到点$N(2,2+\sqrt{3})$的方向的方向

导数.

【解】 方向 l 是向量 $\overrightarrow{MN}=\{2-1,2+\sqrt{3}-2\}=\{1,\sqrt{3}\}$. x 轴到方向 l 的转角 φ 的正、余弦分别为

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\varphi=\frac{1}{2}.$$

因为 $\dfrac{\partial z}{\partial l}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi+\dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi=2x\cdot\dfrac{1}{2}+2y\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=x+\sqrt{3}y$,

所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}=1+2\sqrt{3}$.

2 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点(1,2)处,沿着抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

【解】 设 l 表示 $y^2=4x$ 在(1,2)处偏向 x 轴正向的切线方向,x 轴正向到 l 的转角为 φ,它是第一象限的角. $y^2=4x$ 两边对 x 求导,得 $y'=\dfrac{2}{y}$,即 $\tan\varphi=y'\big|_{(1,2)}=1$,所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$,

$\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 于是

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi=\frac{1}{x+y}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{x+y}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{x+y},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3 求函数 $z=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$在点$\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$处沿曲线$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数.

【解】 设 x 轴正向到椭圆内法线方向 l 的转角为 φ,它是第三象限的角,因为

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0,\quad y'=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

所以在点$\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$处切线斜率为 $y'\big|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\dfrac{b^2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}}{a^2\cdot\frac{b}{\sqrt{2}}}=-\dfrac{b}{a}$.

法线斜率 $\tan\varphi=\dfrac{a}{b}$. 于是 $\cos\varphi=-\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2}{a^2}x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2}{b^2}y$,所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{2}{a^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)-\frac{2}{b^2}.\ \frac{b}{\sqrt{2}}\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

4 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点(1,1,2)处沿方向角为 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$,$\beta=\dfrac{\pi}{4}$,$\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数.

【解】 因为$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2-yz,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2xy-xz,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=3z^2-xy,$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,2)}=-1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,2)}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,2)}=11,$$

$$\boldsymbol{e}_l=\left(\cos\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{4},\cos\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right),$$

所以 $$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,2)}=-1\cdot\frac{1}{2}+0+11\cdot\frac{1}{2}=5.$$

5 求函数 $u=xyz$ 在点(5,1,2)处沿从点(5,1,2)到点(9,4,14)的方向的方向导数.

【解】 按题意,方向 $l=(4,3,12)$,$\boldsymbol{e}_l=\left(\frac{4}{13},\frac{3}{13},\frac{12}{13}\right)$.

又 $$\frac{\partial u}{\partial x}=yz,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xz,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=xy,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(5,1,2)}=2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(5,1,2)}=10,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(5,1,2)}=5,$$

故 $$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(5,1,2)}=2\cdot\frac{4}{13}+10\cdot\frac{3}{13}+5\cdot\frac{12}{13}=\frac{98}{13}.$$

6 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上点(1,1,1)处,沿曲线在该点的切线正方向(对应于 t 增大的方向)的方向导数.

【解】 点(1,1,1)对应的 $t=1$,在该点处切向量

$$\boldsymbol{T}=\{x'(1),y'(1),z'(1)\}=\{1,2,3\}.$$

于是 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}.$

因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2z$,所以

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{T}}\right|_{(1,1,1)}=2\times\frac{1}{\sqrt{14}}+2\times\frac{2}{\sqrt{14}}+2\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{6}{7}\sqrt{14}.$$

7 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点(x_0,y_0,z_0)处,沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

【解】 球面在点(x_0,y_0,z_0)处的外法线向量为 $\boldsymbol{T}=\{2x_0,2y_0,2z_0\}$,则

$$|\boldsymbol{T}|=\sqrt{4x_0^2+4y_0^2+4z_0^2}=2,\quad \boldsymbol{T}^0=\{x_0,y_0,z_0\},$$

从而 $\cos\alpha=x_0,\cos\beta=y_0,\cos\gamma=z_0$,又

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=1,$$

故所求的方向导数为$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{T}}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=1\times x_0+1\times y_0+1\times z_0=x_0+y_0+z_0.$

8 设$f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$,求 $\mathbf{grad}\,f(0,0,0)$ 及 $\mathbf{grad}\,f(1,1,1)$.

【解】 $\mathbf{grad}\,f(x,y,z)=f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k}=(2x+y+3)\boldsymbol{i}+(4y+x-2)\boldsymbol{j}+(6z-6)\boldsymbol{k}$,则

$$\mathbf{grad}\,f(0,0,0)=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k},\quad \mathbf{grad}\,f(1,1,1)=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}.$$

9 设函数 $u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$ 的各个偏导数都存在且连续，证明：

(1) $\nabla(Cu)=C\nabla u$（其中 C 为常数）； (2) $\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$；

(3) $\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$； (4) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$.

【证】 (1) $\nabla(Cu)=\left(C\dfrac{\partial u}{\partial x},C\dfrac{\partial u}{\partial y},C\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)=C\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)=C\nabla u$.

(2) $\nabla(u\pm v)=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\pm\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}\pm\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\pm\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\pm\left(\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)=\nabla u\pm\nabla v$.

$$(3)\ \nabla(uv)=\left(\frac{\partial}{\partial x}(uv),\frac{\partial}{\partial y}(uv),\frac{\partial}{\partial z}(uv)\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}v+u\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}v+u\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$=v\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)=v\nabla u+u\nabla v.$$

$$(4)\ \nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right),\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{v}\right)\right)$$
$$=\left(\frac{v\dfrac{\partial u}{\partial x}-u\dfrac{\partial v}{\partial x}}{v^2},\ \frac{v\dfrac{\partial u}{\partial y}-u\dfrac{\partial v}{\partial y}}{v^2},\ \frac{v\dfrac{\partial u}{\partial z}-u\dfrac{\partial v}{\partial z}}{v^2}\right)$$
$$=\frac{1}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{u}{v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial z}\right)=\frac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}.$$

10 求函数 $u=xy^2z$ 在点 $P_0(1,-1,2)$ 处变化最快的方向，并求沿这个方向的方向导数.

【解】 $\nabla u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}=y^2z\boldsymbol{i}+2xyz\boldsymbol{j}+xy^2\boldsymbol{k}$，$\nabla u\big|_{P_0}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

由方向导数与梯度的关系可知，$u=xy^2z$ 在 P_0 处沿 $\boldsymbol{n}=\nabla u\big|_{P_0}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的方向增加最快，其方向导数为 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_{P_0}=\left|\nabla u|_{P_0}\right|=|2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}|=\sqrt{21}$；

沿 $\boldsymbol{n}_1=-\nabla u\big|_{P_0}=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 方向减少最快，其方向导数为 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}_1}\bigg|_{P_0}=-\sqrt{21}$.

习题 9－8 多元函数的极值及其求法

1 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 某邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(D) 根据所给条件无关判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

【分析】 由条件 $\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}[f(x,y)-xy]=0\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=f(0,0)=0$. 由极限与无穷小的关系 $\Rightarrow\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1+o(1)\quad(\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to0)$

$$\Rightarrow\quad f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2+o((x^2+y^2)^2)=xy+o(\rho^2)\quad(\rho\to0).\qquad ⊛$$

当 $y=x$ 时，$f(x,y)-f(0,0)=x^2[1+o(1)]>0\quad(\rho<0$ 时），

当 $y=-x$ 时，$f(x,y)-f(0,0)=-x^2[1+o(1)]<0\quad(\rho>\delta$ 时），

其中 δ 是充分小的正数．因此，$(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点．应选（A）．

❷ 求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值．

【解】 由于驻点为 $(2,-2)$，则

$f_{xx}=-2,\ f_{xy}=0,\ f_{yy}=-2$，又 $B^2-AC<0,\ A=-2<0$，

所以 $f(x,y)$ 在 $(2,-2)$ 有极大值 $f(2,-2)=8$．

❸ 求函数 $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$ 的极值．

【解】 解方程组

$$\begin{cases}f_x(x,y)=(6-2x)(4y-y^2)=0,\\ f_y(x,y)=(6x-x^2)(4-2y)=0,\end{cases}$$

得 $x=3,y=0,y=4$ 及 $x=0,x=6,y=2$．则驻点是：$(3,2),(0,0),(0,4),(6,0),(6,4)$．

$f_{xx}(x,y)=-2(4y-y^2),\quad f_{xy}(x,y)=4(3-x)(2-y),\quad f_{yy}(x,y)=-2(6x-x^2)$，

在点 $(3,2)$ 处，$A=-8,B=0,C=-18,B^2-AC=-8\times18<0$，且 $A<0$．所以函数有极大值 $f(3,2)=36$．

在点 $(0,0)$ 处，$A=0,B=24,C=0,B^2-AC>0$，所以 $(0,0)$ 点不是极值点．

在点 $(0,4)$ 处，$A=0,B=-24,C=0,B^2-AC>0$．所以 $(0,4)$ 不是极值点．

在点 $(6,0)$ 处，$A=0,B=-24,C=0,B^2-AC>0$，所以 $(6,0)$ 不是极值点．

在点 $(6,4)$ 处，$A=0,B=24,C=0,B^2-AC>0$，所以 $(6,4)$ 不是极值点．

❹ 求函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值．

【解】 解方程组 $\begin{cases}f_x(x,y)=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0,\\ f_y(x,y)=2e^{2x}(y+1)=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad$ 驻点 $\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$．

$$f_{xx}(x,y)=4e^{2x}(x+y^2+2y+1),\quad f_{xy}(x,y)=4e^{2x}(y+1),\quad f_{yy}(x,y)=2e^{2x}.$$

在点 $\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$ 处，$A=2e,B=0,C=2e,B^2-AC=-4e^2<0$，又 $A>0$，所以函数有极小值

$f\left(\dfrac{1}{2},-1\right)=-\dfrac{e}{2}$．

❺ 求函数 $z=xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值．

【解】 本题可化为无条件极值问题求解．由 $x+y=1$ 得 $y=1-x$，代入 z 中，得

$$z=x(1-x)=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}.$$

所以 $x=\dfrac{1}{2}$ 是极大值点，函数的极大值为 $z\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4}$．

❻ 从斜边长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形．

【解】 设直角三角形两直角边的长分别为 x,y，则周长 $p=x+y+l\quad(x>0,y>0)$，约束条件为 $x^2+y^2=l^2$．设 $F(x,y)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2)$，有

$$\begin{cases} F'_x = 1 + 2\lambda x = 0, & ① \\ F'_y = 1 + 2\lambda y = 0, & ② \\ x^2 + y^2 = l^2, & ③ \end{cases}$$

将 ① · y − ② · x 得 $y = x$,代入 ③ 可求出　$x = y = \dfrac{l}{\sqrt{2}}$.

因$\left(\dfrac{l}{\sqrt{2}},\dfrac{l}{\sqrt{2}}\right)$是唯一驻点,由问题的实际意义可知存在周长最大的直角三角形,故周长最大的是等腰直角三角形,最大周长为$(1+\sqrt{2})l$.

7 要造一个体积等于定数 k 的长方体无盖水池,应如何选择水池的尺寸,方可使它的表面积最小.

【解】 设长方体无盖水池的长、宽、高分别为 x,y,z,则体积　$V = xyz = k$,其表面积为

$$S = xy + 2xz + 2yz.$$

作 $F(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - k)$,有

$$\begin{cases} F'_x = y + 2z + \lambda yz = 0, \\ F'_y = x + 2z + \lambda xz = 0, \\ F'_z = 2x + 2y + \lambda xy = 0, \\ xyz = k. \end{cases}$$

由前 3 个方程得 $\lambda = -\dfrac{y+2z}{yz} = -\dfrac{x+2z}{xz} = -\dfrac{2x+2y}{xy}$,

于是 $y = x, z = \dfrac{1}{2}x$,代入第 4 个方程,得　$x = y = \sqrt[3]{2k}, z = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$.

因实际问题存在最小值,且只有唯一的驻点,所以当长、宽均为$\sqrt[3]{2k}$,高为$\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$时,水池的表面积最小,最小表面积为 $3\sqrt[3]{4k^2}$.

8 在平面 xOy 上求一点,使它到 $x = 0, y = 0$ 及 $x + 2y - 16 = 0$ 三直线的距离平方之和为最小.

【解】 设所求点为 $P(x,y)$,P 点到 $x = 0$ 的距离为 $|y|$,到 $y = 0$ 的距离为 $|x|$,到直线 $x + 2y - 16 = 0$ 的距离为

$$\frac{|x+2y-16|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|x+2y-16|}{\sqrt{5}},$$

距离的平方和为　$z = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{5}(x+2y-16)^2$.

由
$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + \dfrac{2}{5}(x+2y-16) = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y + \dfrac{4}{5}(x+2y-16) = 0 \end{cases}$$

得唯一驻点$\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$,因实际问题存在最小值,故点$\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$即为所求.

9 将周长为$2p$的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体，问矩形的边长各为多少时，才可使圆柱体的体积为最大？

【解】 用拉格朗日乘数法解．设 $F(x,y)=\pi x^2y+\lambda(x+y-p)$，解方程组

$$\begin{cases}F'_x=2\pi xy+\lambda=0,\\F'_y=\pi x^2+\lambda=0,\\x+y=p,\end{cases}$$

得 $x=\dfrac{2}{3}p,y=\dfrac{1}{3}p$，所以矩形的长为$\dfrac{2}{3}p$，宽为$\dfrac{1}{3}p$，最大体积为 $V=\dfrac{4\pi p^3}{27}$．

10 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体．

【解】 设长方体的长、宽、高分别为 x,y,z，那么 $V=xyz$，约束条件为 $x^2+y^2+z^2=(2a)^2$．

令 $F=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-4a^2)$，解方程组

$$\begin{cases}F'_x=yz+2\lambda x=0, & ①\\F'_y=xz+2\lambda y=0, & ②\\F'_z=xy+2\lambda z=0, & ③\\x^2+y^2+z^2=4a^2, & ④\end{cases}$$

解得 $x=y=z=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}a$，并由实际问题的唯一性知，当 $x=y=z=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$ 时，长方体体积最大，且最大体积 $V=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}a^3$．

11 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值．

【解】 设椭圆上的点为 $P(x,y,z)$，则 $|OP|=x^2+y^2+z^2$，

因 P 点在抛物面及平面上，所以约束条件为 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=1$．

设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(z-x^2-y^2)+\lambda_2(x+y+z-1)$ 得方程组

$$\begin{cases}F'_x=2x-2\lambda_1x+\lambda_2=0, & ①\\F'_y=2y-2\lambda_1y+\lambda_2=0, & ②\\F'_z=2z+\lambda_1+\lambda_2=0, & ③\end{cases}$$

② − ① 得 $y=x$，代入 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=1$，得 $z=2x^2$ 和 $z=1-2x$，所以 $2x^2+2x-1=0$，解之 $x=y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$．代入 $z=1-2x$ 得 $z=2\mp\sqrt{3}$．

由题意可知，距离 $|OP|$有最大值与最小值，因为

$$|OP|^2=x^2+y^2+z^2=2\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right)^2+(2\mp\sqrt{3})^2=9\mp5\sqrt{3},$$

所以原点到椭圆的最长距离是$\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，最短距离是$\sqrt{9-5\sqrt{3}}$．

12 设有一圆板占有平面闭区域$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1\}$．该圆板被加热，以致在点$(x,y)$的温度是 $T=x^2+2y^2-x$，求该圆板的最热点和最冷点．

【解】 解方程组$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} = 2x - 1 = 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} = 4y = 0, \end{cases}$ 求得驻点$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$. $T_1 = T\big|_{\left(\frac{1}{2},0\right)} = -\dfrac{1}{4}$.

在边界$x^2 + y^2 = 1$上,$T = 2 - (x^2 + x) = \dfrac{9}{4} - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$,当$x = -\dfrac{1}{2}$时,有边界上的最大值$T_2 = \dfrac{9}{4}$,$x = 1$时,有边界上的最小值$T_3 = 0$.

比较T_1,T_2及T_3的值知,最热点在$\left(-\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$T_{\max} = \dfrac{9}{4}$,最冷点在$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$,$T_{\min} = -\dfrac{1}{4}$.

13 形状为椭球$4x^2 + y^2 + 4z^2 \leqslant 16$的空间探测器进入地球大气层,其表面开始受热,1小时后在探测器的点(x,y,z)处的温度$T = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$,求探测器表面最热的点.

【解】 作拉格朗日函数$L = 8x^2 + 4yz - 16z + 600 + \lambda(4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16)$,令

$$\begin{cases} L_x = 16x + 8\lambda x = 0, & ① \\ L_y = 4z + 2\lambda y = 0, & ② \\ L_z = 4y - 16 + 8\lambda z = 0, & ③ \end{cases}$$

由①得$x = 0$或$\lambda = -2$.

若$\lambda = -2$,代入②、③,得$y = z = -\dfrac{4}{3}$. 再将$y = z = -\dfrac{4}{3}$代入约束条件

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16, \qquad ④$$

得$x = \pm\dfrac{4}{3}$. 于是得到两个可能的极值点:$M_1\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$,$M_2\left(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$.

若$x = 0$,由②、③、④解得$\lambda = 0, y = 4, z = 0$;$\lambda = \sqrt{3}, y = -2, z = \sqrt{3}$;$\lambda = -\sqrt{3}, y = -2, z = -\sqrt{3}$. 于是得到另外三个可能极值点:$M_3(0,4,0)$,$M_4(0, -2, \sqrt{3})$,$M_5(0, -2, -\sqrt{3})$.

比较T在上述五个可能极值点处的数值知:$T\big|_{M_1} = T\big|_{M_2} = \dfrac{1928}{3}$为最大,故探测器表面最热的点为$M\left(\pm\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$.

习题9-9 二元函数的泰勒公式

1 求函数$f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$在点$(1, -2)$的泰勒公式.

【解】 $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$, $f(1, -2) = 5$,

$f'_x(x,y) = 4x - y - 6$, $\qquad f'_x(1, -2) = 0$,

$f'_y(x,y) = -x - 2y - 3$, $\qquad f'_y(1, -2) = 0$,

$f''_{xx}(x,y) = 4$, $\qquad f''_{xx}(1, -2) = 4$,

$f'_{xy}(x,y) = -1$, $\qquad f''_{xy}(1, -2) = -1$,

$f'_{yy}(x,y) = -2$, $\qquad f''_{yy}(1, -2) = -2$.

因3阶的偏导数均为零,所以

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f[1+(x-1),-2+(y+2)] \\
&= f(1,-2)+f'_x(1,-2)(x-1)+f'_y(1,-2)(y+2)+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(1,-2)(x-1)^2 \\
&\quad +2f''_{xy}(1,-2)(x-1)^2(y+2)+f''_{yy}(1,-2)(y+2)^2] \\
&= 5+\frac{1}{2!}[4(x-1)^2-2(x-1)(y+2)-2(y+2)^2] \\
&= 5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2.
\end{aligned}
$$

2 求函数 $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ 在点 $(0,0)$ 的三阶泰勒公式.

【解】 $f_x(x,y)=e^x\ln(1+y)$, $f_y(x,y)=\dfrac{e^x}{1+y}$, $f_{xx}(x,y)=e^x\ln(1+y)$,

$f_{xy}(x,y)=\dfrac{e^x}{1+y}$, $f_{yy}(x,y)=-\dfrac{e^x}{(1+y)^2}$, $f_{xxx}(x,y)=e^x\ln(1+y)$,

$f_{yyy}(x,y)=\dfrac{2e^x}{(1+y)^3}$.

于是 $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)=hf_x(0,0)+kf_y(0,0)=k$,

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)=h^2f_{xx}(0,0)+2hkf_{xy}(0,0)+k^2f_{yy}(0,0)=2hk-k^2,$$

$$
\begin{aligned}
\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0,0) &= h^3f_{xxx}(0,0)+3h^2kf_{xxy}(0,0)+3hk^2f_{xyy}(0,0)+k^3f_{yyy}(0,0) \\
&= 3h^2k-3hk^2+2k^3.
\end{aligned}
$$

又 $f(0,0)=0$, $h=x$, $k=y$,将以上各项代入三阶泰勒公式,便得

$$e^x\ln(1+y)=y+\frac{1}{2!}(2xy-y^2)+\frac{1}{3!}(3x^3y-3xy^2+2y^3)+R_3,$$

其中
$$
\begin{aligned}
R_3 &= \frac{1}{4!}\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f(\theta h,\theta k)\right]_{h=x,k=y} \\
&= \frac{e^{\theta x}}{24}\left[x^4\ln(1+\theta y)+\frac{4x^3y}{1+\theta y}-\frac{6x^2y^2}{(1+\theta y)^2}+\frac{8xy^3}{(1+\theta y)^3}-\frac{6y^4}{(1+\theta y)^4}\right],\ (0<\theta<1).
\end{aligned}
$$

3 求函数 $f(x,y)=\sin x\sin y$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的二阶泰勒公式.

【解】 $f(x,y)=\sin x\sin y$, $f\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}$,

$f'_x(x,y)=\cos x\sin y$, $f'_x\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$,

$f'_y(x,y)=\sin x\cos y$, $f'_y\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$,

$f''_{xx}(x,y)=-\sin x\sin y$, $f''_{xx}\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$,

$f''_{xy}(x,y)=\cos x\cos y$, $f''_{xy}\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$,

$f''_{yy}(x,y)=-\sin x\sin y$, $f''_{yy}\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$,

所以 $$f(x,y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2!}\left[-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right.$$
$$\left.+2\cdot\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]+R_0$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right.$$
$$\left.-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]+R_2.$$

因为 $$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=-\cos x\sin y,\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=-\sin x\cos y,$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=-\cos x\sin y,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=-\sin x\cos y,$$

所以 $$R_2=\frac{1}{3!}\left[-\cos\xi\sin\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3-3\sin\xi\cos\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\right.$$
$$\left.-3\cos\xi\sin\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2-\sin\xi\cos\eta\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\right]$$
$$=-\frac{1}{6}\left[\cos\xi\sin\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+3\sin\xi\cos\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\right.$$
$$\left.+3\cos\xi\sin\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+\sin\xi\cos\eta\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\right],$$

其中 $\xi=\frac{\pi}{4}+\theta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $\eta=\frac{\pi}{4}+\theta\left(y-\frac{\pi}{4}\right)$ $(0<\theta<1)$.

4 利用函数 $f(x,y)=x^y$ 的三阶泰勒公式,计算 $1.1^{1.02}$ 的近似值.

【解】 $f'(x,y)=x^y$, $f(1,1)=1$,
$f'_x(x,y)=yx^{y-1}$, $f'_x(1,1)=1$,
$f'_y(x,y)=x^y\ln x$, $f'_y(1,1)=0$,
$f''_{xx}(x,y)=y(y-1)x^{y-2}$, $f''_{xx}(1,1)=0$,
$f''_{xy}(x,y)=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$, $f''_{xy}(1,1)=1$,
$f''_{yy}(x,y)=x^y\ln^2 x$, $f''_{yy}(1,1)=0$,
$f'''_{xxx}(x,y)=y(y-1)(y-2)x^{y-3}$, $f'''_{xxx}(1,1)=0$,
$f'''_{xxy}(x,y)=(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x$, $f'''_{xxy}(1,1)=1$,
$f'''_{xyy}(x,y)=x^{y-1}\ln x+x^{y-1}\ln x+yx^{y-1}\ln^2 x$, $f'''_{xyy}(1,1)=0$,
$f'''_{yyy}(x,y)=x^y\ln^3 x$, $f'''_{yyy}(1,1)=0$,

所以 $$f(x,y)=1+(x-1)+\frac{1}{2!}[2(x-1)(y-1)]+\frac{1}{3!}[3(x-1)^2(y-1)]+R_3$$
$$=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+R_3.$$

当 $x=1.1, y=1.02$ 时,可求出
$$1.1^{1.2}=1+0.1+0.1\times0.02+\frac{1}{2}\times0.1^2\times0.02$$

$$= 1 + 0.1 + 0.002 + 0.0001 = 1.1021.$$

5 求函数 $f(x,y) = e^{x+y}$ 在点 $(0,0)$ 的 n 阶泰勒公式.

【解】 $f(0,0) = 1, f_x(0,0) = e^{x+y}\big|_{(0,0)} = 1, f_y(0,0) = e^{x+y}\big|_{(0,0)} = 1, \cdots, f^{(n)}_{x^m y^{n-m}}(0,0) = e^{x+y}\big|_{(0,0)} = 1 \quad (m = 0,1,\cdots,n)$.

又 $h = x, k = y$,将以上各项代入 n 阶泰勒公式,便得

$$e^{x+y} = 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{3!}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}(x+y)^n + R_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x+y)^k}{k!} + R_n,$$

其中 $R_n = \dfrac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta(x+y)} (0 < \theta < 1)$.

习题 9－10 最小二乘法

1 某种合金的含铅量百分比(%)为 p,其熔解温度(℃)为 θ,由实验测得 p 与 θ 的数据如下表:

p/%	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
θ/℃	181	197	235	270	283	292

试用最小二乘法建立 θ 与 p 之间的经验公式 $\theta = ap + b$.

【解】 经验公式中的 a,b 应满足方程组

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{6} p_i^2 + b\sum_{i=1}^{6} p_i = \sum_{i=1}^{6} p_i\theta_i, \\ a\sum_{i=1}^{6} p_i + 6b = \sum_{i=1}^{6} \theta_i, \end{cases}$$

计算得 $\sum_{i=1}^{6} p_i^2 = 28365.28$, $\sum_{i=1}^{6} p_i = 396.6$, $\sum_{i}^{6} p_i\theta_i = 101176.3$, $\sum_{i=1}^{6} \theta_i = 1458$.

代入方程组,得 $\begin{cases} 28365.28a + 396.6b = 101176.3, \\ 396.6a + 6b = 1458 \end{cases}$

解得 $$a = \frac{\begin{vmatrix} 101176.3 & 396.6 \\ 1458 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 28365.28 & 396.6 \\ 396.6 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{28815}{12900.12} = 2.234,$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 28365.28 & 101176.3 \\ 396.6 & 1458 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 28365.28 & 396.6 \\ 396.6 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{1230057.66}{12900.12} = 95.33.$$

所以经验公式为 $\theta = 2.234p + 95.33$.

2 已知一组实验数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$.现若假定经验公式是 $y = ax^2 + bx + c$.试按最小二乘法建立 a,b,c 应满足的三元一次方程组.

【解】 设每个数据的偏差的平方和为 $M = \sum\limits_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2$,令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial a} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot x_i^2 = 0, \\ \dfrac{\partial M}{\partial b} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i + (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot x_i = 0, \\ \dfrac{\partial M}{\partial c} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0, \end{cases}$$

整理得 a,b,c 应满足的方程组:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i + nc = \sum\limits_{i=1}^{n}y_i. \end{cases}$$

总习题九

1 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1)$f(x,y)$ 在点(x,y) 可微分是$f(x,y)$ 在该点连续的________条件.$f(x,y)$ 在点(x,y) 连续是 $f(x,y)$ 在该点可微分的________条件.

(2)$z = f(x,y)$ 在点(x,y) 的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$存在是$f(x,y)$ 在该点可微分的________条件.$z = f(x,y)$ 在点(x,y) 可微分是函数在该点的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$存在的________条件.

(3)$z = f(x,y)$ 的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$ 存在且连续是$f(x,y)$ 在该点可微分的________条件.

(4) 函数 $z = f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域 D 内连续是这两个二阶混合偏导数在 D 内相等的________条件.

【解】 (1) 充分,必要. (2) 必要,充分. (3) 充分. (4) 充分.

【注】 本题结果给出了二元函数连续、可偏导(两个偏导数均存在)、可微及具有连续偏导数之间的联系,用图表可表示为

$$\begin{tikzcd}
\text{函数连续} \arrow[r, shift left, "/" marking] \arrow[dr, shift left, "/" marking] & \text{函数可偏导} \arrow[l, shift left, "/" marking] \arrow[d, shift left, "/" marking] & \\
& \text{可微分} \arrow[ul, shift left] \arrow[u, shift left] \arrow[r, shift left, "/" marking] & \text{具连续偏导数} \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

2 设函数 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 的某邻域内有定义,且 $f_x(0,0) = 3$, $f_y(0,0) = -1$,则有

(A) $dz\big|_{(0,0)} = 3dx - dy$.

(B) 曲面 $z = f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个法向量为 $\{3,-1,1\}$.

(C) 曲线 $\begin{cases} z = f(x,y), \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $\{1,0,3\}$.

(D) 曲线 $\begin{cases} z = f(x,y), \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $\{3,0,1\}$.

【解】 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数存在,不一定可微分,故(A)不对.

曲面 $z = f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的一个法向量是 $\{3,-1,-1\}$,而不是 $\{3,-1,1\}$,故(B)不对.

取 x 为参数,则曲线 $x = x, y = 0, z = f(x,0)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的一个切向量为 $\{1,0,3\}$,故(C)正确.

3 求函数 $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$ 的定义域,并求 $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},0\right)} f(x,y)$.

【解】 设函数定义域为 D,那么由 $\begin{cases} 4x - y^2 \geqslant 0 \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \\ 1 - x^2 - y^2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$D = \{(x,y) \mid y^2 \leqslant 4x, x^2 + y^2 < 1, x^2 + y^2 \neq 0\}.$$

$A\left(\dfrac{1}{2},0\right) \in D$,函数在点 A 连续,所以

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},0\right)} f(x,y) = f\left(\frac{1}{2},0\right) = \frac{\sqrt{4\times\frac{1}{2} - 0^2}}{\ln\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2\right]} = \frac{\sqrt{2}}{\ln3 - 2\ln2}.$$

4 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$ 不存在.

【证】 取两条趋于 $(0,0)$ 的路径, $c_1: x = 0, c_2: y^2 = x$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in c_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = 0;$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in c_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y^2=x}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

由于 (x,y) 分别沿 c_1、c_2 趋于 $(0,0)$ 时 $f(x,y)$ 的极限不相等,故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ 不存在.

5 设 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ 求 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$.

【解】 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时,

$$f_x(x,y) = \frac{(x^2 + y^2)\cdot 2xy - x^2 y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^2 + y^2)\cdot x^2 - x^2 y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2};$$

当 $x^2+y^2=0$ 时,

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0.$$

同样 $f_y(0,0)=0$. 所以

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}\quad f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

6 求下列函数的一阶和二阶偏导数:

(1) $z=\ln(x+y^2)$; (2) $z=x^y$.

【解】 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{1}{(x+y^2)^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x+y^2)-4y^2}{(x+y^2)^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y^2}\right)=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1})=x^{y-1}+y\cdot x^{y-1}\ln x.$$

7 求函数 $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.01,\Delta y=0.03$ 时的全增量和全微分.

【解】 $\Delta z=\dfrac{(2.01)\cdot(1.03)}{(2.01)^2-(1.03)^2}-\dfrac{2}{3}=0.02.$

又 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(y^3+x^2y)}{(x^2-y^2)^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3+xy^2}{(x^2-y^2)^2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=-\frac{5}{9},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=\frac{10}{9},$$

故 $$\left.dz\right|_{\substack{x=2,\Delta x=0.01\\ y=1,\Delta y=0.03}}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}\cdot\Delta x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}\cdot\Delta y=0.03.$$

8 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 证明: $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续,且偏导数存在,但不可微分.

【证】 令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin^2\theta}{(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{r\to 0}\frac{r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{r^3}$$

$$=\lim_{r\to 0}r\cdot\frac{1}{4}\sin^2 2\theta=0=f(0,0),$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

由偏导数定义式,得

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{0}{x^3}-0}{x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0,$$

两个偏导数都存在.

因为 $\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\dfrac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}$,

$$\mathrm{d}z=f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y=0,$$

所以 $$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-\mathrm{d}z}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\Delta z\cdot\frac{1}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^2}.$$

当取 $\Delta y=\Delta x$ 时,

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-\mathrm{d}z}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta x)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta x)^2]^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^4}{4(\Delta x)^4}=\frac{1}{4}\neq 0.$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

9 设 $u=x^y$,而 $x=\varphi(t)$,$y=\psi(t)$ 都是可微函数,求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

【解】 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=yx^{y-1}\cdot\varphi'(t)+x^y\ln x\cdot\psi'(t).$$

10 设 $z=f(u,v,w)$ 具有连续偏导数,而

$$u=\eta-\zeta,\quad v=\zeta-\xi,\quad w=\xi-\eta,$$

求 $\dfrac{\partial z}{\partial\xi},\dfrac{\partial z}{\partial\eta},\dfrac{\partial z}{\partial\zeta}$.

【解】 $$\frac{\partial z}{\partial\xi}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial\xi}=-\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial w},$$

$$\frac{\partial z}{\partial\eta}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial\eta}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial w},$$

$$\frac{\partial z}{\partial\zeta}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial\zeta}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial\zeta}=-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}.$$

11 设 $z=f(u,x,y)$,$u=x\mathrm{e}^y$,其中 f 具有连续的二阶偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 $$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x+f'_u\cdot\mathrm{e}^y=f'_x+\mathrm{e}^yf'_u,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xu}\cdot x\mathrm{e}^y+f''_{xy}+\mathrm{e}^yf'_u+\mathrm{e}^y(f''_{uu}\cdot\mathrm{e}^y\cdot x+f''_{uy})$$

$$=\mathrm{e}^yf'_u+x\mathrm{e}^{2y}f''_{uu}+\mathrm{e}^yf''_{uy}+x\mathrm{e}^yf''_{xu}+f''_{xy}.$$

12 设 $x=\mathrm{e}^u\cos v$,$y=\mathrm{e}^u\sin v$,$z=uv$,试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},$$

由 $$\begin{cases}x=\mathrm{e}^u\cos v,\\ y=\mathrm{e}^u\sin v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2),\\ v=\arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=v\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}+u\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=v\frac{x}{(x^2+y^2)}-u\frac{y}{(x^2+y^2)}$$

$$=v\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-u\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=v\cdot\cos v\cdot e^{-u}-u\cdot\sin v\cdot e^{-u}=e^{-u}(v\cos v-u\sin v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=v\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}+u\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left[\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=v\cdot\frac{y}{x^2+y^2}+u\cdot\frac{x}{x^2+y^2}=e^{-u}(v\sin v+u\cos v).$$

13 求螺旋线 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=b\theta$ 在点 $(a,0,0)$ 处的切线及法平面方程.

【解】 $\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=a\cos\theta,\quad \frac{dz}{d\theta}=b.$

点 $(a,0,0)$ 对应于 $\theta=0$，在点 $(a,0,0)$ 处切向量为 $\boldsymbol{T}=\{0,a,b\}$；

所以曲线在点 $(a,0,0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y-0}{a}=\frac{z-0}{b}，即 \quad \begin{cases}x=a,\\ by-az=0.\end{cases}$$

曲线在点 $(a,0,0)$ 处的法平面方程为

$$0(x-a)+a(y-0)+b(z-0)=0，即 \quad ay+bz=0.$$

14 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，并写出该法线的方程.

【解】 曲面在点 (x,y,z) 处的法向量为 $\left\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right\}=\{y,x,-1\}$.

因为平面的法向量为 $\{1,3,1\}$，而所求法线垂直于已知平面，所以法线的法向量与平面的法向量平行，有 $\frac{y}{1}=\frac{x}{3}=\frac{-1}{1}$，解得 $x=-3, y=-1$，则 $z=(-3)\times(-1)=3$.

故所求点的坐标为 $(-3,-1,3)$，法线方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

15 设 $\boldsymbol{e}_l=(\cos\theta,\sin\theta)$，求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 沿方向 l 的方向导数，并分别确定角 θ，使这导数有：(1) 最大值；(2) 最小值；(3) 等于 0.

【解】 因为 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-x+2y$，所以

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(1,1)}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(1,1)}\sin\theta=1\cdot\cos\theta+1\cdot\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right).$$

于是 (1) 当 $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{2}$ 最大；

(2) 当 $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$ 即 $\theta=\frac{5\pi}{4}$ 时，$\frac{\partial f}{\partial l}=-\sqrt{2}$ 最小；

(3) 当 $\theta+\frac{\pi}{4}=\pi$ 或 $\theta+\frac{\pi}{4}=2\pi$，即 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\theta=\frac{7\pi}{4}$ 时 $\frac{\partial f}{\partial l}=0$.

16 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿外法线方向的方向导数.

【解】 椭球面在点 M_0 处的沿外法线方向的一个向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right)$，

$$e_n=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}\left(2x_0\cdot\frac{x_0}{a^2}+2y_0\cdot\frac{y_0}{b^2}+2z_0\cdot\frac{z_0}{c^2}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}.$$

17 求平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

【解】 设 $P(x,y,z)$ 是平面和柱面交线上的一点，它与 xOy 平面的距离为 $d=|z|$，则 $d^2=z^2$，约束条件为 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和 $x^2+y^2=1$.

设 $F(x,y,z)=z^2+\lambda_1\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1\right)+\lambda_2(x^2+y^2-1)$，得方程组

$$\begin{cases}F'_x=\frac{\lambda_1}{3}+2\lambda_2x=0, & ①\\ F'_y=\frac{\lambda_1}{4}+2\lambda_2y=0, & ②\\ F'_z=2z+\frac{\lambda_1}{5}=0, & ③\end{cases}$$

① × ③ − ② × 4 得 $y=\frac{3}{4}x$，代入 $x^2+y^2=1$ 得 $x=\pm\frac{4}{5}$.

因平面在三坐标轴上的截距分别为 3,4,5，所以在第一卦限内的点 P 到 xOy 平面的距离较短，故取 $x=\frac{4}{5}$，代入 $y=\frac{3}{4}x$，得 $y=\frac{3}{5}$，再代入 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$，得 $z=\frac{35}{12}$. 所以交线上与 xOy 平面距离最短的点为 $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12}\right)$.

18 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使得切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小，求这切平面的切点，并求此最小体积.

【解】 过点 (x,y,z) 的切平面方程为

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0, 即 \quad \frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y+\frac{z}{c^2}Z=1.$$

此平面在坐标轴上截距分别为：$\frac{a^2}{x},\frac{b^2}{y},\frac{c^2}{z}$.

切平面与坐标面围成的四面体的体积为 $V=\frac{a^2b^2c^2}{6xyz}$.

因此求 V 的最小点的坐标，只需求函数 $f(x,y,z)=xyz$. 在限制条件

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$$

之下的最大值点的坐标.

令 $F(x,y,z)=xyz-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$，由

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=y_0z_0-\lambda\frac{2x_0}{a^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=x_0z_0-\lambda\frac{2y_0}{b^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial z}=x_0y_0-\lambda\frac{2z_0}{c^2}=0,\\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1\end{cases} \Rightarrow x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}a, y_0=\frac{\sqrt{3}}{3}b, z_0=\frac{\sqrt{3}}{3}c.$$

显然它们就是 $f(x,y,z)$ 的最大值点的坐标. 因此也就是所求的切点坐标. 此四面体的最小体积为 $V_{最小}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

19 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售，售价分别为 p_1 和 p_2；销售量分别为 q_1 和 q_2；需求函数分别为

$$q_1=24-0.2p_1 \quad 和 \quad q_2=10-0.5p_2,$$

总成本函数为 $C=35+40+40(q_1+q_2)$.

试问：厂家如何确定两个市场的售价，能使其获得的总利润最大？最大总利润为多少？

【解】 总收入函数为 $R=p_1q_1+p_2q_2=24p_1-0.2p_1^2+10p_2-0.05p_2^2$,

总利润函数为
$$\begin{aligned}L=R-C&=(p_1q_1+p_2q_2)-[35+40(q_2+q_2)]\\&=32p_1-0.2p_1^2+12p_2-0.05p_2^2-1395.\end{aligned}$$

由极值的必要条件，得方程组 $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial p_1}=32-0.4p_1=0,\\ \frac{\partial L}{\partial p_2}=12-0.1p_2=0,\end{cases} \Rightarrow p_1=80, p_2=120.$

因驻点唯一，且由问题的实际含义可知必有最大利润. 故当 $p_1=80, p_2=120$ 时，厂家所获得的总利润最大，其最大总利润为 $L\big|_{p_1=80,p_2=120}=605$.

20 设有一小山，取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面，其底部所占区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上的一个点,问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大?若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$,试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点,也就是说,要在 D 的边界曲线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点.试确定攀登起点的位置.

【解】 (1) 由梯度向量的重要性质:函数 $h(x,y)$ 在点 M 处沿该点的梯度方向:

$$\mathbf{grad}h(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}=\left\{\frac{\partial h}{\partial x},\frac{\partial h}{\partial y}\right\}\Bigg|_{(x_0,y_0)}=\{-2x_0+y_0,\ -2y_0+x_0\}.$$

方向导数取最大值即 $\mathbf{grad}h(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}$ 的模,$\Rightarrow\quad g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}$.

(2) 按题意,即求 $g(x,y)$ 在条件 $x^2+y^2-xy-75=0$ 下的最大值点 $\Leftrightarrow$

$g^2(x,y)=(y-2x)^2+(x-2y)^2=5x^2+5y^2-8xy$ 在条件 $x^2+y^2-xy-75=0$ 下的最大值点.

这是求解条件最值问题,用拉格朗日乘子法.令拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(x^2+y^2-xy-75),$$

则有
$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=10x-8y+\lambda(2x-y)=0, & ①\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial y}=10y-8x+\lambda(2y-x)=0, & ②\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-xy-75=0. & ③\end{cases}$$

将 ① 式与 ② 式相加得 $(x+y)(\lambda+2)=0.\quad\Rightarrow\quad x=-y$ 或 $\lambda=-2$.

若 $y=-x$,则由 ③ 式得 $3x^2=75$ 即 $x=\pm5,y=\mp5$.若 $\lambda=-2$,由 ① 或 ② 均得 $y=x$,代入 ③ 式得 $x^2=75$ 即 $x=\pm5\sqrt{3},y=\pm5\sqrt{3}$.于是得可能的条件极值点

$$M_1(5,-5),M_2(-5,5),M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3}),M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3}).$$

现比较 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$ 在这些点的函数值:

$$f(M_1)=f(M_2)=450,\quad f(M_3)=f(M_4)=150.$$

因为实际问题存在最大值,而最大值又只可能在 M_1,M_2,M_3,M_4 中取到.因此 $g^2(x,y)$ 在 M_1,M_2 取到在 D 的边界上的最大值,即 M_1,M_2 可作为攀登的起点.

考研试题选解

1 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$,且 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(D) $\lim\limits_{x\to0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$,且 $\lim\limits_{y\to0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$.

【分析一】 按可微性定义，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微

$$\Leftrightarrow f(x,y)=f(0,0)+Ax+By+o(\sqrt{x^2+y^2})\quad((x,y)\to(0,0))$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-Ax-By}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\text{，其中 }A,B\text{ 是与 }x,y\text{ 无关的常数}.$$

题中的(C)即 $A=B=0$ 的情形．因此由(C)$\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微．因此选(C)．

【分析二】 由(A)$\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续$\nRightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微．

由(B)$\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可偏导且 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0,\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$，但$\nRightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微．

由(D)$\Rightarrow f'_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 沿 x 轴连续（即 $f'_x(x,0)$ 在 $x=0$ 连续），$f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 沿 y 轴连续（即 $f'_y(0,y)$ 在 $y=0$ 连续），但$\nRightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微．

因此选(C)．

2 设 $z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ________．

【分析】
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}z(x,2)\right|_{x=1}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right|_{x=1}=\left.\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\ln\frac{2}{x}}\right)'\right|_{x=1}$$
$$=\left.\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)\right|_{x=1}$$
$$=2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}(\ln 2-1).$$

3 函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$ 确定，其中函数 $g(y)$ 可微，且 $g(y)\neq 0$，则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$ ________．

【分析】 求出 $f(u,v)$ 的表达式是解决本题的关键．设 $u=xg(y),v=y$，不难得出 $x=\dfrac{u}{g(v)},y=v$，代入即得
$$f(u,v)=\frac{u}{g(v)}+g(v).$$
于是
$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{1}{g(v)},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=-\frac{g'(v)}{[g(v)]^2}.$$

4 已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则

(A) $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 都存在．　(B) $f'_x(0,0)$ 不存在，$f'_y(0,0)$ 存在．

(C) $f'_x(0,0)$ 存在，$f'_y(0,0)$ 不存在．　(D) $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 都不存在．

【分析】 按照定义计算函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数．由
$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2}}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2}}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=-1,$$
可知偏导数 $f'_x(0,0)$ 不存在．又由
$$\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y^4}}-1}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\mathrm{e}^{y^2}-1}{y}=\lim_{y\to0}\frac{y^2}{y}=0,$$
可知偏导数 $f'_y(0,0)$ 存在，且 $f'_y(0,0)=0$．故应选(B)．

5 设 $z=(x+e^y)^x$,则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$ ________.

【分析】 由题设知 $z(x,0)=(x+1)^x=e^{x\ln(x+1)}$,从而

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}&=\left.\frac{dz(x,0)}{dx}\right|_{x=1}=\left.[e^{x\ln(x+1)}]'\right|_{x=1}\\&=\left.e^{x\ln(x+1)}\left[\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}\right]\right|_{x=1}\\&=2\left(\ln2+\frac{1}{2}\right)=2\ln2+1.\end{aligned}$$

6 设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$,则 $dz\big|_{(1,0)}=$ ________.

【分析】 利用全微分的四则运算法则与一阶全微分形式不变性直接计算,得

$$\begin{aligned}dz&=e^{x+y}dx+xd(e^{x+y})+\ln(1+y)d(x+1)+(x+1)d[\ln(1+y)]\\&=e^{x+y}dx+xe^{x+y}d(x+y)+\ln(1+y)dx+(x+1)\frac{dy}{1+y}\\&=e^{x+y}dx+xe^{x+y}(dx+dy)+\ln(1+y)dx+\frac{(x+1)dy}{1+y},\end{aligned}$$

于是 $$dz\big|_{(1,0)}=edx+e(dx+dy)+2dy=2edx+(e+2)dy.$$

7 设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$,其中 f 具有连续二阶偏导数,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 这是求复合函数的一、二阶偏导数,由复合函数微分法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)+f'_2\cdot\frac{\partial}{\partial x}(e^{xy})=2xf'_1+ye^{xy}f'_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_1\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)+f'_2\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy})=-2yf'_1+xe^{xy}f'_2,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(2xf'_1+ye^{xy}f'_2)=2x\frac{\partial}{\partial y}f'_1+e^{xy}(1+xy)f'_2+ye^{xy}\frac{\partial}{\partial y}f'_2\\&=2x\left[f''_{11}\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)+f''_{12}\frac{\partial}{\partial y}e^{xy}\right]+e^{xy}(1+xy)f'_2+ye^{xy}\left[f''_{21}\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)+f''_{22}\frac{\partial}{\partial y}e^{xy}\right]\\&=2x[f''_{11}(-2y)+f''_{12}xe^{xy}]+e^{xy}(1+xy)f'_2+ye^{xy}[f''_{21}(-2y)+f''_{22}xe^{xy}]\\&=-4xyf''_{11}+2(x^2-y^2)e^{xy}f''_{12}+xye^{2xy}f''_{22}+e^{xy}(1+xy)f'_2.\end{aligned}$$

【评注】 也可由一阶全微分形式不变性先求出 dz,然后得到 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

8 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数,$z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

【分析一】 由多元复合函数求导法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

$\Rightarrow$ $$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial u}+2\frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

【分析二】 由一阶全微分形式不变性得

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u}d\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{xdy - ydx}{x^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$= \left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v}\right)dx + \left(\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial v}\right)dy.$$

$$\Rightarrow \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = -2\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial u} + 2\frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

9 设 $z = f(x+y, x-y, xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

【分析与求解】 先求 dz.

$$dz = f'_1 \cdot (dx + dy) + f'_2 \cdot (dx - dy) + f'_3 \cdot (ydx + xdy)$$

$$= (f'_1 + f'_2 + yf'_3)dx + (f'_1 - f'_2 + xf'_3)dy,$$

由此又可得 $\quad \frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + f'_2 + yf'_3.$

进一步求得 $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_1 + f'_2 + yf'_3)$

$$= f''_{11} + f''_{12} \cdot (-1) + xf''_{13} + f''_{21} + f''_{22} \cdot (-1) + xf''_{23}$$

$$+ y[f''_{31} + f''_{32} \cdot (-1) + xf''_{33}] + f'_3$$

$$= f''_{11} + (x+y)f''_{13} - f''_{22} + (x-y)f''_{23} + xyf''_{33} + f'_3,$$

其中，$f''_{12} = f''_{21}, f''_{13} = f''_{31}, f''_{23} = f''_{32}$.

10 设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

(Ⅰ) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$；(Ⅱ) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

【分析与求解】 (Ⅰ) 由复合函数求导法

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{x}{u} \quad (\text{其中 } u = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)\frac{x^2}{u^2} + f'(u)\left(\frac{1}{u} - \frac{x^2}{u^3}\right).$$

由对称性，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)\frac{y^2}{u^2} + f'(u)\left(\frac{1}{u} - \frac{y^2}{u^3}\right).$

两式相加得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) + f'(u)\frac{1}{u} = 0.$

(Ⅱ) 将 (Ⅰ) 中的方程改写成

$$uf''(u) + f'(u) = 0, \text{即} \quad [uf'(u)]' = 0 \xRightarrow{\text{积分}} uf'(u) = C_1.$$

由 $f'(1) = 1 \Rightarrow C_1 = 1 \Rightarrow \quad f'(u) = \frac{1}{u} \xRightarrow{\text{积分}} \quad f(u) = \ln u + C.$

由 $f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \Rightarrow \quad f(u) = \ln u, u > 0.$

11 设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 确

定 a,b 的值,使等式在变换 $\xi = x + ay,\eta = x + by$ 下化简为$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$.

【分析与求解】 u 是 x,y 的函数,在变换 $\xi = x + ay,\eta = x + by$ 下,u 变成 ξ,η 的函数. 先由复合函数求导法,导出 u 对 x,y 的一、二阶偏导数与 u 对 ξ,η 的一、二阶偏导数间的关系,然后将方程

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

变形,确定 a 与 b,化成$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$.

由复合函数求导法可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta},\\
&\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} = a\frac{\partial u}{\partial\xi} + b\frac{\partial u}{\partial\eta},\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y} = a\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + (a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + b\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}a + \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}b\right) + b\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}a + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}b\right) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 2ab\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},
\end{aligned}$$

代入原方程得

$$\begin{aligned}
&4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\
&= (5a^2 + 12a + 4)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + (5b^2 + 12b + 4)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + [8 + 12(a+b) + 10ab]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

选 a,b 使得

$$\begin{cases}
5a^2 + 12a + 4 = 0, & \Rightarrow\ a = -2,\ -\dfrac{2}{5},\\
5b^2 + 12b + 4 = 0, & \Rightarrow\ b = -2,\ -\dfrac{2}{5}.\\
8 + 12(a+b) + 10ab \neq 0,
\end{cases}$$

当 $a = b = -2$,或 $a = b = -\dfrac{2}{5}$ 时,$8 + 12(a+b) + 10ab = 0$;

当 $a = -2,b = -\dfrac{2}{5}$,或 $a = -\dfrac{2}{5},b = -2$ 时,$8 + 12(a+b) + 10ab \neq 0$.

因此　　$a = -2,b = -\dfrac{2}{5}$,或 $a = -\dfrac{2}{5},b = -2$.

【评注】 ① 化简中用到了$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v},\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$连续,所以$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$.

② 本考题不要求求出 $u = f(x,y)$,但我们应该会求它. 由$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$ 得

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \xi}=f(\xi) \Rightarrow u=\varphi(\xi)+\psi(\eta),$$

其中 φ,ψ 是任意的有二阶连续导数的函数.

因此,满足原方程的 $u=f(x,y)$ 是 $u=\varphi(x-2y)+\psi\left(x-\frac{2}{5}y\right)$.

这也就是作变换 $\xi=x-2y,\eta=x-\frac{2}{5}y$ 的作用,它将原方程变形,化简成 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$ 便可求出解来.

12 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$,又 $g(x,y)=f\left[xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right]$,求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

【解】 由一阶全微分形式不变性,得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}g&=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}(xy)+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}(x^2-y^2)=\frac{\partial f}{\partial u}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+\frac{\partial f}{\partial v}(x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y)\\&=\left(y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v}\right)\mathrm{d}x+\left(x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial v}\right)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

于是
$$\frac{\partial g}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v},\quad \frac{\partial g}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial v}.$$

故
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}&=y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}=y\left(y\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)+x\left(y\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\\&=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v},\\\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}&=x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)-y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)-\frac{\partial f}{\partial v}=x\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)-y\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}-y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)-\frac{\partial f}{\partial v}\\&=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\frac{\partial f}{\partial v}.\end{aligned}$$

所以
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(y^2+x^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=x^2+y^2.$$

13 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微,且 $f(1,1)=1$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3,\varphi(x)=f[x,f(x,x)]$,求 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

【分析与求解】 先求 $\varphi(1)=f[1,f(1,1)]=f(1,1)=1$.

求 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=3\varphi^2(1)\varphi'(1)=3\varphi'(1)$,归结为求 $\varphi'(1)$. 由复合函数求导法

$$\varphi'(x)=f'_1[x,f(x,x)]+f'_2[x,f(x,x)]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,x),$$

$$\varphi'(1)=f'_1(1,1)+f'_2(1,1)[f'_1(1,1)+f'_2(1,1)].$$

注意
$$f'_1(1,1)=\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=2,\quad f'_2(1,1)=\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=3.$$

因此
$$\varphi'(1)=2+3(2+3)=17,\quad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=3\times 17=51.$$

【评注】 此题是多层复合函数的求导问题．在利用复合函数的求导时，要注意正确使用恰当的记号．

$z=f[x,f(x,x)]$ 是二元函数 $z=f(x,y)$，$y=f(x,u)$ 与一元函数 $u=x$ 的复合，于是由复合函数求导法

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\left[\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right].$$

当 $x=1$ 时，$u=1$，$y=f(1,1)=1\Rightarrow$

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}+\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}\left[\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}+\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}\right]=2+3(2+3)=17.$$

前面的计算本质上与此相同，只是采用记号 f'_1 表示对第一个变量求导，$f'2$ 表示对第二个变量求导，省去了引进中间变量的过程，显得更为方便些．

一定注意，不可用如下记号　$f'_x[x,f(x,x)]$，它的含意是不清楚的，因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,f(x,x))]\text{ 与 }\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{y=f(x,x)}\text{ 是不同的．}$$

14 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________．

【分析一】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_1+f'_2\cdot y$，　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{12}\cdot x+f''_{22}\cdot xy+f'_2$．

【分析二】 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'_2\cdot x$，　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f'_2+(f''_{21}+f''_{22}\cdot y)x$．

【评注】 当 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数时，则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$，即　$f''_{12}=f''_{21}$．

15 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$ 确定，则　$3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________．

【分析一】 将方程两边分别对 x,y 求偏导数，注意 x,y 为自变量，$z=z(x,y)$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{2x-3z}\left(2-3\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{2x-3z}\left(-3\frac{\partial z}{\partial y}\right)+2.$$

$$\Rightarrow\quad 3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=3\mathrm{e}^{2x-3z}\left[2-\left(3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]+2$$

$$\Rightarrow\quad \left(3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}-2\right)=-3\mathrm{e}^{2x-3z}\left(3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}-2\right)$$

$$\Rightarrow\quad 3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}-2=0,\text{即}\quad 3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2.$$

【分析二】 将方程两边求全微分得

$$\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{2x-3z}(2\mathrm{d}x-3\mathrm{d}z)+2\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}z=\frac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}\mathrm{d}x+\frac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}\mathrm{d}y.$$

$$\Rightarrow\quad 3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2(3\mathrm{e}^{2x-3z}+1)}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}=2.$$

16 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F'_2\neq 0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

(A) x.　　(B) z.　　(C) $-x$.　　(D) $-z$.

【分析一】 方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 两边求全微分得

$$F'_1 \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)+F'_2 \mathrm{d}\left(\frac{z}{x}\right)=0,\text{即}\quad F'_1\cdot\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}+F'_2\cdot\frac{x\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x}{x^2}=0,$$

整理得
$$\mathrm{d}z=\frac{yF'_1+zF'_2}{xF'_2}\mathrm{d}x-\frac{F'_1}{F'_2}\mathrm{d}y.$$

$$\Rightarrow\qquad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{yF'_1+zF'_2}{xF'_2}-\frac{yF'_1}{F'_2}=z.$$

因此选(B).

【分析二】 方程记为 $G(x,y,z)=0,G(x,y,z)=F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$. 代公式分别求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial G}{\partial x}\Big/\frac{\partial G}{\partial z}=-\frac{F'_1\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F'_2\cdot\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F'_2\cdot\frac{1}{x}}=\frac{yF'_1+zF'_2}{xF'_2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial G}{\partial y}\Big/\frac{\partial G}{\partial z}=-\frac{F'_1\cdot\frac{1}{x}}{F'_2\cdot\frac{1}{x}}=-\frac{F'_1}{F'_2},$$

$$\Rightarrow\qquad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{yF'_1}{F'_2}+z\right)+\left(-\frac{yF'_1}{F'_2}\right)=z.$$

因此选(B).

【分析三】 方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 两边分别对 x,y 求偏导数,注意 $z=z(x,y)$,由复合函数求导法得

$$F'_1\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F'_2\cdot\left(-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

$$F'_1\cdot\frac{1}{x}+F'_2\cdot\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

解出$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yF'_1+zF'_2}{xF'_2},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_1}{F'_2}.$$

$$\Rightarrow\qquad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{yF'_1}{F'_2}+z\right)+\left(-\frac{yF'_1}{F'_2}\right)=z.$$

因此选(B).

17 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数,其中 φ 具有二阶导数,且$\varphi'\neq-1$.

(Ⅰ)求 $\mathrm{d}z$; (Ⅱ)记 $u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$,求$\frac{\partial u}{\partial x}$.

【解】 (Ⅰ)将方程两端求全微分,利用一阶全微分形式不变性可得

$$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=\varphi'(x+y+z)\times(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$$

$$\Leftrightarrow\quad[2x-\varphi'(x+y+z)]\mathrm{d}x+[2y-\varphi'(x+y+z)]\mathrm{d}y=[1+\varphi'(x+y+z)]\mathrm{d}z.$$

由此解出 $$dz = \frac{2x - \varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}dx + \frac{2y - \varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}dy. \qquad (*)$$

(Ⅱ)由(*)得$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - \varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - \varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}$,从而

$$u = u(x,y) = \frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{1}{x-y}\left[\frac{2x - \varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)} - \frac{2y - \varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}\right] = \frac{2}{1+\varphi'(x+y+z)}.$$

故 $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2}{[1+\varphi'(x+y+z)]^2}\varphi''(x+y+z)\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$= -\frac{2\varphi''(x+y+z)}{[1+\varphi'(x+u+z)]^2}\left[1+\frac{2x-\varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}\right]$$
$$= -\frac{2(1+2x)\varphi''(x+y+z)}{[1+\varphi'(x+y+z)]^3}.$$

18 设有三元方程 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$,根据隐函数存在定理,存在点(0,1,1)的一个邻域,在此邻域内该方程

(A)只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x,y)$.

(B)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x,z)$ 和 $z = z(x,y)$.

(C)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $z = z(x,y)$.

(D)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $y = y(x,z)$.

【分析】 把方程记为 $F(x,y,z) = 0$,其中 $F(x,y,z) = xy - z\ln y + e^{xz} - 1$.显然,$F$ 对 x,y,z 均有连续偏导数,且

$$F(0,1,1) = 0. \qquad ①$$

下面考察三个偏导数:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(0,1,1)} = (y + ze^{xz})\big|_{(0,1,1)} = 2 \neq 0, \qquad ②$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0,1,1)} = \left.\left(x - \frac{z}{y}\right)\right|_{(0,1,1)} = -1 \neq 0, \qquad ③$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,1,1)} = (-\ln y + xe^{xz})\big|_{(0,1,1)} = 0,$$

由于 $F(x,y,z)$ 满足偏导数的连续性及条件①,②,③等,根据隐函数存在定理知,存在点(0,1,1)的一个邻域,在此邻域该方程可确定有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $y = y(x,z)$.故应选(D).

19 曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$ 平行的切平面方程是________.

【分析】 曲面在任意点 $P(x,y,z)$ 处的法向量 $\boldsymbol{n} = \{2x, 2y, -1\}$,$\boldsymbol{n}$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_0 = \{2,4,-1\}$ 平行 $\Leftrightarrow \boldsymbol{n} = \lambda\boldsymbol{n}_0$,$\lambda$ 为某常数,即 $2x = 2\lambda$, $2y = 4\lambda$, $-1 = -\lambda$.从而 $x = 1, y = 2$.又点 P 在曲面上 $\Rightarrow z = (x^2+y^2)\big|_{(1,2)} = 5 \Rightarrow P$ 点处的 $\boldsymbol{n} = \{2,4,-1\}$.因此所求切平面方程是 $2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0$, 即 $2x + 4y - z = 5$.

【评注】 ① 本题考查曲面的法向量、两向量平行、平面方程的点法式等基础知识,关键是求出切点坐标.

② 有些考生由法向量$(-2x_0,-2y_0,1)$误认为$-2x_0=2,-2y_0=4$,从而$x_0=-1,y_0=-2$,$z_0=x_0^2+y_0^2=5$.答成$2(x+1)+4(y+2)-(z-5)=0$,即$2x+4y-z+15=0$.注意:两平面平行,它们的法向量的投影成比例,而并不要求两法向量相等.也有考生答成$2x+4y-z=0$或$2x+4y-z=2x_0+4y_0-(x_0^2+y_0^2)$,没有将切点求出来,当然只能是零分.

20 设函数$u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$,单位向量$\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$,则$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=$ ______.

【分析】 已知 $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$,而

$$\textbf{grad}u\big|_{(1,2,3)}=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_{(1,2,3)}=\left.\left(\frac{x}{3},\frac{y}{6},\frac{z}{9}\right)\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}(1,1,1),$$

则由方向导数计算公式得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,3)}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,3)}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,3)}\cos\gamma$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

21 设函数$f(x),g(x)$均有二阶连续导数,满足$f(0)>0,g(0)<0$,且$f'(0)=g'(0)=0$,则函数$z=f(x)g(y)$在点$(0,0)$处取得极小值的一个充分条件是

(A)$f''(0)<0,g''(0)>0$. (B)$f''(0)<0,g''(0)<0$.

(C)$f''(0)>0,g''(0)>0$. (D)$f''(0)>0,g''(0)<0$.

【分析】 $z=f(x)g(y)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x)g(y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f(x)g'(y)$$

$$\Rightarrow\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)g(y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x)g''(y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y),$$

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=f''(0)g(0),\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=f(0)\cdot g''(0),$$

$$B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=f'(0)g'(0)=0,$$

$$AC-B^2=f''(0)g''(0)f(0)g(0).$$

当$f(0)>0,g(0)<0,f''(0)<0,g''(0)>0$时$A>0,AC-B^2>0$.
故$z=f(x)g(y)$在$(0,0)$取极小值.选(A).

22 设函数$z=f(xy,yg(x))$,其中函数f具有二阶连续偏导数,函数$g(x)$可导且在$x=1$处取得极值$g(1)=1$.求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

【解】 这是求带抽象函数记号的复合函数的二阶混合偏导数.

先求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_1\dfrac{\partial}{\partial x}(xy)+f'_2\dfrac{\partial}{\partial x}[yg(x)]=f'_1\cdot y+f'_2\cdot yg'(x)$.

因为 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 取极值 $\Rightarrow g'(1)=0$,又 $g(1)=1\Rightarrow$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=f'_1[y,yg(1)]y=f'_1(y,y)\cdot y$$

$$\Rightarrow\qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[f'_1(y,y)\cdot y]\right|_{y=1}=f'_1(1,1)+f''_{11}(1,1)+f''_{12}(1,1).$$

【评注】 求得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot y+f'_2\cdot yg'(x)$$

后,若先求出任意点处的 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}[f'_1\cdot y+f'_2\cdot yg'(x)]\\&=[f''_{11}\cdot x+f''_{12}\cdot g(x)]y+f'_1+[f''_{21}\cdot x+f''_{22}\cdot g(x)]yg'(x)+f'_2\cdot g'(x).\end{aligned}$$

再令 $x=1,y=1$,并由 $g(1)=1,g'(1)=0,xy=1,yg(x)=1$ 最后得

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f''_{11}(1,1)+f''_{12}(1,1)+f'_1(1,1).$$

这比前面的解法要复杂些.

求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$ 时,求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 后,先代入 $x=1$,再求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}\right)\right|_{y=1}$ 往往会简化计算.

偏导数实质上是一元函数的导数.

23 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$,并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

【分析与求解】 (1) 先求 $f(x,y)$.

由 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2=\mathrm{d}(x^2-y^2)\Rightarrow z=f(x,y)=x^2-y^2+C$;

由 $f(1,1)=2\Rightarrow C=2\Rightarrow z=f(x,y)=x^2-y^2+2$.

(2) 求 $f(x,y)$ 在 D 内驻点及相应函数值.

解 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0,\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y=0,\end{cases}$ 得 $(x,y)=(0,0)$. 唯一驻点 $(0,0)$,且 $f(0,0)=2$.

(3) 求 $f(x,y)$ 在 D 的边界 $y^2=4(1-x^2)$ 上的最大值和最小值.

将 $y^2=4(1-x^2)(|x|\leqslant 1)$ 代入 $z=x^2-y^2+2$ 得

$$z(x)=x^2-4(1-x^2)+2=5x^2-2\Rightarrow\quad z'(x)=10x.$$

$z(0)=-2,z(\pm 1)=3$. $z(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为3,最小值为 -2.

(4) 比较函数值.

$z=f(x,y)$ 在 D 上的最大值是 $\max\{2,3,-2\}=3$,最小值是 $\min\{2,3,-2\}=-2$.

【评注】 求 $f(x,y)$ 在区域 D 的边界上的最值问题可化为条件最值问题,即求 $f(x,y)(=x^2-y^2+2)$ 在条件 $x^2+\dfrac{y^2}{4}-1=0$ 下的最值. 用拉格朗日乘子法,令

$$F(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 + 2 + \lambda\left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right),$$

解
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -2y + \dfrac{\lambda}{2}y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0, \end{cases}$$

得　　$M_i(x_i,y_i):(0,\pm 2)\quad (i=1,2),\quad M_i(x_i,y_i):(\pm 1,0)\quad (i=3,4).$

相应地　$f(M_i) = -2\quad (i=1,2),\quad f(M_i)=3\quad (i=3,4).$

因此$f(x,y) = x^2 - y^2 + 2$在D的边界上的最大值为3,最小值为-2.

24 设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数,且$\varphi'_y(x,y)\neq 0$.已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点,下列选项正确的是

(A) 若$f'_x(x_0,y_0)=0$,则$f'_y(x_0,y_0)=0$.

(B) 若$f'_x(x_0,y_0)=0$,则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则$f'_y(x_0,y_0)=0$.

(D) 若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

【分析一】 已知$\varphi(x_0,y_0)=0$.由$\varphi'_y(x,y)\neq 0$,在(x_0,y_0)邻域,可确定隐函数$y=y(x)$,满足$y(x_0)=y_0$,且$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$.

(x_0,y_0)是$f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$的一个极值点$\Leftrightarrow$ $x=x_0$是$z=f[x,y(x)]$的极值点.它的必要条件是

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}$$
$$=0.$$

若$f'_x(x_0,y_0)=0$,则必有$f'_y(x_0,y_0)=0$,或$\varphi'_x(x_0,y_0)=0$.因而不选(A),(B).

若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0\left(否则\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\neq 0\right)$,因此选(D).

【分析二】 用拉格朗日乘子法.令$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$,则$(x_0,y_0)$满足

$$\begin{cases} F'_x(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0) + \lambda\varphi'_x(x_0,y_0) = 0, & ① \\ F'_y(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) + \lambda\varphi'_y(x_0,y_0) = 0. & ② \end{cases}$$

若$f'_x(x_0,y_0)=0$,由①$\Rightarrow\lambda=0$或$\varphi'_x(x_0,y_0)=0$.当$\lambda=0$时,由②得$f'_y(x_0,y_0)=0$,但$\lambda\neq 0$时由②及$\varphi'_y(x_0,y_0)\neq 0\Rightarrow f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.因而不选(A)与(B).

若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,由①$\Rightarrow\lambda\neq 0$,再由②及$\varphi'_y(x_0,y_0)\neq 0\Rightarrow f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

因此选(D).

【评注】 有些考生选了(A),可能误认为点(x_0,y_0)是$f(x,y)$的极值点,从而必有$f'_x(x_0,y_0)=0$及$f'_y(x_0,y_0)=0$.其实,题设条件是点(x_0,y_0)为$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的极值点,即$x=x_0$是一元函数$f[x,y(x)]$的极值点,两者是不一样的.

25 求函数$u=x^2+y^2+z^2$在约束条件$z=x^2+y^2$和$x+y+z=4$下的最大值与最小值.

【解】 令 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$,解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+2\lambda x+\mu=0, & ①\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y+2\lambda y+\mu=0, & ②\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z-\lambda+\mu=0, & ③\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-z=0, & ④\\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu}=x+y+z-4=0, & ⑤\end{cases}$$

由①,②得 $x=y(\lambda=-1,\mu=0$ 不是解),再由④,⑤得 $z=2x^2,z=4-2x$,解得

$$P_1(1,1,2),\qquad P_2(-2,-2,8).$$

相应地 $\qquad u(P_1)=6,\qquad u(P_2)=72.$

因此,在所给条件下,u 的最大值为72,最小值为6.

26 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$,则点(0,0)

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点. (B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点. (D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

【分析一】 由 $dz=xdx+ydy=\dfrac{1}{2}dx^2+\dfrac{1}{2}dy^2=d\left[\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right]$

$\Rightarrow\quad z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)+C\quad$ (C 为 $\forall$ 常数).

因此按极值点的定义可知,点(0,0)是 $z=f(x,y)$ 的极小值点.选(D).

【分析二】 用极值判别法.

由 $dz=xdx+ydy$ 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=x,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=y$.因此,点(0,0)是驻点.

又由 $\qquad A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1,\quad B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\quad C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1,$

且在点(0,0)处,$AC-B^2=1>0,A>0$,可知点(0,0)是 $z=f(x,y)$ 的极小值点.故选(D).

27 已知函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值,$z=f(x+y,f(x,y))$.求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

【解】 由于 $f(1,1)=2$ 是函数 $f(u,v)$ 的极值,结合 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数即知 $f'_u(1,1)=f'_v(1,1)=0$.为了书写清楚起见,引入中间变量 $u=x+y,v=f(x,y)$,于是由题设知当 $(x,y)=(1,1)$ 时 $u=1+1=2,v=f(1,1)=2$,且 $z=z(x,y)$ 是 $z=f(u,v)$ 与 $u=x+y,v=f(x,y)$ 的二元复合函数.由题设知 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,利用一阶全微分形式不变性可得

$$\begin{aligned}dz&=f'_u du+f'_v dv=f'_u d(x+y)+f'_v df(x,y)\\&=f'_u\cdot(dx+dy)+f'_v\cdot(f'_x dx+f'_y dy)\\&=(f'_u+f'_x f'_v)dx+(f'_u+f'_y f'_v)dy.\end{aligned}$$

由此可得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_u+f'_xf'_v$. 再将$\dfrac{\partial z}{\partial x}$对 y 求偏导数,利用复合函数求偏导数的链锁法则就有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f''_{uu}\frac{\partial u}{\partial y}+f''_{uv}\frac{\partial v}{\partial y}+f''_{xy}f'_v+f'_x\left(f''_{vu}\frac{\partial u}{\partial y}+f''_{vv}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\&=f''_{uu}+f''_{uv}f'_y+f''_{xy}f'_v+f'_x(f''_{vu}+f''_{vv}f'_y).\end{aligned}$$

将 $x=1,y=1$ 以及对应的 $u=2,v=2$ 代入,并利用$f'_x(1,1)=f'_y(1,1)=0$就有

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=f''_{uu}(2,2)+f''_{xy}(2,2)f'_v(2,2).$$

结果也可以写成

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=f''_{uu}(2,2)+f''_{uv}(2,2)f'_v(2,2).$$

或 $$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=f''_{11}(2,2)+f''_{12}(2,2)f'_2(2,2)$$ 等形式.

28 求二元函数$f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$的极值.

【解】 为求函数$f(x,y)$的驻点,解如下方程组:

$$\begin{cases}f'_x=2x(2+y^2)=0, & ①\\ f'_y=2x^2y+\ln y+1=0, & ②\end{cases}$$

由①式可得$x=0$,代入②式得$\ln y+1=0\iff y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 这表明函数$f(x,y)$有唯一驻点$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

为判定$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$是否是极值点,再计算

$$A=f''_{xx}\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=2(2+y^2)\Big|_{y=\frac{1}{\mathrm{e}}}=2\left(2+\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)>0,$$

$$B=f''_{xy}\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=4xy\Big|_{(0,\frac{1}{\mathrm{e}})}=0,$$

$$C=f''_{yy}\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\left(2x^2+\frac{1}{y}\right)\Big|_{(0,\frac{1}{\mathrm{e}})}=\mathrm{e}>0,$$

由于在驻点$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$处$AC-B^2>0$且$A,C>0$,故$f(x,y)$在$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$处取得极小值$f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

29 求函数$u=xy+2yz$在约束条件$x^2+y^2+z^2=10$下的最大值和最小值.

【解】 本题是条件极值问题,可用拉格朗日乘数法求解. 为此引入拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-10),$$

为求$F(x,y,z,\lambda)$的驻点,应解如下方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=y+2\lambda x=0, & ①\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}=x+2z+2\lambda y=0, & ②\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial z}=2y+2\lambda z=0, & ③\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-10=0, & ④\end{cases}$$

从①,②,③式中消去 λ 可得驻点 (x,y,z) 应满足

$$\frac{y}{2x}=\frac{x+2z}{2y}=\frac{y}{z}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}2x=z,\\5x^2=y^2,\end{cases}$$

代入④即可求得四个驻点 $P_1=(1,-\sqrt{5},2)$,$P_2=(1,\sqrt{5},2)$,$P_3=(-1,-\sqrt{5},-2)$,$P_4=(-1,\sqrt{5},-2)$. 代入计算有

$$u(P_1)=-5\sqrt{5},\quad u(P_2)=5\sqrt{5},\quad u(P_3)=5\sqrt{5},\quad u(P_4)=-5\sqrt{5}.$$

又当 $\lambda=0$ 时,得两个可能的最值点为 $P_5(2\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$ 与 $P_6(-2\sqrt{2},0,\sqrt{2})$,代入计算有

$$u(P_5)=u(P_6)=0.$$

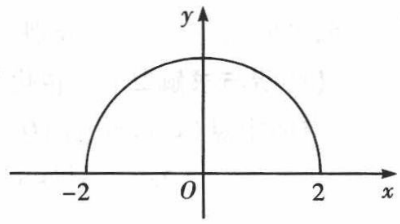
从而知在 P_1 与 P_4 两点处 u 取得最小值 $-5\sqrt{5}$,在 P_2 与 P_3 两点处 u 取得最大值 $5\sqrt{5}$. 即函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值是 $5\sqrt{5}$,最小值是 $-5\sqrt{5}$.

【评注】 考生容易漏掉可能最值点 P_5,P_6. 这是因为在解答中漏掉了"$\lambda=0$"的情形,运算中在方程两端约去"λ"时自然就假定"$\lambda\neq 0$"了. 虽然这不影响最后的答案,但作为解法是不完整的.

30 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值.

【分析与求解】 (1) 求 D 内的驻点及相应的函数值. 由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-2xy^2=0,\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}=4y-2x^2y=0,\end{cases}\quad 得\quad\begin{cases}y=1,\\x=\pm\sqrt{2}.\end{cases}$$



第 38 题图

于是 $f(x,y)$ 在 D 内有 2 个驻点: $M_1(\sqrt{2},1)$,$M_2(-\sqrt{2},1)$,相应的 $f(M_i)=2(i=1,2)$.

(2) 求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大与最小值.

D 的边界由两部分组成:

一是直线段 $\Gamma_1:y=0,-2\leqslant x\leqslant 2$,在 Γ_1 上 $f(x,y)=x^2(-2\leqslant x\leqslant 2)$,最小值为 0,最大值为 4.

另一是上半圆周 $\Gamma_2:y^2=4-x^2(-2\leqslant x\leqslant 2)$,在 Γ_2 上

$$\begin{aligned}f(x,y)&=x^2+2(4-x^2)-x^2(4-x^2)=8-5x^2+x^4\\&=\left(x^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\overset{记}{=\!=}h(x)\quad(-2\leqslant x\leqslant 2),\end{aligned}$$

$h'(x)=2\left(x^2-\dfrac{5}{2}\right)\cdot 2x$,由 $h'(x)=0$ 得 $x=0,x^2=\dfrac{5}{2}$.

又 $$h(0)=8,\quad h\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=\frac{7}{4},\quad h(\pm 2)=4,$$

于是 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值为 8,最小值为 0.

(3) 通过比较知,$f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 8,最小值为 0.

31 已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\x+y+3z=5,\end{cases}$ 求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

【分析与求解一】 这是三元函数的条件最值问题,含两个条件. 空间中点 (x,y,z) 到 xOy 平

面的距离即 $|z|$. 问题是求 $|z|$ 在条件 $\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0, \\ x+y+3z-5=0 \end{cases}$ 下的最值点，等价于求 z^2 在同样条件下的最值点.

令 $F(x,y,z,\lambda,\mu) = z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$，解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2\lambda x+\mu = 0, & ① \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2\lambda y+\mu = 0, & ② \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z-4\lambda z+3\mu = 0, & ③ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2+y^2-2z^2 = 0, & ④ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu} = x+y+3z-5 = 0, & ⑤ \end{cases}$$

由 ①,② 得 $x=y$，代入 ④ 得 $z=\pm x$，再由 ⑤ 分别得

$$P_1(x_1,y_1,z_1) = (1,1,1),\quad P_2(x_2,y_2,z_2) = (-5,-5,5).$$

由于实际问题存在最大值与最小值，又通过计算只有两个驻点，再比较就知道，曲线 C 上点 $(-5,-5,5)$，$(1,1,1)$ 分别是距 xOy 平面最远的点和最近的点.

【分析与求解二】 转化为二元函数的条件最值问题.

空间中点 (x,y,z) 到 xOy 平面的距离即 $|z|$，从曲线 C 的第一个方程解出

$$2z^2 = x^2+y^2,$$

由第二个方程解出 $z=\dfrac{1}{3}(5-x-y)$，代入第一个方程得

$$x^2+y^2-2\left[\frac{1}{3}(5-x-y)\right]^2 = 0.$$

问题变成求 x^2+y^2 在条件 $x^2+y^2-\dfrac{2}{9}(5-x-y)^2=0$ 下的最大、最小值点. 令

$$F(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda\left[x^2+y^2-\frac{2}{9}(5-x-y)^2\right],$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x+\lambda\left[2x+\dfrac{4}{9}(5-x-y)\right]=0, & ① \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y+\lambda\left[2y+\dfrac{4}{9}(5-x-y)\right]=0, & ② \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2+y^2-\dfrac{2}{9}(5-x-y)^2 = 0, & ③ \end{cases}$$

由 ①,②$\Rightarrow x=y$，代入 ③$\Rightarrow$

$$x^2 = \frac{1}{9}(5-2x)^2,\quad x = \pm\frac{1}{3}(5-2x).$$

于是分别得 $(x_1,y_1) = (1,1)$，$(x_2,y_2) = (-5,-5)$，

相应地得 $P_1(x_1,y_1,z_1) = (1,1,1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2) = (-5,-5,5)$.

由于实际问题存在最大值与最小值，又通过计算只有两个驻点，再比较就知道，曲线 C 上点

$(-5,-5,5),(1,1,1)$ 分别是距离 xOy 平面最远的点和最近的点．

【评注】 ① 本题考查点到坐标面的距离、多元函数的条件极值问题及其求解方法．关键是正确写出目标函数和约束条件．

② 本题解法比较多，请考生利用几何意义或利用对称性等方法解答本题．

32 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值．

【分析与求解】 先求 $z=z(x,y)$ 的驻点，这是隐函数求导问题．将方程两边分别对 x,y 求导得

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad -6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0\ .$$

$$由\ \begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}\ 得\ \begin{cases}x-3y=0,\\ -3x+10y-z=0,\end{cases}\ 即\ \begin{cases}x=3y,\\ z=y\ .\end{cases}反之亦然(只要\ z=y\neq 0).$$

代入原方程得 $9y^2-18y^2+10y^2-2y^2-y^2+18=0\Rightarrow\ y=\pm 3$ ．

因此得驻点 $(9,3),(-9,-3)$，相应的函数值为 $3,-3$．

为判断驻点是否是极大(小)值点，需求驻点处的二阶偏导数．将下面两个方程

$$x-3y-y\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad -3x+10y-z-y\frac{\partial z}{\partial y}-z\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

分别对 x,y 求导得

$$1-y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$-3-\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

$$10-\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\ .$$

在驻点 $(9,3)$ 处

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6},\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2},\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(9,3,3)}=\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow\qquad AC-B^2=\frac{1}{36}>0,\quad A>0\ .$$

按极值的充分判别法知，点 $(9,3)$ 是 $z=z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$．

类似地可以算出，在驻点 $(-9,-3)$ 处

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6},\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2},\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow\qquad AC-B^2=\frac{1}{36},\quad A<0$$

$\Rightarrow$ 点 $(-9,-3)$ 是 $z=z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z(-9,-3)=-3$．

【评注】 ① 求隐函数的极值问题，首先是隐函数求偏导数(一、二阶偏导数)问题，然后再用极值的充分判别法．

② 在此解法中，偏导数也可如下求得：

在等式 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 两端求微分,得

$$2x\mathrm{d}x-6(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+20y\mathrm{d}y-2(z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z)-2z\mathrm{d}z=0,$$

故 $\mathrm{d}z=\dfrac{x-3y}{y+z}\mathrm{d}x+\dfrac{-3x+10y-z}{y+z}\mathrm{d}y$,从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-3y}{y+z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-3x+10y-z}{y+z}.$$

③ 由于题中函数的特殊形式,本题还可以利用配方法进行求解.由于

$$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0,$$

所以 $2z^2=18+(x-3y)^2+(y-z)^2$,从而仅当 $x-3y=0$ 且 $y-z=0$ 时,z 取到极值.将 $x-3y=0$ 且 $y-z=0$ 代入上式得 $2z^2=18$,即 $z=\pm 3$,相应于 $x=\pm 9, y=\pm 3$.注意

$$z=\pm\sqrt{9+\frac{1}{2}(x-3y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2}$$

$\Rightarrow$ $(9,3)$ 是 $z(x,y)$ 的极小值点,极小值为 $z(9,3)=3$,而 $(-9,-3)$ 是 $z(x,y)$ 的极大值点,极大值为 $z(-9,-3)=-3$.

第十章　重积分

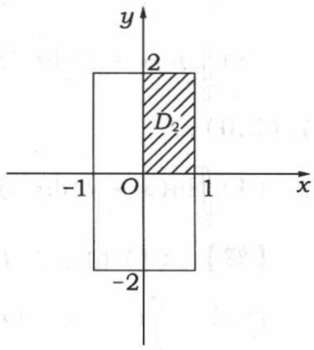
习题 10 - 1　二重积分的概念与性质

1 设有一平面薄板(不计其厚度)占有 xOy 面上的闭区域 D,薄板上分布有面密度为 $\mu = \mu(x,y)$ 的电荷,且 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续,试用二重积分表达该板上的全部电荷 Q.

【解】 用一组曲线网将 D 分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_i$,其面积也记为 $\Delta\sigma_i(i = 1,2,\cdots,n)$. 任取一点 $(\xi_i,\eta_i) \in \Delta\sigma_i$,则 $\Delta\sigma_i$ 上分布的电量 $\Delta Q_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$. 通过求和、取极限,便得到该板上的全部电荷为

$$Q = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma,\text{其中 } \lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\sigma_i \text{ 的直径}\}.$$

2 设 $I_1 = \iint_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D_1 = \{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1, -2\leqslant y\leqslant 2\}$;又 $I_2 = \iint_{D_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D_2 = \{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2\}$. 试利用二重积分的几何意义说明 I_1 和 I_2 之间的关系.



第 2 题图

【解】 如图,积分区域 D_1 同时关于 x 轴、y 轴对称,被积函数 $f(x,y) = x^2+y^2$ 同时是关于 x 和 y 的偶函数,即 $f(x,y)$ 的值对称于原点. 所以

$$I_1 = \iint_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = 4\iint_{D_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = 4I_2.$$

3 利用二重积分定义证明:

(1) $\iint_D \mathrm{d}\sigma = \sigma$(其中 σ 为 D 的面积);　(2) $\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$(其中 k 为常数);

(3) $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D = D_1\cup D_2$,D_1、D_2 为两个无公共内点的闭区域.

【证】 (1) $\iint_D \mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \sigma$.

(2)
$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}kf(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}k\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$
$$= k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(3) 将 D_1 和 D_2 分别任意分成 n_1 和 n_2 个小闭区域,且 $n = n_1 + n_2$,作和

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n_1}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i + \sum_{i=n_1+1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

令 $\lambda_1 = \max\{\Delta\sigma_i \text{ 的直径}, i = 1,2,\cdots,n_1\}$,

$\lambda_2 = \max\{\Delta\sigma_i \text{ 的直径}, i = n_1+1, n_1+2,\cdots,n\}$, $\lambda = \max\{\lambda_1,\lambda_2\}$,

则
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda_1\to 0}\sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i + \lim_{\lambda_2\to 0}\sum_{i=n_1+1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

即
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

4 试确定积分区域 D,使二重积分 $\iint\limits_D (1-2x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 达到最大值.

【解】 由二重积分的性质可知,当积分区域 D 包含了所有使被积函数 $1-2x^2-y^2$ 大于等于零的点,而不包含使被积函数 $1-2x^2-y^2$ 小于零的点,即当 D 是椭圆 $2x^2+y^2=1$ 所围的平面闭区域时,此二重积分的值达到最大.

5 根据二重积分的性质,比较下列积分的大小:

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 围成;

(2) $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成;

(3) $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是三角形闭区域,三顶点分别为 $(1,0)$,$(1,1)$,$(2,0)$;

(4) $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 3\leqslant x\leqslant 5, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

【解】 (1) 由于在 D 内,$x+y\leqslant 1$,从而 $(x+y)^2\geqslant (x+y)^3$,

所以 $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma \geqslant \iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$.

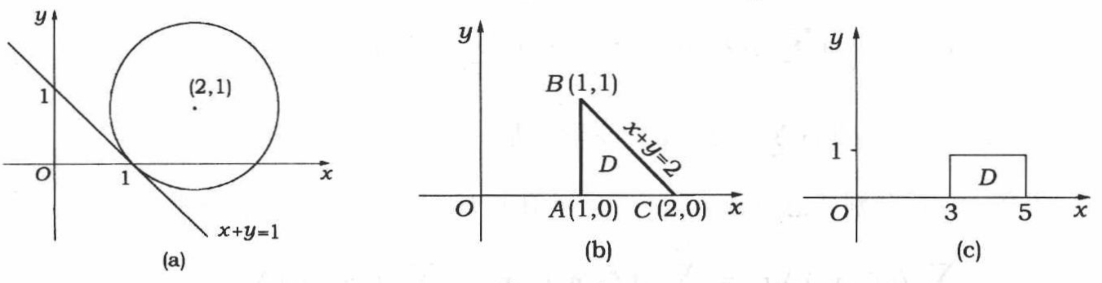
(2) 如图(a),积分区域 D 是圆心在 $(2,1)$,半径为 $\sqrt{2}$ 的圆域,且圆心 $(2,1)$ 到直线 $x+y=1$ 的距离恰为 $d=\dfrac{|2+1-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,即圆与直线 $x+y=1$ 相切,所以区域 D 内的点都满足 $x+y\geqslant 1$,故 $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$.

(3) 如图(b),在 BC 上:$x+y=2$,在 D 内:$1\leqslant x+y<\mathrm{e}$,则 $0\leqslant \ln(x+y)<1$,

故 $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma \geqslant \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$.

(4) 如图(c),在 D 内的任一点处都有 $x+y>\mathrm{e}$,所以 $\ln(x+y)>1$,

于是 $\ln(x+y)<[\ln(x+y)]^2$,故 $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$.



第 5 题图

6 利用二重积分的性质,估计下列积分的值:

(1) $I=\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$;

(2) $I=\iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \pi,0\leqslant y\leqslant \pi\}$;

(3) $I=\iint\limits_D (x+y+1)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$;

(4) $I=\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$.

【解】 (1) $0\leqslant xy(x+y)\leqslant 2$,所以 $0\leqslant \iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}\sigma\leqslant 2\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=2$.

(2) $0\leqslant \sin^2 x\sin^2 y\leqslant 1$,所以 $0\leqslant \iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y\mathrm{d}\sigma\leqslant \iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\pi^2$.

(3) $1\leqslant x+y+1\leqslant 4$,所以

$$\iint\limits_D 1\mathrm{d}\sigma\leqslant \iint\limits_D (x+y+1)\mathrm{d}\sigma\leqslant \iint\limits_D 4\mathrm{d}\sigma,\quad 2\leqslant \iint\limits_D (x+y+1)\mathrm{d}\sigma\leqslant 8.$$

(4) $9\leqslant x^2+4y^2+9\leqslant 4(x^2+y^2)+9\leqslant 25$,所以

$$36\pi\leqslant 9\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma\leqslant \iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma\leqslant 25\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=100\pi.$$

习题 10－2 二重积分的计算法

1 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$;

(2) $\iint\limits_D (3x+2y)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由两坐标轴与直线 $x+y=2$ 围成的闭区域;

(3) $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$;

(4) $\iint\limits_D x\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$,$(\pi,0)$ 和 (π,π) 的三角形区域.

【解】 (1) 因为 D 同时关于 x 轴、y 轴对称,且 (x^2+y^2) 也同时关于 x 轴、y 轴对称.

故
$$I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$$
$$=4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2+y^2)\mathrm{d}y=4\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$$

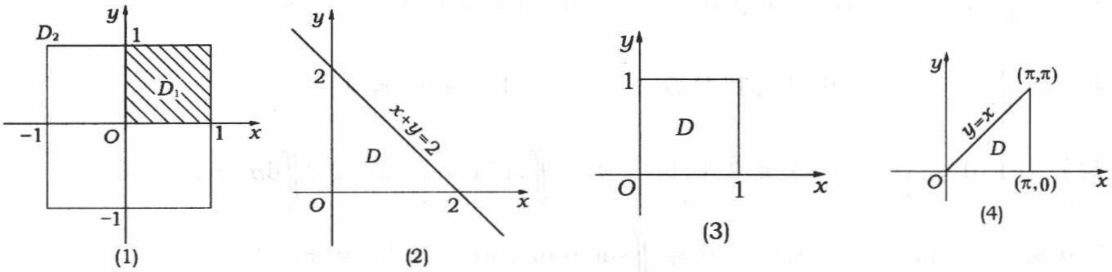
(2) $I=\iint\limits_D (3x+2y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}(3x+2y)\mathrm{d}y=-2\int_0^2(x^2-x-2)\mathrm{d}x=\frac{20}{3}$.

(3)
$$I=\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left(\frac{1}{4}x^4+x^3y+y^3x\right)\Bigg|_0^1\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{1}{4}+y+y^3\right)\mathrm{d}y$$

$$= \left[\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = 1.$$

(4) $$I = \iint_D x\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{x} x\cos(x+y)\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} x\sin(x+y)\Big|_0^{x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi} x(\sin 2x - \sin x)\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi} x\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \cos x\right) = -\frac{3}{2}\pi.$$



第 1 题图

2 画出积分区域，并计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$，$y=x^2$ 所围成的闭区域；

(2) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 与 y 轴所围成的右半闭区域；

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$；

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=2$，$y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域.

【解】 (1) $$I = \iint_D x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\sqrt{y}\mathrm{d}y = \int_0^1 x\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 x(x^{\frac{3}{4}} - x^3)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left[\frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}} - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{6}{55}.$$

(2) $$I = \iint_D xy^2\mathrm{d}\sigma = \int_{-2}^{2}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4-y^2}} xy^2\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^{2} y^2\cdot\frac{1}{2}(4-y^2)\mathrm{d}y = \int_0^2 (4y^2 - y^4)\mathrm{d}y = \left[\frac{4}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5\right]_0^2 = \frac{64}{15}.$$

(3) 将 D 视为 Y 型区域，如图，$D = D_1 + D_2$，

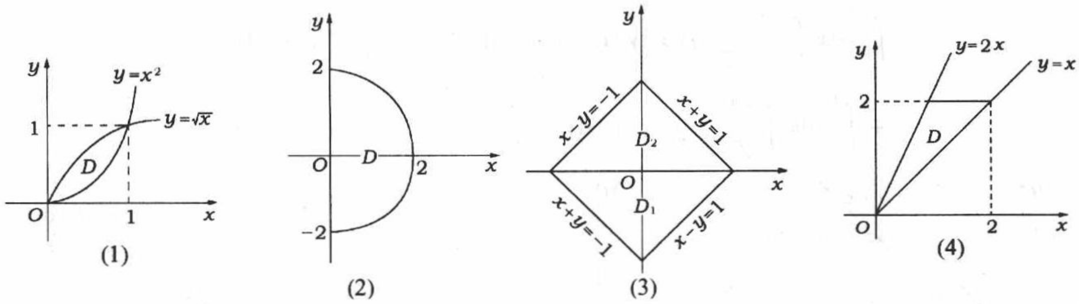
$$I = \iint_{D_1}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{-y-1}^{1+y}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x + \int_0^1\mathrm{d}y\int_{y-1}^{1-y}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{0}\mathrm{e}^y(\mathrm{e}^{1+y} - \mathrm{e}^{-y-1})\mathrm{d}y + \int_0^1\mathrm{e}^y(\mathrm{e}^{1-y} - \mathrm{e}^{y-1})\mathrm{d}y$$

$$= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1+2y} - \mathrm{e}^{-1}y\right]_{-1}^{0} + \left[\mathrm{e}y - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y-1}\right]_0^1 = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}.$$

(4) $$I = \iint_D (x^2+y^2-x)\mathrm{d}\sigma = \int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^2\left(\frac{19}{24}y^3 - \frac{3}{8}y^2\right)\mathrm{d}y = \left[\frac{19}{24}\times\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{8}y^3\right]_0^2 = \frac{13}{6}.$$



第 2 题图

3 如果二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的被积函数$f(x,y)$是两个函数$f_1(x)$及$f_2(y)$的乘积，即$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$，积分区域$D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$，证明这个二重积分等于两个单积分的乘积，即

$$\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right].$$

【证】 $\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b\left[\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$

在上式右端的第一次积分$\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}y$中，$f_1(x)$与积分变量$y$无关，可视为常数提到积分号外，因此上式右端等于

$$\int_a^b f_1(x)\cdot\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

而在这个积分中，由于$\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y$为常数，故又可提到积分号外，从而得到

$$\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right]\cdot\left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right] = \left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right].$$

4 化二重积分$I = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$为二次积分（分别列出对两个变量先后次序不同的二次积分），其中积分区域D是：

(1) 由直线$y = x$及抛物线$y^2 = 4x$所围成的闭区域；

(2) 由x轴与半圆周$x^2 + y^2 = r^2 (y \geqslant 0)$所围成的闭区域；

(3) 由直线$y = x, x = 2$与双曲线$y = \dfrac{1}{x}(x > 0)$所围成的闭区域；

(4) 环形区域$\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

【解】 (1)$I = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^4\mathrm{d}x\int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x.$

(2)$I = \int_{-r}^{r}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^r\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$

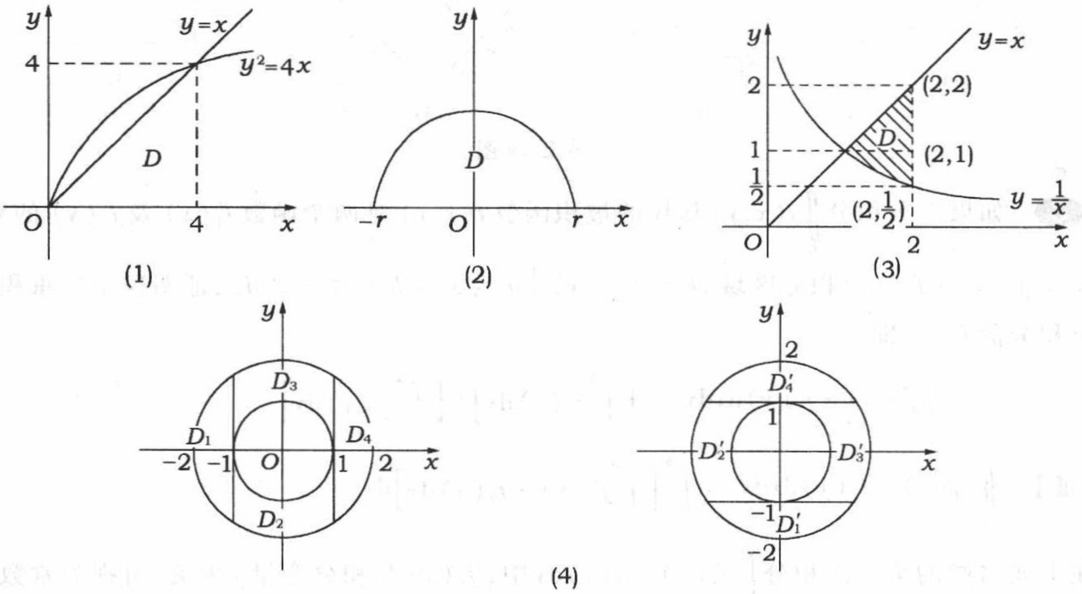
(3)$I = \int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2 f(x,y)\mathrm{d}x.$

(4)1) 先将D视为X型区域，如图将D分成 4 个小区域D_1, D_2, D_3, D_4，则

$$I = \iint\limits_{D_1+D_2+D_3+D_4} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$$

$$+ \int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{1}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy.$$



第 4 题图

2）再将 D 视为 Y 型区域，如图，将 D 分成 4 个小区域 D'_1, D'_2, D'_3, D'_4，

$$I = \iint\limits_{D'_1+D'_2+D'_3+D'_4} f(x,y)\,d\sigma$$

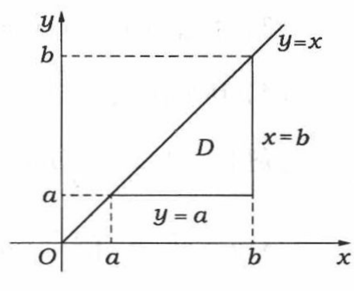
$$= \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$$

$$+ \int_{-1}^{1} dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

5 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，其中 D 是由直线 $y = x, y = a$ 及 $x = b\,(b > a)$ 所围成的闭区域，证明：

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)\,dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)\,dx.$$

【证】 因为 $f(x,y)$ 在 D 上连续，故 $I = \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$ 存在. 积分域 D 如图所示.



第 5 题图

如将 D 视为 X 型区域，则有 $I = \int_a^b dx \int_a^x f(x,y)\,dy$，

如将 D 视为 Y 型区域，则有 $I = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)\,dx$，

故 $\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)\,dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)\,dx.$

6 改变下列二次积分的积分次序：

(1) $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)\,dx$；　　　　(2) $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx$；

(3) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$;　　(4) $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$;

(5) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$;　　(6) $\int_0^{\pi} dx \int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)\,dy$.

【解】 (1) 所给二次积分等于二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$,其中$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y, 0\leqslant y\leqslant 1\}$. D可改写为$\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant 1\}$(图(1)),于是　原式 $=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)\,dy$.

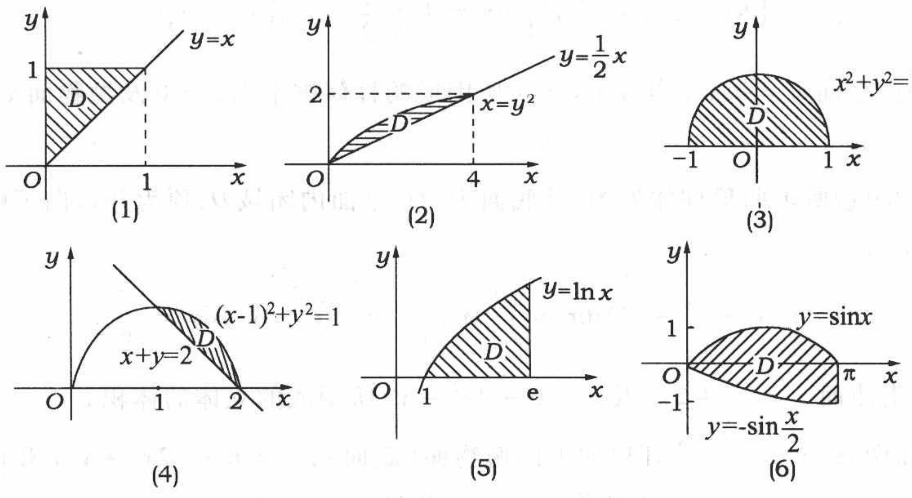
(2) 所给二次积分等于二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$,其中$D=\{(x,y)\mid y^2\leqslant x\leqslant 2y, 0\leqslant y\leqslant 2\}$. 又$D$可表示为$\{(x,y)\mid \frac{x}{2}\leqslant y\leqslant \sqrt{x}, 0\leqslant x\leqslant 4\}$(图(2)),因此　原式 $=\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$.

(3) 所给二次积分等于二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$,其中$D=\{(x,y)\mid -\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant \sqrt{1-y^2}, 0\leqslant y\leqslant 1\}$. 又$D$可表示为$\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2}, -1\leqslant x\leqslant 1\}$(图(3)),因此

$$\text{原式}=\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

(4) 所给二次积分等于二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$,其中$D=\{(x,y)\mid 2-x\leqslant y\leqslant \sqrt{2x-x^2}, 1\leqslant x\leqslant 2\}$. 又$D$可表示为$\{(x,y)\mid 2-y\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-y^2}, 0\leqslant y\leqslant 1\}$(图(4)),故

$$\text{原式}=\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$$



第 6 题图

(5) 所给二次积分等于二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$,其中$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant \ln x, 1\leqslant x\leqslant e\}$. 又$D$可表示为$\{(x,y)\mid e^y\leqslant x\leqslant e, 0\leqslant y\leqslant 1\}$(图(5)),故原式 $=\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx$.

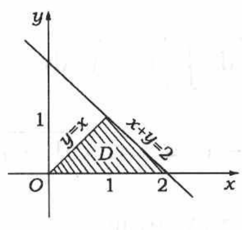
(6) 如图(6),将积分区域D表示为$D_1\cup D_2$,其中$D_1=\{(x,y)\mid \arcsin y\leqslant x\leqslant \pi-\arcsin y, 0\leqslant y\leqslant 1\}$, $D_2=\{(x,y)\mid -2\arcsin y\leqslant x\leqslant \pi, -1\leqslant y\leqslant 0\}$. 于是

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,dx.$$

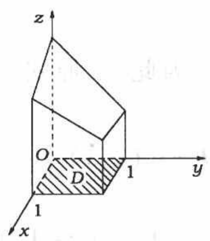
7 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x + y = 2, y = x$ 和 x 轴所围成，它的面密度 $\mu(x,y) = x^2 + y^2$，求该薄片的质量.

【解】 如图，$M = \iint\limits_D \rho(x,y)\,d\sigma = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2 + y^2)\,dx$

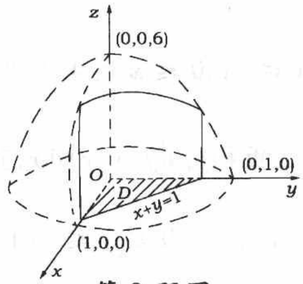
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}(2-y)^3 - \frac{1}{3}y^3 + 2y^2(1-y)\right]dy = \frac{4}{3}.$$



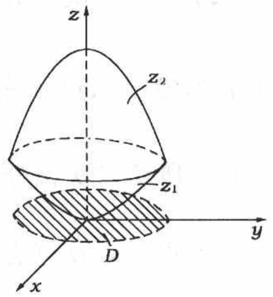
第 7 题图



第 8 题图



第 9 题图



第 10 题图

8 计算由四个平面 $x = 0, y = 0, x = 1, y = 1$ 所围成的柱体被平面 $z = 0$ 和 $2x + 3y + z = 6$ 截得的立体的体积 V.

【解】 如图，柱面的底面为 $z = 0$ 上的正方形闭域 D，顶面为 $z = 6 - 2x - 3y$，所以

$$V = \iint\limits_D (6 - 2x - 3y)\,d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^1 (6 - 2x + 3y)\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[6y - 2xy - \frac{3}{2}y^2\right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{9}{2} - 2x\right)dx = \frac{7}{2}.$$

9 求由平面 $x = 0, y = 0, x + y = 1$ 所围成的柱体被平面 $z = 0$ 及抛物面 $x^2 + y^2 = 6 - z$ 截得的立体的体积.

【解】 依题意所求曲顶柱体如图，其底面为 xOy 平面内闭域 D，顶为开口向下的旋转抛物面 $z = 6 - x^2 - y^2$. 故

$$V = \iint\limits_D (6 - x^2 - y^2)\,d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (6 - x^2 - y^2)\,dy = \frac{17}{6}.$$

10 求由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 及 $z = 6 - 2x^2 - y^2$ 所围成的立体的体积.

【解】 如图，$z_1 = x^2 + 2y^2$ 开口向上的抛物面(底面)，$z_2 = 6 - (2x^2 + y^2)$ 开口向下的抛物面(顶面)，D 为两曲面 z_1 和 z_2 的交线在 xOy 面内的投形区域 $x^2 + y^2 \leqslant 2$.

又因为 D 同时关于 x, y 轴对称，且被积函数是关于变量 x 和 y 的偶函数，故

$$V = \iint\limits_D (z_2 - z_1)\,d\sigma = \iint\limits_D (6 - 3x^2 - 3y^2)\,d\sigma$$

$$= 4\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} [6 - 3(x^2 + y^2)]\,dy$$

$$= 12\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} [2 - (x^2 + y^2)]\,dy = 6\pi.$$

11 画出积分区域 D,把积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 表示为极坐标形式的二次积分,其中积分域 D 是

(1) $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant a^2\}$; (2) $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 2x\}$;

(3) $\{(x,y) \mid a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant b^2\}$, $(0<a<b)$; (4) $\{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1-x, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

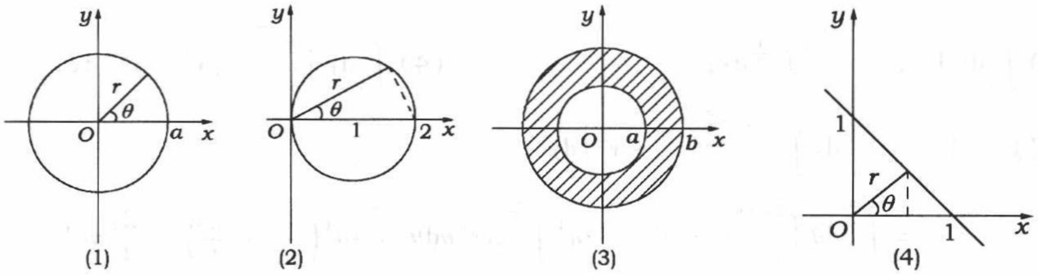
【解】 (1) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$.

(2) $(x-1)^2+y^2 \leqslant 1$, $r=2\cos\theta$,则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$.

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$.

(4) 如图任作极径 r,其极角为 θ,显然 $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $1 = x+y = r(\cos\theta+\sin\theta)$. 所以

$$r = \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta},\quad \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r.$$



第 11 题图

12 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$; (2) $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}y$;

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$; (4) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

【解】 (1) 积分域为 D: $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$,将 D 分成 D_1 和 D_2 两部分(如图(1)),则 D_1, D_2 分别可表为: D_1: $0 \leqslant r \leqslant \sec\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$; D_2: $0 \leqslant r \leqslant \csc\theta, \dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$,所以

原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\csc\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$.

(2) 如图(2),在极坐标系下,$x=2$ 的方程是 $r\cos\theta = 2$,即 $r = 2\sec\theta$, $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{3}$,所以

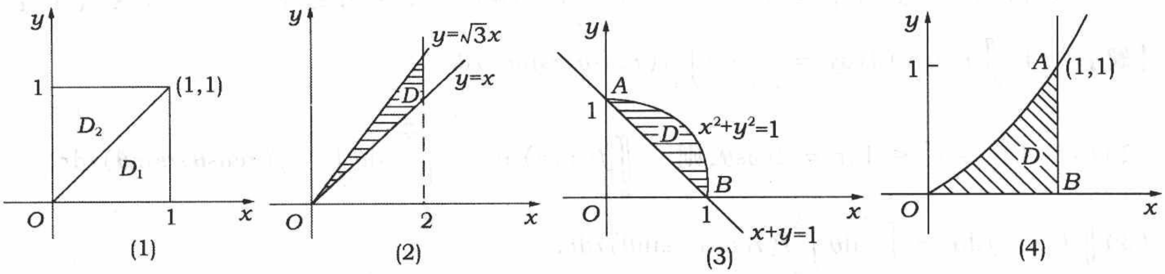
原式 $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sec\theta} f(r)r\,\mathrm{d}r$.

(3) 如图(3),在 AB 上, $r = \dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$,在 $\overset{\frown}{AB}$ 上, $r=1$, $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$,所以

原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$.

(4) 如图(4),在 AB 上, $r = \sec\theta$,在 $\overset{\frown}{AB}$ 上, $r = \tan\theta\sec\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$,所以

原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\tan\theta\sec\theta}^{\sec\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$.



第 12 题图

13 把下列积分化成极坐标形式,并计算积分值:

(1) $\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2) dy$;　　(2) $\int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2} dy$;

(3) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy$;　　(4) $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2) dx$.

【解】 (1) $\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2) dy$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^2 \cdot r dr = 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = 4a^4\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi a^4.$$

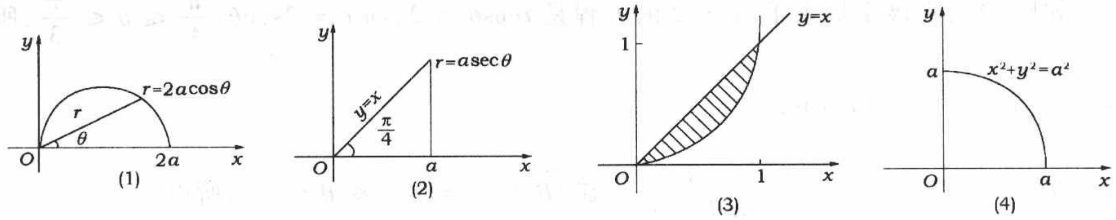
(2) $\int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sec\theta} r \cdot r dr = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta d\theta$

$$= \frac{a^3}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[\tan\theta\sec\theta + \ln(\tan\theta+\sec\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^3}{6}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)].$$

(3) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\tan\theta\sec\theta} \frac{1}{r}\cdot r dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} d\theta$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta} d\cos\theta = \left.\frac{1}{\cos\theta}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1.$$

(4) $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a r^2 \cdot r dr = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}a^4 = \frac{\pi}{8}a^4.$



第 13 题图

14 利用极坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4,x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0,y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

【解】 (1) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 e^{r^2}\cdot r\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{1}{2}(e^4-1)=\pi(e^4-1)$.

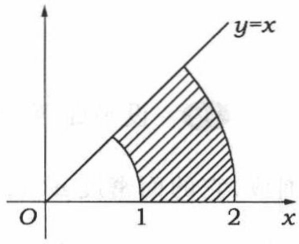
(2) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\ln(1+r^2)\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\int_0^1\ln(1+r^2)\mathrm{d}(1+r^2)$

$$=\frac{\pi}{4}\left[(1+r^2)\ln(1+r^2)\Big|_0^1-1\right]=\frac{\pi}{4}(2\ln2-1).$$

(3) 如图,$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\arctan(\tan\theta)r\mathrm{d}r$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{3}{64}\pi^2.$$



第 14 题图

(4) $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\pi^{2\pi}\sin r\cdot r\mathrm{d}r$

$$=2\pi\left(-\int_\pi^{2\pi}r\mathrm{d}\cos r\right)=-6\pi^2.$$

15 选用适当的坐标系计算下列各题:

(1) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由直线 $x=2,y=x$ 及曲线 $xy=1$ 围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 与坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由直线 $y=x,y=a+x,y=a,y=3a(a>0)$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是圆环形闭区域 $\{(x,y)\mid a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$.

【解】 (1) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y=\int_1^2 x^2\left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x}\mathrm{d}x=\int_1^2(x^3-x)\mathrm{d}x=\frac{9}{4}$.

(2) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\mathrm{d}r^2$

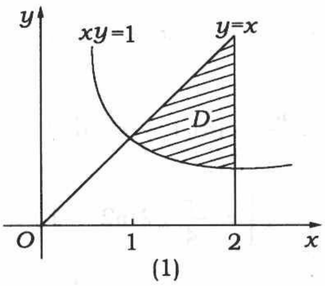
$$\xlongequal{r^2=t}\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\left[\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}\right]$$

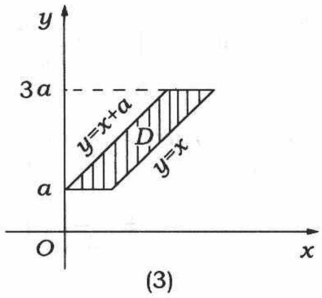
$$=\left[\frac{\pi}{4}\arcsin t+(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}.$$

(3) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_a^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x = \int_a^{3a}\left[\frac{1}{3}x^3+y^2x\right]_{y-a}^{y}\mathrm{d}y$

$$= \int_a^{3a}\left[\frac{1}{3}y^3+ay^2-\frac{1}{3}(y-a)^3\right]\mathrm{d}y = 14a^4.$$

(4) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b r\cdot r\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{3}(b^3-a^3)$.

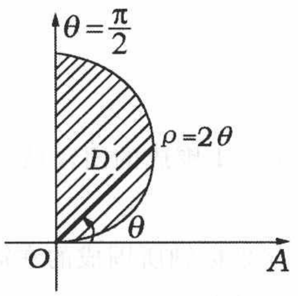




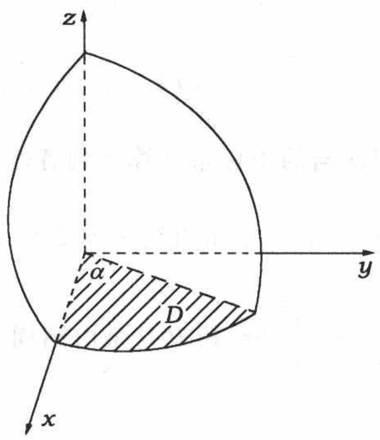
第 15 题图

16 设平面薄片所占的闭区域 D 由螺线 $\rho=2\theta$ 上一段弧 $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成，它的面密度 $\mu(x,y)=x^2+y^2$，求这薄片的质量（如图）.

【解】 $M=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\theta}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(2\theta)^4\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^5}{40}$.



第 16 题图



第 17 题图

17 求由平面 $y=0, y=kx(k>0), z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积（如图）.

【解】 如图，因为 $\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{kx}{x}=k$, $\alpha=\arctan k$，所以

$$V=\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{r\theta}} \sqrt{R^2-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\arctan k}\mathrm{d}\theta\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}r\mathrm{d}r = \frac{1}{3}R^3\arctan k.$$

18 计算以 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底，而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

【解】 由 $x^2+y^2=ax$ 得 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

$$V=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\text{其中 } D:\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\leqslant\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$V\xlongequal{\text{由对称性}}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}r^2 r\mathrm{d}r=\frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{32}\pi a^4.$$

19 作适当的变换,计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (x-y)^2\sin^2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是平行四边形闭区域,它的四个顶点是 $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$ 和 $(0,\pi)$;

(2) $\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 由两条双曲线 $xy=1$ 和 $xy=2$,直线 $y=x$ 和 $y=4x$ 围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=1$ 围成的闭区域;

(4) $\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

【解】 (1) 令 $\begin{cases}u=x-y,\\ v=x+y,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}(u+v),\\ y=\frac{1}{2}(v-u),\end{cases}$ 而 $J=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$,故

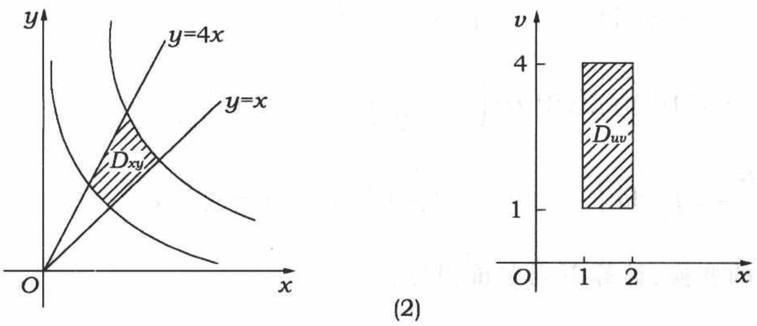
$$\begin{aligned}&\iint\limits_{D_{xy}}(x-y)^2\sin^2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\iint\limits_{D_{uv}}u^2\sin^2 v\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}u^2\mathrm{d}u\int_{\pi}^{3\pi}\sin^2 v\mathrm{d}v\\ &=\int_0^{\pi}u^2\mathrm{d}u\int_{\pi}^{3\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2v)\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\pi^3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\frac{1}{3}\pi^4.\end{aligned}$$

(1)

(2) 令 $\begin{cases}u=xy,\\ v=\frac{y}{x},\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=\sqrt{\frac{u}{v}},\\ y=\sqrt{uv},\end{cases}$ 而 $J=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}=\frac{1}{2v}$,故

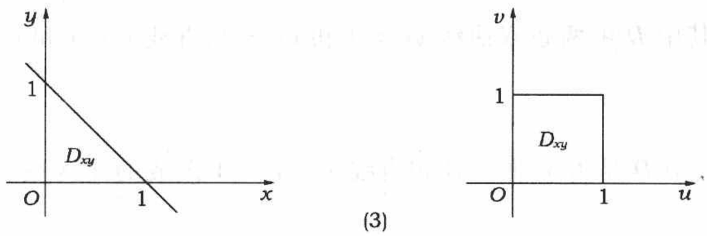
$$\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{uv}}u^2\cdot\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_1^2 u^2\mathrm{d}u\int_1^4\frac{1}{v}\mathrm{d}v=\frac{7}{3}\ln 2.$$

(3) 令 $\begin{cases}u=x+y,\\ v=\frac{y}{x+y},\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=u(1-v),\\ y=uv,\end{cases}$ 而 $J=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}=u$,故



(2)

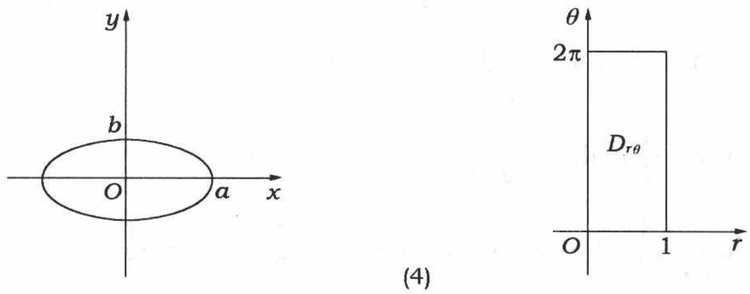
$$\iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{uv}} \mathrm{e}^{v} \cdot u\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^1 u\mathrm{d}u \int_0^1 \mathrm{e}^{v}\mathrm{d}v = \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).$$



(3)

(4) 令$\begin{cases} x = ar\cos\theta, \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$，则$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = r^2$，而 $J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta \\ y'_r & y'_\theta \end{vmatrix} = abr$，故

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{r\theta}} r^2 \cdot abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{1}{2}ab\pi.$$



(4)

20 求由下列曲线所围成的闭区域 D 的面积：

(1) D 是由曲线 $xy = 4, xy = 8, xy^3 = 5, xy^3 = 15$ 围成的第一象限部分的闭区域；

(2) D 是由曲线 $y = x^3, y = 4x^3, x = y^3, x = 4y^3$ 所围成的第一象限部分的闭区域．

【解】 (1) 令 $u = xy, v = xy^3$，则 $x = u^{\frac{3}{2}}v^{-\frac{1}{2}}, y = u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}$，而 $J = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \dfrac{1}{2v}$，$D_{uv}$：$4 \leqslant u \leqslant 8, 5 \leqslant v \leqslant 15$，所以

$$S = \iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{uv}}\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_4^8\mathrm{d}u\int_5^{15}\frac{\mathrm{d}v}{v} = 2\ln 3.$$

(2) 令 $u = \dfrac{y}{x^3}, v = \dfrac{x}{y^3}$，则 $x = u^{-\frac{3}{8}}v^{-\frac{1}{8}}, y = u^{-\frac{1}{8}}v^{-\frac{3}{8}}, J = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \dfrac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}}$，$D_{uv}$：$1 \leqslant u \leqslant 4, 1 \leqslant v \leqslant 4$．

故 $$S = \iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{uv}}\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{8}\int_1^4 u^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u\int_1^4 v^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}v = \frac{1}{8}.$$

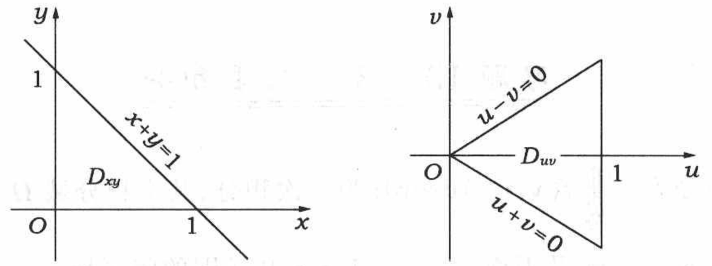
21 设闭区域 D 是由直线 $x + y = 1, x = 0, y = 0$ 所围成，求证

$$\iint\limits_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\sin 1 .$$

【证】 令 $\begin{cases} u = x+y, \\ v = x-y, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(u+v), \\ y = \dfrac{1}{2}(u-v), \end{cases}$ 而 $J = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \dfrac{1}{2}$,故

$$\iint\limits_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{uv}} \cos\frac{v}{u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}u\int_{-u}^{u}\cos\frac{v}{u}\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left(u\sin\frac{v}{u}\Bigg|_{-u}^{u}\right)\mathrm{d}u = \sin 1\cdot\int_0^1 u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin 1 .$$



第 21 题图

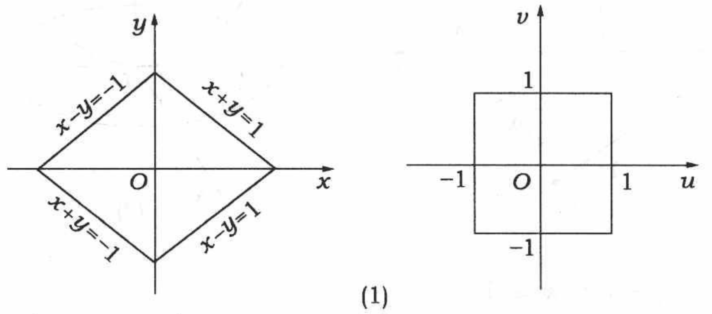
22 选取适当的变换,证明下列等式:

(1) $\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u$,其中闭区域 $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$;

(2) $\iint\limits_D f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}u$,其中 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$,且 $a^2+b^2 \neq 0$.

【证】 (1) 令 $\begin{cases} x+y = u, \\ x-y = v, \end{cases}$ 又 $J = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \dfrac{1}{2}$,故

$$\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{uv}} f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}v = \int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u.$$



(1)

(2) 令 $x = \dfrac{au-bv}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y = \dfrac{bu+av}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $ax+by+c = u\sqrt{a^2+b^2}+c$,

$$x^2+y^2 = \left(\frac{au-bv}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{bu+av}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = u^2+v^2,\text{又}$$

$$J=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{vmatrix}=1,$$

故
$$\begin{aligned}\iint_{D_{xy}} f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D_{uv}} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}v \\ &= 2\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\cdot\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

习题 10 - 3　三重积分

1 化三重积分 $I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次积分，其中积分域 Ω 分别为：

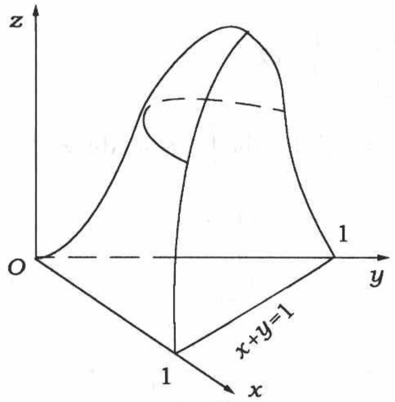
(1) 由双曲抛物面 $z=xy$ 及平面 $x+y=1, z=0$ 所围的闭区域；

(2) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 围成的闭区域；

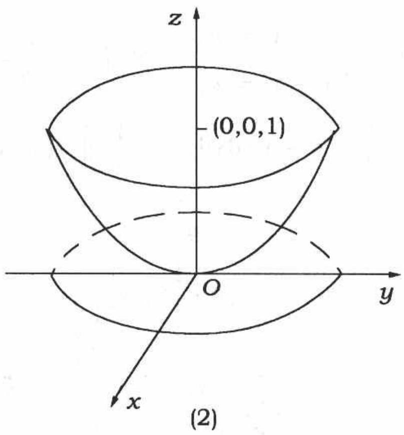
(3) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域；

(4) 由曲面 $cz=xy\,(c>0)$，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$z=0$ 所围成的第一卦限内的闭区域．

【解】 (1) 如图(1)，$\Omega:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x,\\ 0\leqslant z\leqslant xy,\end{cases}$ 故 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{xy}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$



(1)



(2)

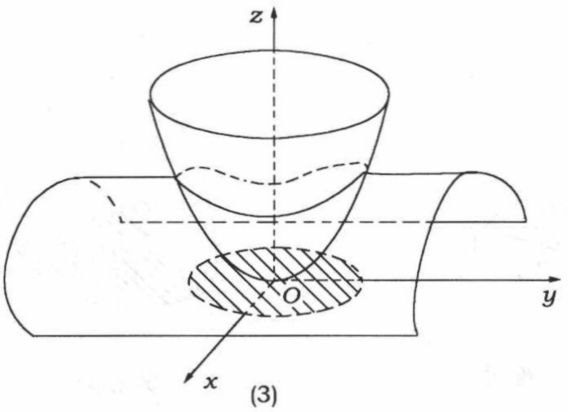
(2) 如图(2)，$\Omega:\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\\ x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1,\end{cases}$

故 $I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$

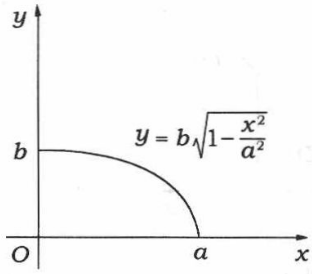
(3) 抛物面 $z=x^2+2y^2$ 与抛物柱面 $z=2-x^2$ 的交线在 xOy 面内的投影为圆域 $D:x^2+y^2\leqslant$

1,如图(3).

$$\Omega:\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2},\\ x^2+2y^2\leqslant z\leqslant 2-x^2,\end{cases}\quad 故\quad I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$



(3)



(4)

第 1 题图

(4) 依题意 Ω 的底面为 xOy 面上(即 $z=0$) 第一象限中$\frac{1}{4}$椭圆,顶面为曲面 $z=\frac{1}{c}xy$,D_{xy} 为如图(4) 所示的区域,故 $I=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{1}{c}xy}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$

2 设有一物体,占有空间闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\}$,在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)=x+y+z$,计算该物体的质量.

【解】 $M=\iiint\limits_{\Omega}\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x+y+z)\,\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\left(x+y+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}.$$

3 如果三重积分$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$的被积函数$f(x,y,z)=f_1(x)f_2(y)f_3(z)$,积分区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d,l\leqslant z\leqslant m\}$,证明:

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x\int_c^d f_2(y)\,\mathrm{d}y\int_l^m f_3(z)\,\mathrm{d}z.$$

【证】 $\iiint\limits_{\Omega}f_1(x)f_2(y)f_3(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b\left[\int_c^d\left(\int_l^m f_1(x)f_2(y)f_3(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$

$$=\int_a^b\left[\int_c^d\left(f_1(x)f_2(y)\cdot\int_l^m f_3(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\left(\int_l^m f_3(z)\,\mathrm{d}z\right)\cdot\left(\int_c^d f_1(x)f_2(y)\,\mathrm{d}y\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left[\int_l^m f_3(z)\,\mathrm{d}z\right]\cdot\int_a^b\left[f_1(x)\cdot\int_c^d f_2(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

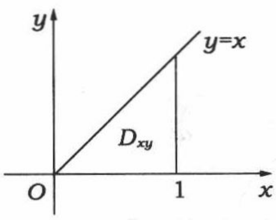
$$=\int_l^m f_3(z)\,\mathrm{d}z\cdot\int_c^d f_2(y)\,\mathrm{d}y\cdot\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x=右端.$$

4 计算$\iiint\limits_{\Omega}xy^2z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 是由曲面 $z=xy$ 与平面 $y=x,x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭区域.

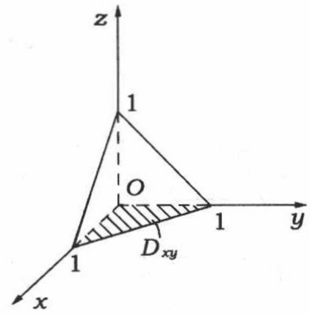
【解】 依题意知，Ω 的顶面为 $z = xy$，底面为 $z = 0$，Ω 在 xOy 面内的投影为 D_{xy}（如图）. 故

$$I = \iiint_{\Omega} xy^2z^3\,\mathrm{d}V = \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^x y^2\mathrm{d}y \int_0^{xy} z^3\,\mathrm{d}z = \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^x y^2 \cdot \frac{x^4y^4}{4}\mathrm{d}y$$

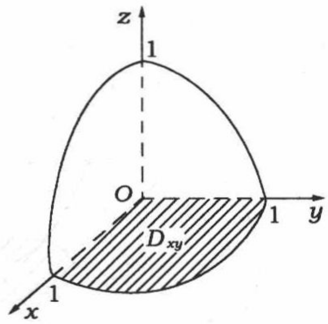
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 x^5\mathrm{d}x \int_0^x y^6\mathrm{d}y = \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\mathrm{d}x = \frac{1}{364}.$$



第 4 题图



第 5 题图



第 6 题图

5 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 为平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x+y+z = 1$ 所围成的四面体.

【解】 Ω 如图，它在 xOy 平面上的投影为 D_{xy}，故

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}V}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} \frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\right]\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right).$$

6 计算 $\iiint_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2 = 1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

【解】 积分域如图，

$$I = \iiint_{\Omega} xyz\mathrm{d}V = \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\mathrm{d}z$$

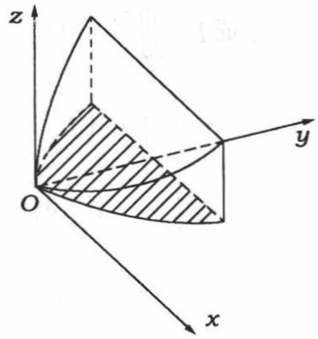
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)y\mathrm{d}y = \frac{1}{48}.$$

7 计算 $\iiint_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由平面 $z = 0, z = y, y = 1$ 及抛物柱面 $y = x^2$ 所围成的闭区域.

【解】 积分域 Ω 如图，

$$I = \iiint_{\Omega} xz\mathrm{d}V = \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x \int_{x^2}^1 \mathrm{d}y \int_0^y z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x \int_{x^2}^1 y^2\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{3}x(1-x^6)\mathrm{d}x = 0.$$



第 7 题图

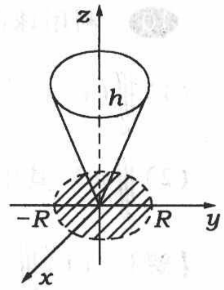
8 计算 $\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由锥面 $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 z

$= h(R > 0, h > 0)$ 所围成的闭区域.

【解】 如图,积分域 Ω 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leqslant R^2$,故

$$I = \iiint_{\Omega} z\mathrm{d}V = \int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left[h^2 - \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\pi h^2 R^2.$$



第 8 题图

9 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$,其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2)\mathrm{d}V$,其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 及平面 $z = 2$ 所围成的闭区域.

【解】 (1) 由 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 和 $z = x^2 + y^2$ 消去 z,得 $(x^2 + y^2)^2 = 2 - (x^2 + y^2)$,即 $x^2 + y^2 = 1$. 从而知 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$(图(1)). 利用柱面坐标,$\Omega$ 可表示为 $\rho^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2-\rho^2}, 0 \leqslant \rho \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$,于是

$$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z\mathrm{d}z$$

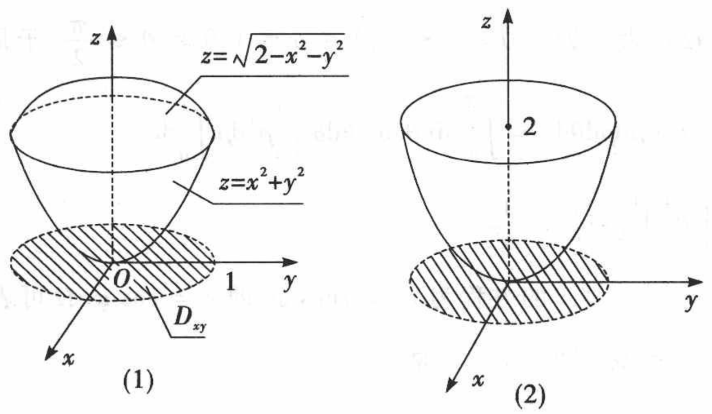
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho(2-\rho^2-\rho^4)\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = \frac{7}{12}\pi.$$

(2) 由 $x^2 + y^2 = 2z$ 及 $z = 2$ 消去 z 得 $x^2 + y^2 = 4$,从而知 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$(图(2)). 利用柱面坐标,$\Omega$ 可表示为

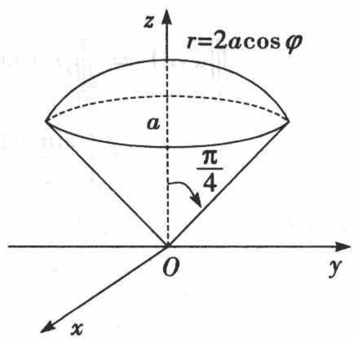
$$\frac{\rho^2}{2} \leqslant z \leqslant 2, 0 \leqslant \rho \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

于是 $$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{2}\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right)\mathrm{d}\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{12}\right]_0^2 = \frac{16}{3}\pi.$$



第 9 题图



第 10 题图

10 利用球面坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V$，其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2, x^2+y^2\leqslant z^2$ 所确定.

【解】 (1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$

$$=2\pi\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1=\frac{4}{5}\pi.$$

(2) 在球面坐标系中，不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2$，即 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az$，变为 $r^2\leqslant 2ar\cos\varphi$，即 $r\leqslant 2a\cos\varphi$；$x^2+y^2\leqslant z^2$ 变为 $r^2\sin^2\varphi\leqslant r^2\cos^2\varphi$，即 $\tan\varphi\leqslant 1$，亦即 $\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$. 因此 Ω 可表示为 $0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$（如图）.

于是 $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^3\mathrm{d}r$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4\mathrm{d}\varphi=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}4a^4\cos^5\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=8\pi a^4\left[-\frac{\cos^6\varphi}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{7}{6}\pi a^4.$$

11 选用适当的坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}V$，其中 Ω 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1, z=0, x=0, y=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区域；

(4) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中闭区域 Ω 由不等式 $0<a\leqslant\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqslant A, z\geqslant 0$ 所确定.

【解】 (1) 利用柱面坐标计算. Ω 可表示为 $0\leqslant z\leqslant 1, 0\leqslant\rho\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. 于是

$$\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^1\mathrm{d}z$$

$$=\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\left[z\right]_0^1=\frac{1}{8}.$$

(2) 在球面坐标系中，球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 的方程为 $r^2=r\cos\varphi$，即 $r=\cos\varphi$. Ω 可表示为 $0\leqslant r\leqslant\cos\varphi, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$（图(2)）. 于是

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^3\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{\cos^4\varphi}{4}\mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi}{2}\left[\frac{\cos^5\varphi}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10}.$$

(3) 利用柱面坐标进行计算. Ω 可表示为

$$\frac{5}{2}\rho \leqslant z \leqslant 5, 0 \leqslant \rho \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi(\text{图}(3)),\text{于是}$$

$$\iiint_\Omega (x^2 + y^2)\mathrm{d}V = \iiint_\Omega \rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

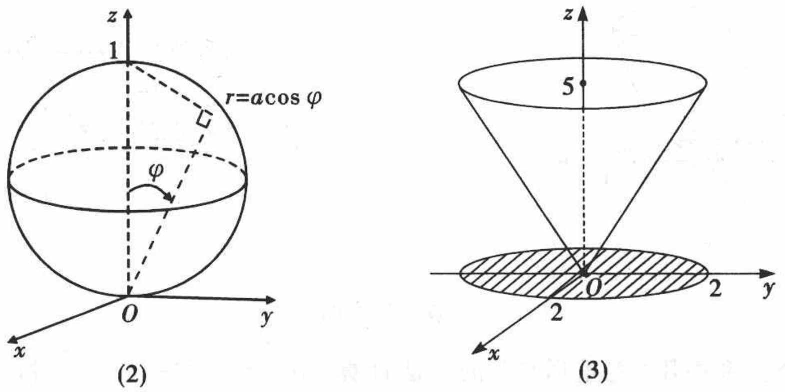
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\frac{5}{2}\rho}^5\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\left(5-\frac{5}{2}\rho\right)\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi\left[\frac{5}{4}\rho^4 - \frac{1}{2}\rho^5\right]_0^2 = 8\pi.$$

(4) 在球面坐标系中, Ω 可表示为 $a \leqslant r \leqslant A, 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 于是

$$\iiint_\Omega (x^2 + y^2)\mathrm{d}V = \iiint_\Omega r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^A r^4\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{A^5 - a^5}{5}\right) = \frac{4\pi}{15}(A^5 - a^5).$$



第 11 题图

12 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积:

(1) $z = 6 - x^2 - y^2$ 及 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az(a > 0)$ 及 $x^2 + y^2 = z^2$(含有 z 轴的部分);

(3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = z^2 + y^2$;

(4) $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ 及 $x^2 + y^2 = 4z$.

【解】 (1) 用直角坐标计算. 由 $z = 6 - x^2 - y^2$ 和 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 消去 z, 解得 $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, 即 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2 + y^2 \leqslant 4$. 于是

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 6 - (x^2 + y^2), x^2 + y^2 \leqslant 4\}.$$

因此 $$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}V = \iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-(x^2+y^2)}\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_{xy}}\left[6 - (x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (\text{用极坐标})$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (6 - r^2 - r) r dr = 2\pi \left[3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi.$$

(2) 用“先重后单”的方法计算. 由 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 和 $x^2 + y^2 = z^2$ 解得 $z = a$. 对固定的 z, 当 $0 \leqslant z \leqslant a$ 时, $D_z = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant z^2\}$; 当 $a \leqslant z \leqslant 2a$ 时, $D_z = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2az - z^2\}$. 于是

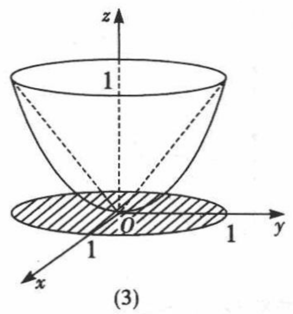
$$V = V_1 + V_2 = \int_0^a dz \iint_{D_z} dxdy + \int_a^{2a} dz \iint_{D_z} dxdy$$

$$= \int_0^a \pi z^2 dz + \int_a^{2a} \pi(2az - z^2) dz = \frac{1}{3}\pi a^3 + \frac{2}{3}\pi a^3 = \pi a^3.$$

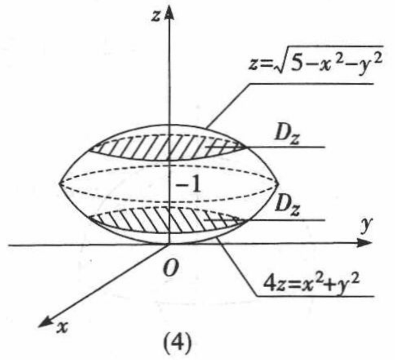
(3) 用柱面坐标计算. 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $z = x^2 + y^2$ 的柱面坐标方程分别为 $z = \rho$ 和 $z = \rho^2$. 消去 z, 得 $\rho = 1$, 故它们所围的立体在 xOy 面上的投影区域为 $\rho \leqslant 1$(图(3)). 因此

$$\Omega = \{(\rho,\theta,z) \mid \rho^2 \leqslant z \leqslant \rho, 0 \leqslant \rho \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$$

于是 $$V = \iiint_\Omega dV = \iiint_\Omega \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\rho} dz = 2\pi \int_0^1 \rho(\rho - \rho^2) d\rho = \frac{\pi}{6}.$$



(3)



(4)

第 12 题图

(4) 在直角坐标系中用“先重后单”的方法计算. 由 $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ 和 $x^2 + y^2 = 4z$ 可解得 $z = 1$. 对固定的 z, 当 $0 \leqslant z \leqslant 1$ 时, $D_z = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 4z\}$; 当 $1 \leqslant z \leqslant \sqrt{5}$ 时, $D_z = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 5 - z^2\}$(图(4)). 于是

$$V = V_1 + V_2 = \int_0^1 dz \iint_{D_z} dxdy + \int_1^{\sqrt{5}} dz \iint_{D_z} dxdy$$

$$= \int_0^1 \pi(4z) dz + \int_1^{\sqrt{5}} \pi(5 - z^2) dz = 2\pi + \pi\left[5z - \frac{z^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 4).$$

13 求球体 $r \leqslant a$ 位于锥面 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 和 $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ 之间的部分的体积.

【解】 用球面坐标计算. 记 Ω 为立体所占的空间区域, 有

$$V = \iiint_\Omega dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin\varphi d\varphi \int_0^a r^2 dr = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

14 求上、下分别为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 和抛物面 $z = x^2 + y^2$ 所围立体的体积.

【解】 由 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 和 $z = x^2 + y^2$ 消去 z, 解得 $x^2 + y^2 = 1$. 从而得立体 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2 + y^2 \leqslant 1$. 于是

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

因此 $V = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{xy}} [\sqrt{2 - x^2 - y^2} - (x^2 + y^2)] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 (\sqrt{2 - \rho^2} - \rho^2)\rho \mathrm{d}\rho = \frac{8\sqrt{2} - 7}{6}\pi.$$

【评注】 本题也可用“先重后单”的方法按下式方便地求得结果：

$$V = \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 2-z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\int_1^{\sqrt{2}} (2 - z^2)\mathrm{d}z + \pi\int_0^1 z\mathrm{d}z$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 5}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{8\sqrt{2} - 7}{6}\pi.$$

15 球心在原点、半径为 R 的球体，在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比，求这球体的质量.

【解】 用球面坐标计算. Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$，即 $r \leqslant R$. 按题设，密度函数 $\mu(x,y,z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = kr(k > 0)$，于是

$$M = \iiint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} kr \cdot r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = k \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^4}{4} = k\pi R^4.$$

习题 10－4　重积分的应用

1 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 含在圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 内的那部分面积($a > 0$).

【解】 如图只给出了 $z \geqslant 0$ 部分的图形.

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

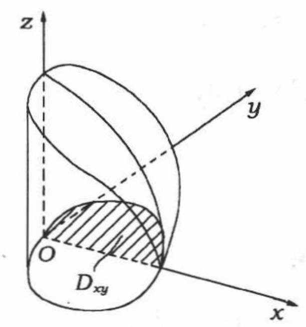
由对称性 $A = 4\iint\limits_{D_{xy}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} r\mathrm{d}r = 2a^2(\pi - 2).$

2 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 所割下部分的曲面面积.

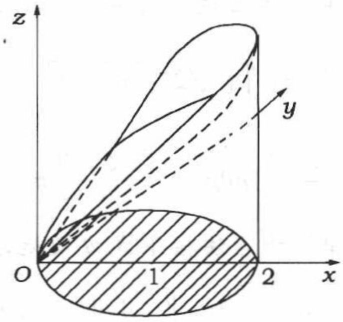
【解】 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与柱面 $z^2 = 2x$ 的交线 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z^2 = 2x \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy}：$(x - 1)^2 + y^2 \leqslant 1$，如图. 又 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$，故

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2},$$

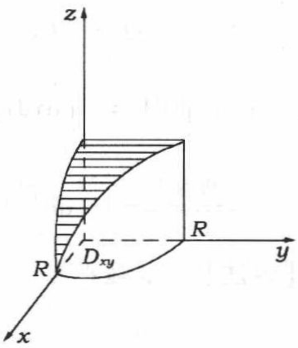
从而 $A = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \sqrt{2}\pi.$



第 1 题图



第 2 题图



第 3 题图

3 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积.

【解】 如图,由对称性知所求面积为图中阴影部分面积的16倍,

$$z=\sqrt{R^2-x^2},\quad \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

所以 $$A=16\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=16\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y=16R^2.$$

4 设薄片所占的闭区域 D 如下,求均匀薄片的质心:

(1) D 由 $y=\sqrt{2px}$, $x=x_0$, $y=0$ 围成;

(2) D 是半椭圆形闭区域 $\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, y\geqslant 0\right\}$;

(3) D 是介于 $\rho=a\cos\theta$, $\rho=b\cos\theta\ (0<a<b)$ 之间的闭区域.

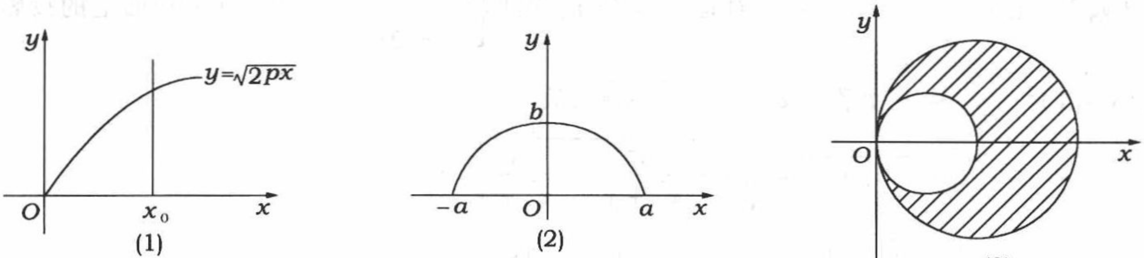
【解】 (1) 如图(1)

$$M=\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=\int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\sqrt{2p}x_0^{\frac{3}{2}},$$

$$M_x=\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=\int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}y\mathrm{d}y=p\frac{x_0^2}{2},$$

$$M_y=\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma=\int_0^{x_0}x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y=\sqrt{2p}\cdot\frac{2}{5}x_0^{\frac{5}{2}}.$$

故 $\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{3}{5}x_0$, $\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{p}{2}x_0}=\frac{3}{8}y_0$,所以质心为 $\left(\frac{3}{5}x_0,\frac{3}{8}y_0\right)$.



第 4 题图

(2) 如图(2),因为 D 对称于 y 轴,故 $\bar{x}=0$,且 $M=\frac{1}{2}\pi ab$,

$$M_x = \iint_D y\mathrm{d}\sigma = \int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\mathrm{d}y = \frac{2}{3}ab^2,$$

从而 $\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{4b}{3\pi}$,故质心为$\left(0,\frac{4b}{3\pi}\right)$.

(3) 如图(3),由于 D 对称于 x 轴,故 $\bar{y} = 0$.

$$M = \iint_D \mathrm{d}\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}\rho\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2),$$

$$M_y = \iint_D x\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}\rho\cos\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{8}(b^3 - a^3).$$

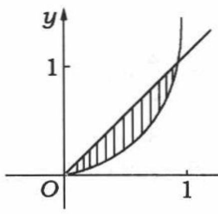
从而 $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{b^2 + ab + a^2}{2(b+a)}$,故质心为$\left(\frac{a^2 + ab + b^2}{2(a+b)},0\right)$.

5 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成,它在点 (x,y) 处的面密度 $\mu(x,y) = x^2y$,求该薄片的质心.

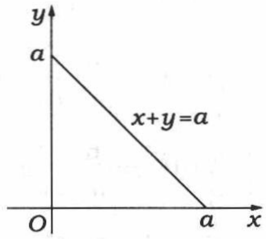
【解】 如图,$M = \iint_D x^2y\mathrm{d}\sigma = \int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}x^2y\mathrm{d}y = \frac{1}{35}$,

$$M_x = \iint_D x^2y^2\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}y^2\mathrm{d}y = \frac{1}{54},\quad M_y = \iint_D x^3y\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 x^3\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}y\mathrm{d}y = \frac{1}{48},$$

从而 $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{35}{48}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{35}{54}$,故质心坐标为$\left(\frac{35}{48},\frac{35}{54}\right)$.



第 5 题图



第 6 题图

6 设有一等腰直角三角形薄片,腰长为 a,各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方,求这薄片的质心.

【解】 如图,由对称性知 $\bar{x} = \bar{y}$, $\mu(x,y) = x^2 + y^2$,

$$M = \iint_D (x^2 + y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2 + y^2)\mathrm{d}y = \frac{1}{6}a^4,$$

$$M_y = \iint_D x(x^2 + y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}x(x^2 + y^2)\mathrm{d}y = \frac{1}{15}a^5.$$

从而 $\bar{x} = \bar{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{2}{5}a$,故质心坐标为$\left(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a\right)$.

7 利用三重积分计算下列由曲面所围立体的质心(设密度 $\rho = 1$):

(1) $z^2 = x^2 + y^2, z = 1$;

(2) $z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ $(A > a > 0)$, $z = 0$;

(3) $z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0$.

【解】 (1) 如图(1),由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}=0$,

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3},\quad \bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_\Omega z\mathrm{d}V=\frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 z\mathrm{d}z=\frac{3}{4},$$

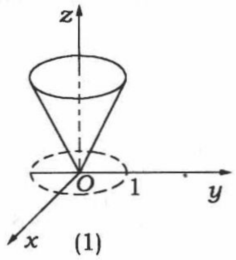
故质心为$\left(0,0,\frac{3}{4}\right)$.

(2) 如图(2),由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}=0$,

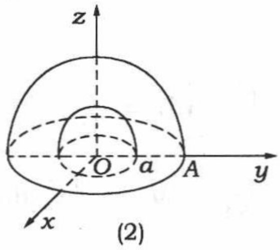
$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_a^A r^2\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi(A^3-a^3),$$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_\Omega z\mathrm{d}V=\frac{3}{2\pi(A^3-a^3)}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_a^A r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)},$$

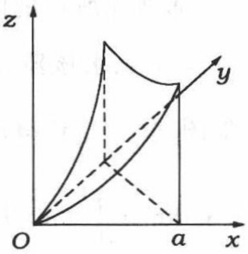
故质心为$\left(0,0,\frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)}\right)$.



(1)



(2)



(3)

(3) 如图(3),$V=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{6}a^4$,

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint_\Omega x\mathrm{d}V=\frac{6}{a^4}\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\frac{2}{5}a,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{V}\iiint_\Omega y\mathrm{d}V=\frac{6}{a^4}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}y\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\frac{2}{5}a,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_\Omega z\mathrm{d}V=\frac{6}{a^4}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}z\mathrm{d}z=\frac{7}{30}a^2,$$

故质心为$\left(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a,\frac{7}{30}a^2\right)$.

8 设球体占有闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz\}$,它在内部各点处的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方.试求这球体的质心.

【解】 在球面坐标系中,Ω 可表示为 $0\leqslant r\leqslant 2R\cos\varphi,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

球体内任意一点(x,y,z)处的密度大小为 $\rho=x^2+y^2+z^2=r^2$.
由于球体的几何形状及质量分布均关于 z 轴对称,故可知其质心位于 z 轴上,因此 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$M=\iiint_\Omega\rho(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cdot r^2\mathrm{d}r=\frac{32}{15}\pi R^5,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega z\,\rho(x,y,z)\mathrm{d}V=\frac{15}{32\pi R^5}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r\cos\varphi\cdot r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{5}{4}R.$$

故质心的坐标为$\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$.

9 设均匀薄片(面密度为常数 1) 所占闭区域 D 如下,求指定的转动惯量:

(1) $D = \left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$,求 I_y;

(2) D 由抛物线 $y^2 = \dfrac{9}{2}x$ 和 $x = 2$ 围成,求 I_x 和 I_y;

(3) D 为矩形闭区域 $\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b\}$,求 I_x 和 I_y;

【解】 (1) 利用广义极坐标代换,有

$$I_y = \iint_D x^2\mathrm{d}\sigma = \iint_{D'}(ar\cos\theta)^2\cdot abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = a^3b\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\pi a^3 b.$$

(2) $I_x = \iint_D y^2\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{3\sqrt{\frac{x}{2}}}y^2\mathrm{d}y = \dfrac{72}{5}$, $\quad I_y = \iint_D x^2\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{3\sqrt{\frac{x}{2}}}x^2\mathrm{d}y = \dfrac{96}{7}$.

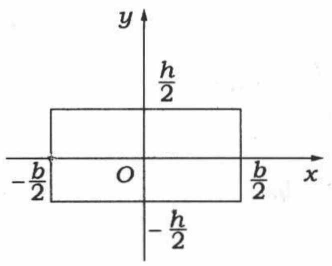
(3) $I_x = \iint_D y^2\mathrm{d}\sigma = \int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b y^2\mathrm{d}y = \dfrac{1}{3}ab^3$, $\quad I_y = \iint_D x^2\mathrm{d}\sigma = \int_0^a x^2\mathrm{d}x\int_0^b\mathrm{d}y = \dfrac{1}{3}a^3b$.

10 已知均匀矩形板(面密度为常量 μ) 的长和宽分别为 b 和 h,计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

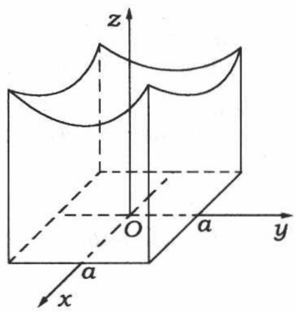
【解】 如图, I_x, I_y 即为所求.

$$I_x = \iint_D \mu y^2\mathrm{d}\sigma = 4\mu\int_0^{\frac{b}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{h}{2}}y^2\mathrm{d}y = \frac{1}{12}\mu bh^3,$$

$$I_y = \iint_D \mu x^2\mathrm{d}\sigma = 4\mu\int_0^{\frac{b}{2}}x^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{h}{2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{12}\mu b^3 h.$$



第 10 题图



第 11 题图

11 一均匀物体(密度 ρ 为常量) 占有的闭区域 Ω 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $z = 0$, $|x| = a$, $|y| = a$ 所围成.

(1) 求物体的体积; (2) 求物体的质心; (3) 求物体关于 z 轴的转动惯量 I_z.

【解】 (1) 由对称性, $V = 4\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z = \dfrac{8}{3}a^4$.

(2) 由对称性, $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\quad \bar{z} = \dfrac{1}{V}\iiint_\Omega z\mathrm{d}V = \dfrac{4}{V}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}z\mathrm{d}z = \dfrac{7}{15}a^2$,

故质心为 $\left(0,0,\dfrac{7}{15}a^2\right)$.

(3) $I_z = \iiint_\Omega \rho\cdot(x^2+y^2)\mathrm{d}V = \rho\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}z = \dfrac{112}{45}\rho a^6$.

12 求半径为 a、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度 $\rho = 1$).

【解】 建立空间直角坐标系,使原点位于圆柱体的中心,z 轴平行于母线,则圆柱体所占的空间闭区域

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqslant a^2, -\frac{h}{2} \leqslant z \leqslant \frac{h}{2}\right\}$$

$$\xlongequal{\text{柱面坐标}} \left\{(\rho,\theta,z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \rho \leqslant a, -\frac{h}{2} \leqslant z \leqslant \frac{h}{2}\right\}.$$

于是所求的转动惯量为

$$I_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V = \iiint_\Omega \rho^2 \cdot \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \rho^3\mathrm{d}\rho\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\mathrm{d}z$$

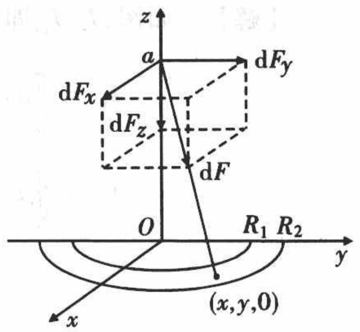
$$= 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} \cdot h = \frac{1}{2}\pi h a^4.$$

13 设面密度为常量 μ 的匀质半圆环形薄片占有闭区域 $D = \{(x,y,0) \mid R_1 \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant R_2, x \geqslant 0\}$,求它对位于 z 轴上点 $M_0(0,0,a)(a>0)$ 处单位质量的质点的引力 $\boldsymbol{F}$.

【解】 如图,引力元素 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 沿 x 轴和 z 轴的分量分别为

$$\mathrm{d}F_x = G\frac{\mu x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma$$

和
$$\mathrm{d}F_z = G\frac{\mu(-a)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\sigma}.$$



第 13 题图

于是
$$F_x = G\mu\iint_D \frac{x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}\sigma$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} G\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho\cos\theta}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= G\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho$$

$$= 2G\mu\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho(\text{令 } \rho = a\tan t \text{ 换元})$$

$$= 2G\mu\int_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}\frac{a^2\tan^2 t}{a^3\sec^3 t}\cdot a\sec^2 t\mathrm{d}t = 2G\mu\int_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}(\sec t - \cos t)\mathrm{d}t$$

$$= 2G\mu\Big[\ln(\sec t + \tan t) - \sin t\Big]_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}$$

$$= 2G\mu\left(\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right);$$

$$F_z = -Ga\mu\iint_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \xlongequal{\text{极坐标}} -Ga\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho$$

$$= \pi Ga\mu\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+a^2}}\right]_{R_1}^{R_2} = \pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right).$$

由于 D 关于 x 轴对称，且质量均匀分布，故 $F_y=0$．因此引力

$$\boldsymbol{F}=\left(2G\mu\left(\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1}-\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}}+\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right),0,\pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right)\right).$$

14 设均匀柱体密度为 ρ，占有闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,0\leqslant z\leqslant h\}$，求它对于位于点 $M_0(0,0,a)(a>h)$ 处的单位质量的质点的引力．

【解】 由柱体的对称性和质量分布的均匀性知 $F_x=F_y=0$．引力沿 z 轴的分量

$$\begin{aligned}F_z&=\iiint_\Omega G\rho\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}V\\&=G\rho\int_0^h(z-a)\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\\&\xlongequal{\text{柱面坐标}}G\rho\int_0^h(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{[r^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\\&=2\pi G\rho\int_0^h(z-a)\left[\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}}\right]\mathrm{d}z\\&=2\pi G\rho\int_0^h\left[-1-\frac{z-a}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}}\right]\mathrm{d}z\\&=-2\pi G\rho\left[h+\sqrt{R^2+(h-a)^2}-\sqrt{R^2+a^2}\right].\end{aligned}$$

习题 10－5　含参变量的积分

1 求下列含参变量的积分所确定的函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\int_x^{1+x}\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}y$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$；　(3) $\lim\limits_{x\to0}\int_0^2y^2\cos(xy)\mathrm{d}y$．

【解】 (1) 因为含参变量 x 的积分所确定的函数满足连续条件，故可在积分号内取极限，即

$$\lim_{x\to0}\int_x^{1+x}\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\sqrt{y^2}\mathrm{d}y=\int_{-1}^1|y|\mathrm{d}y=2\int_0^1y\mathrm{d}y=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\int_0^2y^2\cos xy\mathrm{d}y=\int_0^2y^2\mathrm{d}y=\frac{8}{3}$.

2 求下列函数的导数：

(1) $\varphi(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}(y^2\sin x-y^3)\mathrm{d}y$；　(2) $\varphi(x)=\int_0^x\frac{\ln(1+xy)}{y}\mathrm{d}y$；

(3) $\varphi(x)=\int_{x^2}^{x^3}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y$；　(4) $\varphi(x)=\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y$．

【解】 (1) 据 Leibniz 公式，有

$$\varphi'(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}y^2\cos x\mathrm{d}y+(\cos^2x\sin x-\cos^3x)(-\sin x)-(\sin^2x\sin x-\sin^3x)\cdot\cos x$$

$$=\frac{1}{3}\cos x(\cos x-\sin x)(1+2\sin 2x).$$

$$(2)\varphi'(x)=\int_0^x\frac{1}{1+xy}dy+\frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1+xy}d(1+xy)+\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\frac{2}{x}\ln(1+x^2).$$

$$(3)\varphi'(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)dy+\arctan x^2\cdot(3x^2)-\arctan x\cdot(2x)$$

$$=\int_{x^2}^{x^3}\frac{-y}{x^2+y^2}dy+3x^2\arctan x^2-2x\arctan x$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_{x^2}^{x^3}+3x^2\arctan x^2-2x\arctan x$$

$$=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1+x^4}}+3x^2\arctan x^2-2x\arctan x.$$

$$(4)\varphi'(x)=\int_x^{x^2}-y^2e^{-xy^2}dy+e^{-x^5}\cdot(2x)-e^{-x^3}=-\int_x^{x^2}y^2e^{-xy^2}dy+2xe^{-x^5}-e^{-x^3}.$$

3 设 $F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)dy$,其中 $f(x)$ 为可微函数,求 $F''(x)$.

【解】 $F'(x)=\int_0^x f(y)dy+2xf(x)$,

$$F''(x)=f(x)+2f(x)+2xf'(x)=3f(x)+2xf'(x).$$

4 应用对参数的微分法,计算下列积分:

(1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\frac{1}{\cos x}dx$, $|a|<1$; (2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2x+a^2\sin^2x)dx$ $(a>0)$.

【解】 (1) 设 $\varphi(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\frac{1}{\cos x}dx$,因为

$$\left[\left(\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\frac{1}{\cos x}\right]'_a$$

$$=\frac{1-a\cos x}{1+a\cos x}\cdot\frac{\cos x(1-a\cos x)-(-\cos x)(1+a\cos x)}{(1-a\cos x)^2}\frac{1}{\cos x}=\frac{2}{1-a^2\cos^2x},$$

所以 $\varphi'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1-a^2\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\tan^2x+(1-a^2)}d\tan x$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{1-a^2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

而 $\int_0^a\varphi'(a)da=\varphi(a)-\varphi(0)=\int_0^a\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}da=\pi\arcsin a$.

由 $\varphi(0)=0$,故 $I=\varphi(a)=\pi\arcsin a$.

(2) 设 $\varphi(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2x+a^2\sin^2x)dx=I$,则

$$\varphi(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x + \cos^2 x)\mathrm{d}x = 0.$$

$$\varphi'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\cos^2 x + a^2\sin^2 x)]'_a \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\sin^2 x}{\cos^2 x + a^2\sin^2 x}\mathrm{d}x.$$

令 $t = \tan x$,则 $x = \arctan t$,且有 $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$,当 $x = 0$ 时,$t = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 时,$t \to +\infty$,

$$\varphi'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{2a\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2} + a^2\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2at^2}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2a}{a^2-1}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+a^2t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2a}{a^2-1}\left[\arctan t - \frac{1}{a}\arctan(at)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{a+1}.$$

而 $\quad \int_1^a \varphi'(a)\mathrm{d}a = \varphi(a) - \varphi(1) = \int_1^a \frac{\pi}{a+1}\mathrm{d}a = \pi\ln\frac{a+1}{2},$

由 $\varphi(1) = 0$,故 $I = \varphi(a) = \pi\ln\frac{a+1}{2}$.

5 计算下列积分:

(1) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (0 < a < b)$.

【解】 (1) 因为 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{1}{1+(xy)^2}\mathrm{d}(xy) = \frac{1}{x}\arctan x$,于是

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\mathrm{d}y\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

而 $$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x = \sin\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+y^2\sin^2\theta)\cos\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+y^2\sin^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(1+y^2)\tan^2\theta}\mathrm{d}(\tan\theta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\arctan\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+y^2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

故 $$\int_0^1 \frac{\tan x}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\ln(y + \sqrt{1+y^2})\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

(2) 因为 $\int_a^b x^y\mathrm{d}y = \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_a^b = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$,于是

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\left(\int_a^b x^y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

又 $$\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx = \left[\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^{y+1}}{1+y}\right]_0^1 - \int_0^1\frac{x^{y+1}}{y+1}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \frac{1}{y+1}\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]_0^1 - \frac{1}{y+1}\int_0^1\frac{x^{y+1}}{y+1}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{1}{(y+1)^2}\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx.$$

从而 $$\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{1+(y+1)^2}.$$

故 $$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx = \int_a^b\frac{1}{1+(y+1)^2}dy$$
$$= \arctan(y+1)\Big|_a^b = \arctan(b+1)-\arctan(a+1).$$

总习题十

1 填空：

(1) 积分$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$ 的值是________；

(2) 设闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$，则$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=$ ________.

【解】 (1) 交换积分次序并计算所得的二次积分，得
$$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy = \int_0^2 dy\int_0^y e^{-y^2}dx = \int_0^2 ye^{-y^2}dy$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\int_0^2 e^{-y^2}d(-y^2) = -\frac{1}{2}\left[e^{-y^2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}(1-e^{-4}).$$

(2) 用极坐标计算. $D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant R, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，
$$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy = \iint\limits_D\left(\frac{\rho^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\theta}{b^2}\right)\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)d\theta\int_0^R\rho^3d\rho$$
$$= \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2a^2}+\frac{1-\cos2\theta}{2b^2}\right)d\theta$$
$$= \frac{R^4}{4}\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}\right)\cdot2\pi = \frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

2 选择以下各题中给出的四个结论中一个正确的结论：

(1) 设有空间闭区域 $\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, z\geqslant0\}$，$\Omega_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, x\geqslant0, y\geqslant0, z\geqslant0\}$，则有

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}xdV = 4\iiint\limits_{\Omega_2}xdV$.　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1}ydV = 4\iiint\limits_{\Omega_2}ydV$.

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}zdV = 4\iiint\limits_{\Omega_2}zdV$.　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1}xyzdV = 4\iiint\limits_{\Omega_2}xyzdV$.

(2) 设有平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid -a\leqslant x\leqslant a,x\leqslant y\leqslant a\}$, $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a,x\leqslant y\leqslant a\}$, 则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (D) 0.

(3) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$, 则 $F'(2)$ 等于

(A) $2f(2)$. (B) $f(2)$. (C) $-f(2)$. (D) 0.

【解】 (1)(A) 不正确. 由于 Ω_1 关于 yOz 面对称, 而被积函数 x 关于 x 是奇函数, 故 $\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}V=0$, 而 $\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}V\neq 0$, 故(A) 不正确. 类似可知(B) 和(D) 不正确. 再说明(C) 是正确的. 设 $\Omega_3=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0,x\geqslant 0\}$, 由于被积函数 z 关于 x 是偶函数, 而 Ω_3 与 $\Omega_1\backslash\Omega_3$ 关于 yOz 面对称, 故 $\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{\Omega_3}z\mathrm{d}V$. 又由于被积函数 z 关于 y 也是偶函数, 且 Ω_2 与 $\Omega_3\backslash\Omega_2$ 关于 xOz 面对称, 故 $\iiint\limits_{\Omega_3}z\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}V$. 因此应选(C).

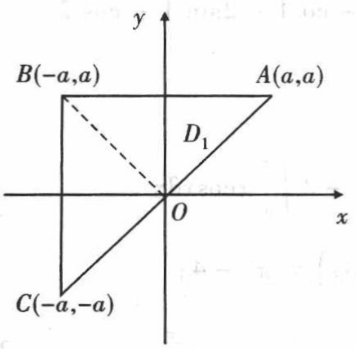
(2) 记 D 的三个顶点为 $A(a,a)$, $B(-a,a)$, $C(-a,-a)$(如图). 连结 O、B, 则 D 为 $\triangle COB$ 和 $\triangle BOA$ 之并. 由于 $\triangle COB$ 关于 x 轴对称, $\triangle AOB$ 关于 y 轴对称, 而函数 xy 关于 y 和 x 均是奇函数, 从而有

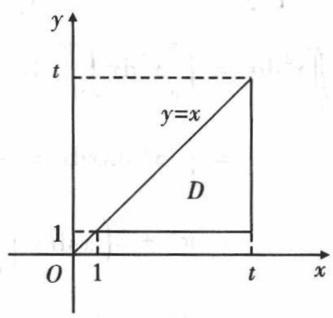
$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\triangle AOB}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\triangle COB}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+0=0;$$

又由于函数 $\cos x\sin y$ 关于 y 是奇函数, 关于 x 是偶函数, 从而有

$$\iint\limits_D\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\triangle COB}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\triangle AOB}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因此应选(A).





第 2 题图

(3) **方法** 1° 这是变限积分的求导问题, 其中是含参变量 t 的变限积分.

用分部积分法将 $F(t)$ 化成变限定积分, 然后对变限积分求导.

$$F(t)=\int_1^t\left[\int_y^t f(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}(y-1)$$

$$\xlongequal{\text{分部积分}}\left[(y-1)\int_y^t f(x)\,\mathrm{d}x\right]\Bigg|_{y=1}^{y=t}-\int_1^t(y-1)\,\mathrm{d}\left[\int_y^t f(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\int_1^t(y-1)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

$$\Rightarrow\qquad F'(t)\big|_{t=2}=[(t-1)f(t)]\big|_{t=2}=f(2).\text{应选(B)}.$$

方法2° 将 $F(t)$ 看成二重积分的一个累次积分(其中 $t>1$),则有

$$F(t)=\iint_D f(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D:y\leqslant x\leqslant t,1\leqslant y\leqslant t$,如图所示.变换积分次序得

$$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}x\int_1^x f(x)\,\mathrm{d}y=\int_1^t(x-1)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

于是 $$F'(2)=[(t-1)f(t)]\big|_{t=2}=f(2).\text{应选(B)}.$$

3 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D(1+x)\sin y\,\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是顶点分别为 $(0,0),(1,0),(1,2)$ 和 $(0,1)$ 的梯形闭区域;

(2) $\iint\limits_D(x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi\}$;

(3) $\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma$,其中 D 是圆周 $x^2+y^2=Rx$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint\limits_D(y^2+3x-6y+9)\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$.

【解】 (1) D 可表示为 $0\leqslant y\leqslant 1+x,0\leqslant x\leqslant 1$,于是

$$\iint_D(1+x)\sin y\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1+x}(1+x)\sin y\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1[(1+x)-(1+x)\cos(1+x)]\,\mathrm{d}x\xlongequal{t=1+x}\int_1^2(t-t\cos t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\left[\frac{t^2}{2}-t\sin t-\cos t\right]_1^2=\frac{3}{2}\sin 1+\cos 1-2\sin 1-\cos 2.$$

(2) 由于 $$\iint_D x^2\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^\pi x^2\sin x\,\mathrm{d}x=-[x^2\cos x]_0^\pi+2\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=\pi^2+2\left(x\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\sin x\,\mathrm{d}x\right)=\pi^2-4;$$

$$\iint_D y^2\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}y^2\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^\pi\sin^3x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

故 $$\iint_D(x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D x^2\,\mathrm{d}\sigma-\iint_D y^2\,\mathrm{d}\sigma=(\pi^2-4)-\frac{4}{9}=\pi^2-\frac{40}{9}.$$

(3) 利用极坐标计算.在极坐标系中,$D=\left\{(\rho,\theta)\,\Big|\,0\leqslant\rho\leqslant R\cos\theta,-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$,

于是 $$\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint_D \sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}[(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{R\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^3}{3}(1-|\sin^3\theta|)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$$

(4) 利用对称性可知$\iint_D 3x\mathrm{d}\sigma=0,\iint_D 6y\sigma\sigma=0$,又

$$\iint_D 9\mathrm{d}\sigma=9x(D\text{ 的面积})=9\pi R^2,$$

$$\iint_D y^2\mathrm{d}\sigma\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho=\pi\cdot\frac{R^4}{4}=\frac{\pi}{4}R^4,$$

因此 $$\text{原式}=\frac{\pi}{4}R^4+9\pi R^2.$$

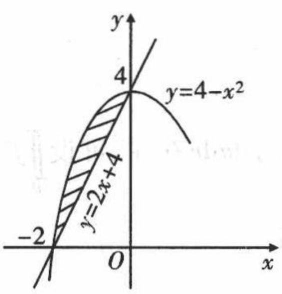
4 交换下列二次积分的次序:

(1) $\int_0^4\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)}f(x,y)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^3\mathrm{d}y\int_0^{3-y}f(x,y)\mathrm{d}x$;

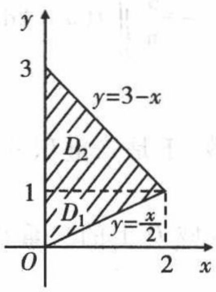
(3) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

【解】 (1) 所给的二次积分等于闭区域 D 上的二重积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ -\sqrt{4-y}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}(y-4),0\leqslant y\leqslant 4\right\}$(图(1)),将 D 表达为$\{(x,y)\mid 2x+4\leqslant y\leqslant 4-x^2,-2\leqslant x\leqslant 0\}$,则$\int_0^4\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{2}(y-4)}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-2}^0\mathrm{d}x\int_{2x+4}^{4-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$.

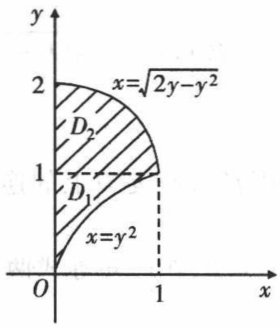
(2) 所给二次积分等于二重积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=D_1\cup D_2$,$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2y,0\leqslant y\leqslant 1\}$,$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 3-y,1\leqslant y\leqslant 3\}$(图(2)),$D$ 可表达为$\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{x}{2}\leqslant y\leqslant 3-x,0\leqslant x\leqslant 2\right\}$,于是原式$=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{3-x}f(x,y)\mathrm{d}y$.



(1)



(2)



(3)

第 4 题图

(3) 所给二次积分等于二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D=\{(x,y)\mid\sqrt{x}\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{1-x^2},0\leqslant x\leqslant 1\}$(图(3)). 将$D$表达为$D_1\cup D_2$,其中$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y^2,0\leqslant y\leqslant 1\}$,$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2y-y^2},1\leqslant y\leqslant 2\}$,于是原式$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{y^2}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

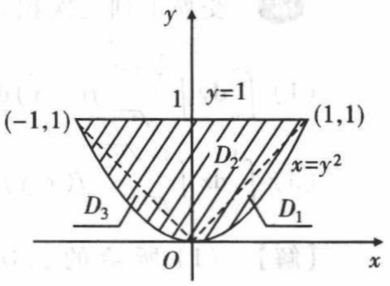
5 证明: $\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a(a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x$.

【证】 上式左端的二次积分等于二重积分$\iint\limits_D\mathrm{e}^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant a\}=\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant a,0\leqslant x\leqslant a\}$. 于是交换积分次序即得

$$\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^a\mathrm{e}^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}y=\int_0^a(a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x.$$

6 把积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$表为极坐标形式的二次积分,其中积分区域$D=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1\}$.

【解】 积分域D如图所示. 抛物线$y=x^2$的极坐标方程为$\rho=\sec\theta\tan\theta$;直线$y=1$的极坐标方程为$\rho=\csc\theta$. 用射线$\theta=\dfrac{\pi}{4}$和$\theta=\dfrac{3\pi}{4}$将$D$分成$D_1$、$D_2$、$D_3$三部分:



第 6 题图

D_1:$0\leqslant\rho\leqslant\sec\theta\tan\theta,0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}$;

D_2:$0\leqslant\rho\leqslant\csc\theta,\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{4}$;

D_3:$0\leqslant\rho\leqslant\sec\theta\tan\theta,\dfrac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi$.

因此 $$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta\tan\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\csc\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+$$
$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta\tan\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

7 设$f(x,y)$在闭区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant y,x\geqslant 0\}$上连续,且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

求$f(x,y)$.

【解】 因$f(x,y)$是D上的连续函数,于是二重积分$\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$存在,可设$\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$,在已知等式两边求区域$D$上的二重积分,有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{8A}{\pi}\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

从而 $A=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-A$,即 $2A=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

在极坐标系 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 中， $D = \left\{(r,\theta) \middle| 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant \sin\theta\right\}$,

所以 $$2A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin\theta} \sqrt{1-r^2} \cdot r dr = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^3\theta) d\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

故 $$A = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

于是 $$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{4}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

8 把积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz$ 化为三次积分,其中积分区域 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2, y = x^2$ 及平面 $y = 1, z = 0$ 所围成的闭区域.

【解】 Ω 为一曲顶柱体,其顶为 $z = x^2 + y^2$,底位于 xOy 面上,其侧面由抛物柱面 $y = x^2$ 及平面 $y = 1$ 所组成. 由此可知 Ω 在 xOy 面上的投影区域

$$D_{xy} = \{(x,y) \mid x^2 \leqslant y \leqslant 1, -1 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

因此 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \iint\limits_{D_{xy}} dx dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z) dz = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z) dz.$$

9 计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dx dy dz$,其中 Ω 是两个球: $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz (R > 0)$ 的公共部分;

(2) $\iiint\limits_{\Omega} \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1} dV$,其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域;

(3) $\iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2) dV$,其中 Ω 是由 xOy 平面上曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x = 5$ 所围成的闭区域.

【解】 (1) 利用球面坐标计算. 作圆锥面 $\varphi = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$,将 Ω 分成 Ω'_1 和 Ω'_2 两部分:

$$\Omega'_1 = \left\{(r,\varphi,\theta) \middle| 0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right\};$$

$$\Omega'_2 = \left\{(r,\varphi,\theta) \middle| 0 \leqslant r \leqslant 2R\cos\varphi, \frac{\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right\}.$$

于是 $$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint\limits_{\Omega'_1} z^2 dx dy dz + \iiint\limits_{\Omega'_2} z^2 dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^4 dr \\ &= \frac{7}{60}\pi R^5 + \frac{1}{160}\pi R^5 = \frac{59}{480}\pi R^5. \end{aligned}$$

(2) 由于积分区域 Ω 关于 xOy 面对称,而被积函数关于 z 是奇函数,故所求积分等于零.

(3) 积分区域 Ω 由旋转抛物面 $y^2 + z^2 = 2x$ 和平面 $x = 5$ 所围成,Ω 在 yOz 面上的投影区域

$$D_{yz} = \{(y,z) \mid y^2 + z^2 \leqslant 10\}.$$

因此 Ω 可表示为：$\frac{1}{2}(y^2+z^2) \leqslant x \leqslant 5, 0 \leqslant y^2+z^2 \leqslant 10$. 于是

$$\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}V = \iint_{D_{yz}}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_{\frac{y^2+z^2}{2}}^{5}\mathrm{d}x = \iint_{D_{yz}}(y^2+z^2)\left(5-\frac{y^2+z^2}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \iint_{D_{yz}}\rho^2\left(5-\frac{\rho^2}{2}\right)\rho\,\mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{10}}\rho^3\left(5-\frac{\rho^2}{2}\right)\mathrm{d}\rho = \frac{250}{3}\pi.$$

10 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，

$$F(t) = \frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}, \quad G(t) = \frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,\mathrm{d}x},$$

其中 $\Omega(t) = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2\}, D(t) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性. (2) 证明当 $t>0$ 时，$F(t) > \frac{2}{\pi}G(t)$.

【解】 (1) 分别作球坐标变换：

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi$$

与极坐标变换：$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$.

将 $F(t)$ 中的分子与分母表成定积分，于是

$$F(t) = \frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(\rho^2)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r} = \frac{2\int_0^t f(\rho^2)\rho^2\,\mathrm{d}\rho}{\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}.$$

下面求 $F'(t)$，由它的符号讨论 $F(t)$ 的单调性. 由变限积分求导法得

$$F'(t) = 2\frac{t^2f(t^2)\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r - tf(t^2)\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r}{\left[\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]^2}$$

$$= 2\frac{tf(t^2)\int_0^t rf(r^2)(t-r)\,\mathrm{d}r}{\left[\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]^2} > 0, t \in (0,+\infty).$$

因此 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加.

(2) 如同题(1)，先将 $G(t)$ 表成定积分：

$$G(t) = \frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{2\int_0^1 f(r^2)\,\mathrm{d}r} = \frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r}.$$

要证 $t>0$ 时，$F(t) > \frac{2}{\pi}G(t)$，即证 $\frac{\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r} > \frac{\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r}$，

即证 $$\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r - \left[\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]^2 > 0. \quad ⊛$$

我们将利用单调性证明这个不等式.

令 $$\Phi(t)=\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]^2$$

$\Rightarrow$ $$\Phi'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r+f(t^2)t^2\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r-2\left[\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]\cdot f(t^2)t$$

$$=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2\,\mathrm{d}r>0,t\in(0,+\infty).$$

又 $\Phi(t)$ 在 $t=0$ 处连续 $\Rightarrow\Phi(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调增加 $\Rightarrow t>0$ 时，$\Phi(t)>\Phi(0)=0$.

因此 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

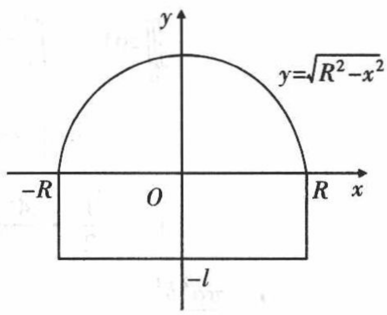
11 求平面$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$被三坐标面所割出的有限部分的面积.

【解】 平面方程为 $z=c-\dfrac{c}{a}x-\dfrac{c}{b}y$,它被三坐标面割出的有限部分在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为由 x 轴、y 轴和直线$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$所围成的三角形区域. 于是所求面积为

$$\begin{aligned}A&=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\frac{1}{2}ab\\&=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.\end{aligned}$$

12 在均匀的半径为 R 的半圆形薄片的直径上,要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片,为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上,问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

【解】 建立如图所示的坐标系. 设矩形另一边的长度为 l,则质心的纵坐标



第 12 题图

$$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma}{A}=\frac{\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-l}^{\sqrt{R^2-x^2}}y\,\mathrm{d}y}{A}$$

$$=\frac{\int_{-R}^{R}(R^2-x^2-l^2)\,\mathrm{d}x}{2A}=\frac{\frac{2}{3}R^3-l^2R}{A},$$

由题设 $\bar{y}=0$ 即可算得 $\quad l=\sqrt{\dfrac{2}{3}}R.$

13 求由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成的均匀薄片(面密度为常数 μ)对于直线 $y=-1$ 的转动惯量.

【解】 闭区域 $D=\{(x,y)\mid-\sqrt{y}\leqslant x\leqslant\sqrt{y},0\leqslant y\leqslant1\}$,所求的转动惯量为

$$I=\iint\limits_D\mu(y+1)^2\mathrm{d}\sigma=\mu\int_0^1(y+1)^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x$$

$$=2\mu\int_0^1\sqrt{y}(y+1)^2\mathrm{d}y=2\mu\int_0^1(y^{\frac{5}{2}}+2y^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}y=\frac{368}{105}\mu.$$

14 设在 xOy 面上有一质量为 M 的匀质半圆形薄片,占有平面闭区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2, y \geqslant 0\}$,过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 P,$OP = a$. 求半圆形薄片对质点 P 的引力.

【解】 积分区域 $D = \{(\rho,\theta) \mid 0 \leqslant \rho \leqslant R, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$.

由于 D 关于 y 轴对称,且质量均匀分布,故 $F_x = 0$. 又薄片的面密度 $\mu = \dfrac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \dfrac{2M}{\pi R^2}$,于是

$$F_y = Gm\mu \iint_D \frac{y}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}\sigma$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} Gm\mu \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \frac{\rho\sin\theta}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \rho \mathrm{d}\rho = 2Gm\mu \int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{4GmM}{\pi R^2}\left(\ln\frac{\sqrt{R^2+a^2}+R}{a} - \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\right);$$

$$F_z = -Gam\mu \iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = -Gam\mu \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}\rho$$

$$= -\frac{2GamM}{R^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}\right) = -\frac{2GmM}{R^2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right),$$

所求引力为 $F = (0, F_y, F_z)$.

15 求质量分布均匀的半个旋转椭球体 $\Omega = \left\{(x,y,z) \mid \dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} \leqslant 1, z \geqslant 0\right\}$的质心.

【解】 设质心为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,由对称性知质心位于 z 轴上,即 $\bar{x} = \bar{y} = 0$. 由于

$$\iiint_\Omega z\mathrm{d}V = \int_0^b z\mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \left(\text{其中 } D_z = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)\right\}\right)$$

$$= \int_0^b \pi a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right) z\mathrm{d}z = \pi a^2 \int_0^b \left(z - \frac{z^3}{b^2}\right)\mathrm{d}z = \frac{\pi a^2 b^2}{4},$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi a^2 b = \frac{2\pi a^2 b}{3},$$

因此 $\bar{z} = \dfrac{\frac{\pi a^2 b^2}{4}}{\frac{2\pi a^2 b}{3}} = \dfrac{3b}{8}$,即质心为$\left(0,0,\dfrac{3b}{8}\right)$.

16 一球形行星的半径为 R,其质量为 M,其密度呈球对称分布,并向着球心线性增加. 若行星表面的密度为零,那么行星中心的密度是多少?

【解】 设行星中心的密度为 μ_0,则由题设,在距球心 $r(0 \leqslant r \leqslant R)$ 处的密度为 $\mu(r) = \mu_0 - kr$. 由于 $\mu(R) = \mu_0 - kR = 0$,故 $k = \dfrac{\mu_0}{R}$,即 $\mu(r) = \mu_0\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$.

于是,
$$M = \iiint_{r \leqslant R} \mu_0\left(1-\frac{r}{R}\right) r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \mu_0 \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^R \left(1-\frac{r}{R}\right) r^2 \mathrm{d}r$$

$$= 4\pi\mu_0\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right)r^2\mathrm{d}r = \frac{\mu_0\pi R^3}{3},$$

因此得 $$\mu_0 = \frac{3M}{\pi R^3}.$$

考研试题选解

1 设 $I_1 = \iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$, $I_2 = \iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$, $I_3 = \iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2\mathrm{d}\sigma$,其中 $D = \{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$,则

(A)$I_3 > I_2 > I_1$.　　(B)$I_1 > I_2 > I_3$.

(C)$I_2 > I_1 > I_3$.　　(D)$I_3 > I_1 > I_2$.

【分析】 在积分区域 $D = \{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$ 上有

$$(x^2+y^2)^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant \sqrt{x^2+y^2},$$

且等号仅在区域 D 的边界 $\{(x,y)\mid x^2+y^2 = 1\}$ 上成立. 从而在积分区域 D 上有

$$\cos(x^2+y^2)^2 \geqslant \cos(x^2+y^2) \geqslant \cos\sqrt{x^2+y^2},$$

且等号也仅仅在区域 D 的边界 $\{(x,y)\mid x^2+y^2 = 1\}$ 上成立. 此外,三个被积函数又都在区域 D 上连续,按二重积分的性质即得 $I_3 > I_2 > I_1$,故应选(A).

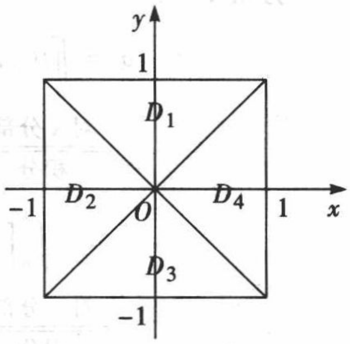
2 如图,正方形 $\{(x,y)\mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$, $I_k = \iint\limits_{D_k} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\} =$

(A)I_1.

(B)I_2.

(C)I_3.

(D)I_4.



第 2 题图

【分析】 D_2 与 D_4 分别关于 x 轴对称,且被积函数 $y\cos x$ 对 y 为奇函数 ⇒

$$\iint\limits_{D_k} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0\ (k = 2,4).$$

又 $(x,y) \in D_k(k = 1,3)$ 时 $y\cos x$ 连续,且 $y\cos x \gneqq 0\ ((x,y)\in D_1)$, $y\cos x \lneqq 0\ ((x,y)\in D_3)$

$$\Rightarrow \iint\limits_{D_1} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0,\quad \iint\limits_{D_3} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y < 0$$

$$\Rightarrow \max_{1\leqslant k\leqslant 4}\iint\limits_{D_k} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_1.$$ 因此选(A).

【评注】 本题主要考查二重积分的简单性质,是一道多想少算且具有一定灵活性的试题. 当然,本题也可以通过计算 $I_k(k = 1,2,3,4)$ 的值得到正确答案,但计算量大,且极易出错.

3 设平面区域 D 由直线 $y = x$,圆 $x^2+y^2 = 2y$ 及 y 轴所围成,则二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma =$

__________.

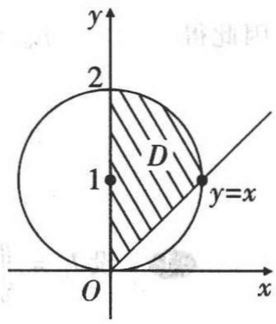
【分析】 圆 $x^2+y^2=2y$ 即 $x^2+(y-1)^2=1$，D 如右图所示．用极坐标变换．

$D:\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta$，于是

$$\iint_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2\cos\theta\sin\theta r\mathrm{d}r$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{2\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\mathrm{d}(\sin\theta)=\frac{4}{6}\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{7}{12}.$$



第 3 题图

4 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0,f(x,1)=0,\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分 $I=\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解】 在条件 $f(1,y)=0(\Rightarrow f'_y(1,y)=0)$，$f(x,1)=0(\Rightarrow f'_x(x,1)=0)$ 下考察 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的关系，D 是矩形区域 $\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

方法 1°

$$a=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal[\text{积分}]{\text{对 }x\text{ 分部}}\int_0^1\left[xf(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^1\left[\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\xlongequal[\text{分次序}]{\text{交换积}}-\int_0^1 x\left[\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal[\text{积分}]{\text{对 }y\text{ 分部}}-\int_0^1 x\left[yf'_x(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

方法 2°

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left[x\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal[\text{作分部积分}]{\text{对内层积分}}\int_0^1 x\left[yf'_x(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\left[x\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\xlongequal[\text{分次序}]{\text{交换积}}-\int_0^1\left[\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal[\text{作分部积分}]{\text{对内层积分}}-\int_0^1\left[xf(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a.$$

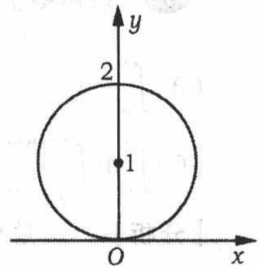
5 设函数$f(u)$连续,区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$,则$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$等于

(A)$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)\mathrm{d}y$.

(B)$2\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)\mathrm{d}x$.

(C)$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}r$.

(D)$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)r\mathrm{d}r$.



第 5 题图

【分析】 这是将二重积分化为累次积分的问题(在直角坐标系中或在极坐标系中).积分区域$D:x^2+y^2\leqslant 2y$,即 $x^2+(y-1)^2\leqslant 1$.

作极坐标变换$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,则$D$的极坐标表示:

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta,$$

$\Rightarrow$ 原积分 $=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\cos\theta\sin\theta)r\mathrm{d}r$.应选(D).

【评注】 在直角坐标系中化为累次积分.

先y后x积分 $D:-1\leqslant x\leqslant 1,\ 1-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow$ 原积分 $=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(xy)\mathrm{d}y$.

先x后y积分 $D:0\leqslant y\leqslant 2,\ -\sqrt{2y-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2y-y^2}$

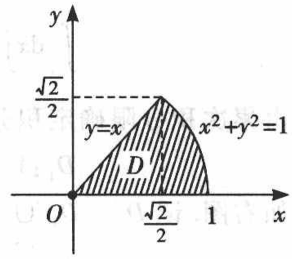
$\Rightarrow$ 原积分 $=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)\mathrm{d}x$.

6 设$f(x,y)$为连续函数,则$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$等于

(A)$\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$. (B)$\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C)$\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$. (D)$\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

【分析】 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.



第 6 题图

D的极坐标表示是:$0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$.

现转换为先x后y的积分顺序.

注意$y=x$与$x^2+y^2=1$在第一象限的交点是$\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$,于是

$$D:0\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt2}{2},\quad y\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}.$$

原式 $=\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.因此选(C).

【评注】 若选择先y后x的积分顺序,则要分块积分,选项并没有分块积分,即(A),(B)不

对.

7 设函数$f(x,y)$连续,则二次积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy$等于

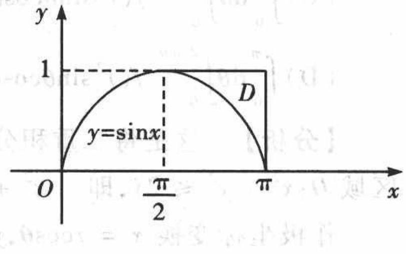
(A) $\int_0^1 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$.　　(B) $\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$.

(C) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)dx$.　　(D) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$.

【分析】 这是交换积分顺序的问题.先将二次积分表成

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=\iint_D f(x,y)d\sigma,$$

由累次积分限确定积分区域D如右图所示.



第 7 题图

记$y=\sin x\left(x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right)$的反函数是$x=\varphi(y)$,则改换积分顺序得

$$I=\int_0^1 dy\int_{\varphi(y)}^{\pi}f(x,y)dx.$$

由此知(C)、(D)不正确.

现在的关键是求出$y=\sin x\left(x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right)$的反函数:

$y=\sin x=\sin(\pi-x)$,当$\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$时$0\leqslant\pi-x\leqslant\frac{\pi}{2}\Rightarrow\pi-x=\arcsin y$,即$x=\pi-\arcsin y$.

因此　$I=\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$.　选(B).

8 设函数$f(x,y)$连续,则$\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y}f(x,y)dx=$

(A) $\int_1^2 dx\int_1^{4-x}f(x,y)dy$.　　(B) $\int_1^2 dx\int_x^{4-x}f(x,y)dy$.

(C) $\int_1^2 dy\int_1^{4-y}f(x,y)dx$.　　(D) $\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$.

【分析】 这是两个重积分的累次积分之和,即

$$\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y}f(x,y)dx=\iint_{D_1}f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)d\sigma.$$

由累次积分限确定积分区域D_1,D_2分别为

$$D_1:1\leqslant x\leqslant 2,x\leqslant y\leqslant 2;\quad D_2:1\leqslant y\leqslant 2,y\leqslant x\leqslant 4-y,$$

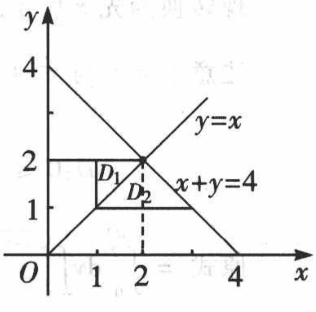
如右图.记$D=D_1\cup D_2$,则

$$\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y}f(x,y)dx=\iint_D f(x,y)dxdy.$$

按先x后y的积分顺序,

$$D:1\leqslant y\leqslant 2,1\leqslant x\leqslant 4-y,$$

于是　$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_1^2 dy\int_1^{4-y}f(x,y)dx$.



第 8 题图

因此选(C).

【评注】 本题考查多元函数累次积分交换积分次序的方法，重点是写出积分区域．应该注意题干中的两项积分次序是不同的．

9 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，则 $\iint\limits_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=$

(A) $ab\pi$．　(B) $\dfrac{ab}{2}\pi$．　(C) $(a+b)\pi$．　(D) $\dfrac{(a+b)}{2}\pi$．

【分析】 D 关于直线 $y=x$ 对称 $\Rightarrow$

$$I\xlongequal{\text{记}}\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\Rightarrow\qquad 2I=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D \frac{a(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)})}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D \frac{b(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)})}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=a\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot 4+b\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 4=(a+b)\pi$$

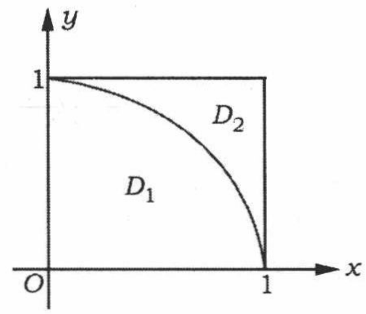
$$\Rightarrow\qquad I=\frac{(a+b)}{2}\pi.\text{故应选(D)}.$$

【评注】 题中所给答案说明，此积分与 $f(x)$ 无关．我们特殊取 $f(x)=1$，则

$$\text{原积分}=\iint\limits_D \frac{a+b}{2}\mathrm{d}\sigma=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot 4=\frac{a+b}{2}\pi.\text{选(D)}.$$

10 计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$．

【分析与求解】 被积函数分块表示，要用分块积分法，如图．



第 10 题图

在 D 中，

$$|x^2+y^2-1|=\begin{cases}1-(x^2+y^2), & x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,\\ x^2+y^2-1, & x^2+y^2\geqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1.\end{cases}$$

用圆弧 $x^2+y^2=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 将 D 分成两部分，$D=D_1\cup D_2$，且

$D_1:x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0$，　$D_2:x^2+y^2\geqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$．

用分块积分法得

$$I\xlongequal{\text{记}}\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}[1-(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma.$$

注意 $\displaystyle\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma$，

代入上式得 $\displaystyle I=2\iint\limits_{D_1}[1-(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma\xlongequal{\text{记}}I_1+I_2.$

作极坐标变换求 I_1：$I_1 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r = 2\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$；

直接计算 I_2：$I_2 = 2\iint\limits_D x^2\mathrm{d}\sigma - 1 = 2\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 x^2\mathrm{d}x - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$.

因此 $\qquad I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$.

【评注】 该题中关键步骤是用分块积分法：一是因为被积函数分块表示，要用分块积分法；另一是，因 $D = D_1 \cup D_2$，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

为简化计算，将求 $\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 转化为求 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma - \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

11 设二元函数

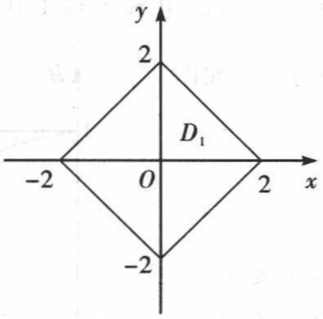
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leqslant 2, \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leqslant 2\}$.

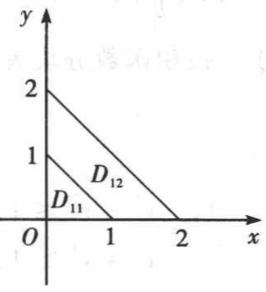
【分析与求解】 D 如图(a)所示，它关于 x,y 轴均对称，又 $f(x,y)$ 对 x,y 均为偶函数 $\Rightarrow$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 D_1 是 D 的第一象限部分.



(a)



(b)

第 11 题图

由于被积函数分块表示，将 D_1 分成(如图(b))：$D_1 = D_{11} \cup D_{12}$，且

$D_{11}: |x| + |y| \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, \qquad D_{12}: 1 \leqslant |x| + |y| \leqslant 2, x \geqslant 0, y \geqslant 0.$

于是 $\qquad \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_{11}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_{12}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$. 而

$$\iint\limits_{D_{11}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x} x^2\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$\iint\limits_{D_{12}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_{12}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma \xlongequal[\text{变换}]{\text{极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{1}{r}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2} + 2\tan\frac{\theta}{2}} = \int_0^1 \frac{2du}{1 - u^2 + 2u} = \int_0^1 \frac{2du}{2 - (u-1)^2}$$

$$\xlongequal{\text{令 } 1 - u = t} \int_0^1 \frac{2dt}{2 - t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2} + t} + \frac{1}{\sqrt{2} - t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + t}{\sqrt{2} - t} \bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1),$$

$\Rightarrow$ $$\iint_{D_1} f(x,y)\, d\sigma = \frac{1}{12} + \sqrt{2}\ln(\sqrt{2} + 1).$$

因此 $$\iint_D f(x,y)\, d\sigma = 4\left[\frac{1}{12} + \sqrt{2}\ln(\sqrt{2} + 1)\right].$$

12 计算$\iint\limits_D \max\{xy,1\}\, dxdy$,其中 $D = \{(x,y)\mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

【分析与求解一】 被积函数是分块表示的,用曲线 $xy = 1\left(即\ y = \frac{1}{x}\right)$将 D 分成两块(如图(a)):

$$D = D_1 \cup D_2,$$

其中,$D_1: xy \leqslant 1, (x,y) \in D$;$D_2: xy \geqslant 1, (x,y) \in D$.

D_1 边界分段表示,又将 D_1 分成两块

$$D_1 = D_{11} \cup D_{12},$$

如图(b).于是

$$I = \iint_D \max\{xy,1\}\, dxdy = \iint_{D_{11}} 1 d\sigma + \iint_{D_{12}} 1 d\sigma + \iint_{D_2} xy d\sigma$$

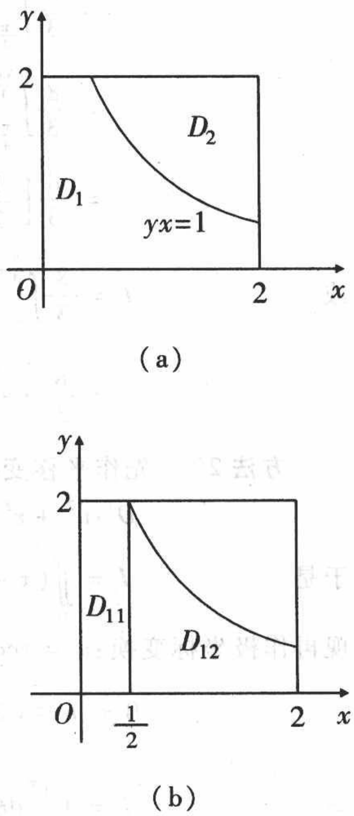
$$= \frac{1}{2}\cdot 2 + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} 1 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy$$

$$= 1 + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2} xy^2 \bigg|_{\frac{1}{x}}^2 dx$$

$$= 1 + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2x - \frac{1}{2}\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\ln x \bigg|_{\frac{1}{2}}^2 + x^2 \bigg|_{\frac{1}{2}}^2$$

$$= 1 + \ln 2 + \left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{19}{4} + \ln 2.$$



第 12 题图

【分析与求解二】 D_1, D_2 如上所述,则

$$I = \iint_{D_1} 1 d\sigma + \iint_{D_2} xy d\sigma.$$

将第一个积分作如下分解

$$\iint\limits_{D_1} 1\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D} 1\mathrm{d}\sigma - \iint\limits_{D_2} 1\mathrm{d}\sigma,$$

$$\Rightarrow \quad I = 4 - \int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}xy\mathrm{d}y = 4 - \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(2 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{2}xy^2\Big|_{\frac{1}{x}}^{2}\mathrm{d}x$$

$$= 4 - 2\cdot\frac{3}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{1}{x}\mathrm{d}x + 2\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

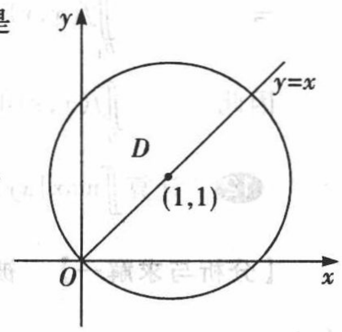
$$= 1 + \frac{1}{2}\ln x\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} + x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{19}{4} + \ln 2.$$

13 计算二重积分$\iint\limits_{D}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D = \{(x,y)\mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 2, y \geqslant x\}$.

【分析与求解】 积分区域D是如图(a)所示的半圆:$(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 2, y \geqslant x$.

方法1° 作极坐标变换$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,则$D$的极坐标表示是

$$0 \leqslant r \leqslant 2(\cos\theta + \sin\theta), \frac{\pi}{4} \leqslant 0 \leqslant \frac{3}{4}\pi.$$



(a)

于是 $$I = \iint\limits_{D}(x-y)\mathrm{d}\sigma = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2(\cos\theta+\sin\theta)} r(\cos\theta - \sin\theta)r\mathrm{d}r$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\cos\theta - \sin\theta)\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_{0}^{2(\cos\theta+\sin\theta)}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta)^3\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(1 + \sin 2\theta)\cos 2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin^2 2\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \frac{8}{3}\left[\frac{1}{2}(-2) + 0\right] = -\frac{8}{3}.$$

或 $$I = \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta)^3\mathrm{d}\theta = \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\cos\theta + \sin\theta)^3\mathrm{d}(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$= \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}(\cos\theta + \sin\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}(-4) = -\frac{8}{3}.$$

方法2° 先作平移变换:令$u = x - 1, v = y - 1$,则D变成

$D': u^2 + v^2 \leqslant 2, v \geqslant u$,如图(b).

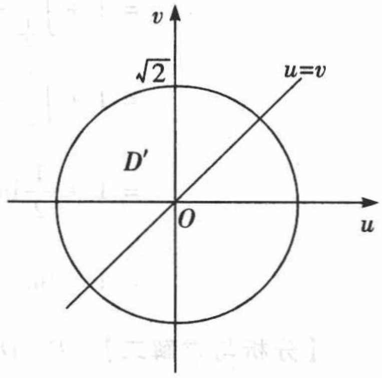
于是 $$I = \iint\limits_{D}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'}(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

现再作极坐标变换:$u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$,则$D'$的极坐标表示为

$$0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}, \quad \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{5}{4}\pi.$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\sqrt{2}} r(\cos\theta - \sin\theta)r\mathrm{d}r$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\cos\theta - \sin\theta)\mathrm{d}\theta\cdot\int_{0}^{\sqrt{2}} r^2\mathrm{d}r$$



(b)

第13题图

$$= (\sin\theta + \cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \cdot \frac{1}{3}r^3\Big|_0^{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}2\cdot\sqrt{2} = -\frac{8}{3}.$$

14 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有连续导数，$f(0)=1$，且满足

$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D_t = \{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant t-x, 0\leqslant x\leqslant t\}\ (0<t\leqslant 1)$. 求 $f(x)$ 的表达式.

【解】 分别计算两个二重积分 $\iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可得

$$\iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(t)\iint\limits_{D_t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{t^2}{2}f(t),$$

$$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^t \mathrm{d}x\int_0^{t-x} f'(x+y)\mathrm{d}y \xlongequal{x+y=u} \int_0^t \mathrm{d}x\int_x^t f'(u)\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^t [f(t)-f(x)]\mathrm{d}x = tf(t) - \int_0^t f(x)\mathrm{d}x.$$

由题设即知函数 $f(t)$ 在区间 $[0,1]$ 上满足方程

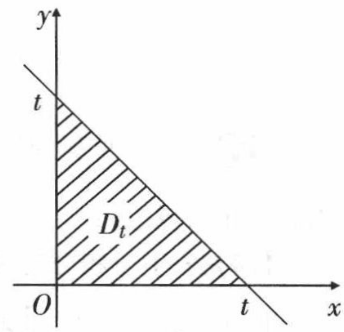
$$tf(t) - \int_0^t f(x)\mathrm{d}x = \frac{t^2}{2}f(t) \Leftrightarrow \left(t-\frac{t^2}{2}\right)f(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x. \qquad (*)$$

由 $f(x)$ 连续知 $\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$ 可导，由 $(*)$ 式即知 $f(t)$ 当 $t\in(0,1]$ 时可导. 将 $(*)$ 两端求导即得 $f(t)$ 满足微分方程

$$(1-t)f(t) + \left(t-\frac{t^2}{2}\right)f'(t) = f(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1-\frac{t}{2}\right)f'(t) = f(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(t) = \frac{2}{2-t}f(t), t\in(0,1].$$



第 14 题图

解之可得 $f(t) = \dfrac{C}{(2-t)^2}$，利用 $f(0)=1$ 可确定常数 $C=4$，故所求的函数 $f(x) = \dfrac{4}{(2-t)^2}$. 把 t 换为 x 即得 $f(x) = \dfrac{4}{(2-x)^2}$.

15 求 $\iint\limits_D (\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域（如图(a)）.

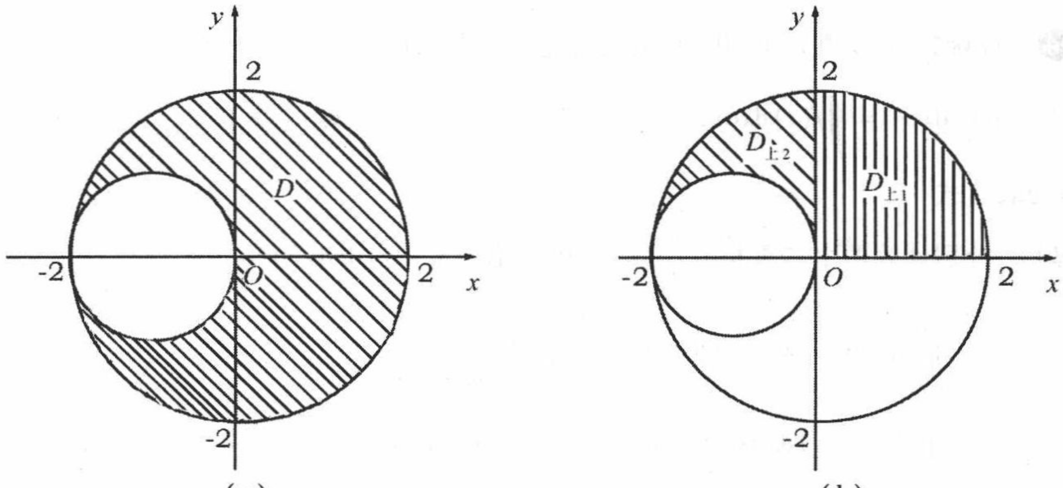
【解法一】 $\iint\limits_D (\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_{大圆}} (\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma - \iint\limits_{D_{小圆}} (\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$.

而
$$\iint\limits_{D_{大圆}} (\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_大} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_大} y\mathrm{d}\sigma \xlongequal{由对称性} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r + 0$$

$$= \frac{16}{3}\pi,$$

$$\iint\limits_{D_{小圆}} (\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_小} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_小} y\mathrm{d}\sigma = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta} r^2\mathrm{d}r + 0 = \frac{32}{9},$$

所以 $$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma=\frac{16}{9}(3\pi-2).$$



第 15 题图

【解法二】 由积分区域对称性和被积函数的奇偶性可得

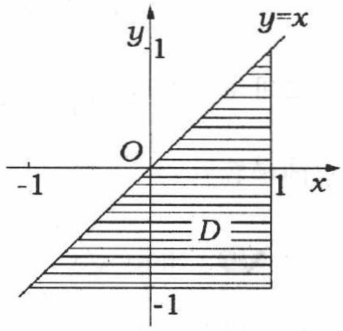
$$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=0.$$

故原式 $=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma+0\xlongequal{\text{见图(b)}}2\left(\iint\limits_{D_{上1}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_{上2}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma\right)$

$$=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-2\cos\theta}^2 r^2\mathrm{d}r\right)=2\left[\frac{4}{3}\pi+\left(\frac{4}{3}\pi-\frac{16}{9}\right)\right]=\frac{16}{9}(3\pi-2).$$

16 求二重积分 $\iint\limits_D y\left[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值，其中 D 是由直线 $y=x,y=-1$ 及 $x=1$ 围成的平面区域.

【解法一】 积分区域 D 如图(a).



(a)

$$\iint\limits_D y\left[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_y^1 y\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 y(1-y)\mathrm{d}y=-\frac{2}{3},$$

$$\iint\limits_D xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 y\mathrm{d}y\int_y^1 xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^1 y\left[e^{\frac{1}{2}(1+y^2)}-e^{y^2}\right]\mathrm{d}y=0.$$

于是 $$\iint\limits_D y\left[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{3}.$$

【解法二】 用直线 $y=-x$，x 轴与 y 轴可把区域 D 分成四块，分别记为 D_1,D_2,D_3 和 D_4，如图(b).

由于被积函数关于 y 是奇函数，D_1 与 D_2 关于 x 轴对称，从而

$$\iint\limits_{D_1+D_2}y\left[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

类似,由于 $xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ 关于 x 是奇函数,D_3 与 D_4 关于 y 轴对称,从而

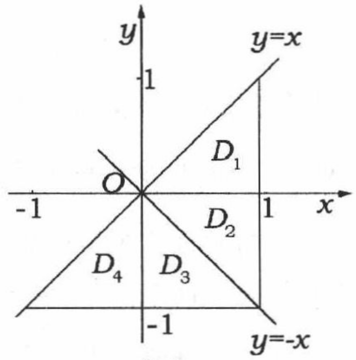
$$\iint\limits_{D_3+D_4} xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

由于 y 关于 x 是偶函数,D_3 与 D_4 关于 y 轴对称,又有

$$\iint\limits_{D_3+D_4} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_3} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

把这些结果代入原积分,即得

$$\text{原式} = 2\iint\limits_{D_3} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{0} y\mathrm{d}y\int_{0}^{-y}\mathrm{d}x = -2\int_{-1}^{0} y^2\mathrm{d}y = -\frac{2}{3}.$$



(b)

第 16 题图

17 设 $D = \{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$,则 $\iint\limits_{D}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ________.

【分析】 因区域 D 关于 x 轴对称,而函数 y 是变量 y 的奇函数,从而

$$\iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

引入极坐标 (r,θ) 满足 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,则在极坐标系 (r,θ) 中

$$D = \{(r,\theta)\mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 1\},$$

故
$$\begin{aligned}\iint\limits_{D}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

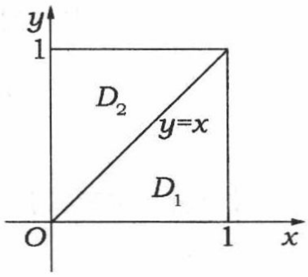
【评注】 利用 $\iint\limits_{D} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可简化积分 $\iint\limits_{D} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的计算,计算如下:

$$\iint\limits_{D} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}.$$

18 计算二重积分 $\iint\limits_{D} e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D = \{(x,y)\mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

【分析与求解】 D 是正方形区域如图. 因在 D 上被积函数分块表示

$$\max\{x^2,y^2\} = \begin{cases} x^2, & x \geqslant y, \\ y^2, & x \leqslant y, \end{cases} \quad (x,y) \in D,$$



第 18 题图

于是要用分块积分法,用 $y = x$ 将 D 分成两块:

$$D = D_1 \cup D_2, D_1 = D \cap \{y \leqslant x\}, D_2 = D \cap \{y \geqslant x\}.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad I &= \iint\limits_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint\limits_{D_1} e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (D \text{ 关于 } y = x \text{ 对称})\end{aligned}$$

$$= 2\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy \xlongequal{\text{选择积分顺序}} 2\int_0^1 xe^{x^2}dx = e^{x^2}\Big|_0^1 = e - 1.$$

【评注】 ① 本题考查：$\max\{x^2,y^2\}$ 的处理，如何将 D 按 $\max\{x^2,y^2\}$ 的要求划分，从而将 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$ 分成两个二重积分的和并计算之.

② 有些考生不知道如何处理 $\max\{x^2,y^2\}$，或虽知道如何处理 $\max\{x^2,y^2\}$，但却将二重积分分成两块之和错误地做成将该二重积分分别按两种情形计算：

当 $x^2 \geqslant y^2$ 时，$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy = \iint\limits_D e^{x^2}dxdy = \int_0^1 dx\int_0^1 e^{x^2}dy = \int_0^1 e^{x^2}dx$，

无法往下做．类似地当 $y^2 \geqslant x^2$ 时也无法做下去．

也有的考生做成：

当 $x^2 \geqslant y^2$ 时，$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy = \iint\limits_{D_1} e^{x^2}dxdy = \int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy = \frac{1}{2}(e-1)$；

当 $y^2 \geqslant x^2$ 时，$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy = \cdots = \frac{1}{2}(e-1)$，也是错误的．

19 设 $D = \{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqslant \sqrt{2}, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$，$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数，计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]dxdy$.

【分析与求解一】 因被积函数分块表示，要用分块积分法．

在 D 上：$xy[1+x^2+y^2] = \begin{cases} xy, & x^2+y^2<1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, \\ 2xy, & 1\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{2}, x\geqslant 0, y\geqslant 0. \end{cases}$

将 D 分成两块，$D = D_1 \cup D_2$，其中

$$D_1: x^2+y^2<1, x\geqslant 0, y\geqslant 0;\quad D_2: 1\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{2}, x\geqslant 0, y\geqslant 0.$$

于是 $I = \iint\limits_{D_1} xydxdy + \iint\limits_{D_2} 2xydxdy = 2\iint\limits_D xydxdy - \iint\limits_{D_1} xydxdy$.

作极坐标变换，有 $D_1: 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 1$；$D: 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 2^{\frac{1}{4}}$.

$$\Rightarrow \quad I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2^{\frac{1}{4}}} r^2\cos\theta\sin\theta\cdot rdr - \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^2\cos\theta\sin\theta\cdot rdr$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{2^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{4}r^4\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}.$$

【分析与求解二】 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}} r^3\sin\theta\cos\theta[1+r^2]dr$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}} r^3[1+r^2]dr = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 r^3dr + \int_1^{\sqrt[4]{2}} 2r^3dr\right) = \frac{3}{8}.$$

【评注】 从试卷答题情况来看，多数考生不会做的主要原因是对取整函数不太熟悉，无法得到被积函数的正确表达式，例如许多考生都将被积函数错写为 $[1+x^2+y^2] = 2, (x,y)\in D$.

20 计算 $I = \iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dV$，其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与

平面 $z=8$ 所围成的区域.

【解】 由曲线 $\begin{cases} y^2=2z, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周生成旋转面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$，它与平面 $z=8$ 围成 Ω. 这两曲面的交线是：$z=8, x^2+y^2=4^2$.

选用柱坐标变换，并选择先积 r,θ 后积 z 的积分顺序，则

$$\Omega: 0\leqslant z\leqslant 8, 0\leqslant r\leqslant \sqrt{2z}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

$$I=\int_0^8 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^2\cdot r dr=2\pi\int_0^4\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\sqrt{2z}}dz=2\pi\int_0^8 z^2 dz=\frac{1024}{3}\pi.$$

【评注】 ① 还有另外两种积分顺序. 对该题来说，这三种积分顺序中前两种计算的繁简差不多. 若先对 z 积分时上、下限均非零，计算显得复杂些.

② 有些考生用旋转抛物面方程 $x^2+y^2=2z$ 来替换被积函数，即 $I=\iiint\limits_{\Omega}2z dV$，这是错误的. 究其原因，这些考生把曲面积分与三重积分相混淆了.

21 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\right\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega}z^2 dxdydz=$ ________.

【分析一】 被积函数只与 z 有关，与 z 轴垂直的 Ω 的截面区域 $D(z)$（$D(z): x^2+y^2\leqslant 1-z^2$）的面积 $S(z)=\pi(1-z^2)$ 已知，故选用先二后一(z)的公式化三重积分为定积分得

$$\iiint\limits_{\Omega}z^2 dV=\int_{-1}^1 dz\iint\limits_{D(z)}z^2 dxdy=\int_{-1}^1 z^2 S(z)dz=2\pi\int_0^1 z^2(1-z^2)dz$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{15}\pi.$$

【分析二】 用球坐标变换. Ω 的球坐标表示是 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant 1$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega}z^2 dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho=2\pi\left[-\int_0^{\pi}\cos^2\varphi d(\cos\varphi)\right]\cdot\int_0^1\rho^4 d\rho$$

$$=2\pi\cdot\left(\frac{-1}{3}\cos^3\varphi\Big|_0^{\pi}\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{15}\pi.$$

【分析三】 根据变量轮换对称性得

$$\iiint\limits_{\Omega}z^2 dxdydz=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=\frac{1}{3}2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{15}\pi.$$

第十一章　曲线积分与曲面积分

习题 11－1　对弧长的曲线积分

1 设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线弧 L，在点 (x,y) 处的线密度为 $\mu(x,y)$．用对弧长的曲线积分分别表达：

(1) 该曲线弧对 x 轴、y 轴的转动惯量 I_x、I_y；(2) 该曲线弧的质心坐标 $(\bar{x},\bar{y})$．

【解】 (1) 设想将 L 分成 n 个小弧段，取出其中任意一段记作 $\mathrm{d}s$（其长度也记作 $\mathrm{d}s$），(x,y) 为 $\mathrm{d}s$ 上一点，则 $\mathrm{d}s$ 对 x 轴和对 y 轴的转动惯量的近似值分别为

$$\mathrm{d}I_x = y^2\mu(x,y)\mathrm{d}s,\quad \mathrm{d}I_y = x^2\mu(x,y)\mathrm{d}s.$$

以此作为转动惯量元素并积分，即得 L 对 x 轴、对 y 轴的转动惯量：

$$I_x = \int_L y^2\mu(x,y)\mathrm{d}s,\quad I_y = \int_L x^2\mu(x,y)\mathrm{d}s.$$

(2) $\mathrm{d}s$ 对 x 轴和对 y 轴的静矩的近似值分别为

$$\mathrm{d}M_x = y\mu(x,y)\mathrm{d}s,\quad \mathrm{d}M_y = x\mu(x,y)\mathrm{d}s.$$

以此作为静矩元素并积分，即得 L 对 x 轴、对 y 轴的静矩

$$M_x = \int_L y\mu(x,y)\mathrm{d}s,\quad M_y = \int_L x\mu(x,y)\mathrm{d}s.$$

从而 L 的质心坐标为 $$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_L x\mu(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s},\quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_L y\mu(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s}.$$

2 利用对弧长的曲线积分的定义证明性质 3．

【证】 设对积分弧段 L 任意分割成 n 个小弧段，第 i 个小弧段的长度为 Δs_i，(ξ_i,η_i) 为第 i 个小弧段上任意取定的一点．按假设，有

$$f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \leqslant g(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i\ (i = 1,2,\cdots,n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

令 $\lambda = \max\{\Delta s_i\} \to 0$，上式两端同时取极限，即得 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \leqslant \int_L g(x,y)\mathrm{d}s$．

又　$f(x,y) \leqslant |f(x,y)|$，$-f(x,y) \leqslant |f(x,y)|$，利用以上结果，得

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \leqslant \int_L |f(x,y)|\mathrm{d}s,\quad -\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \leqslant \int_L |f(x,y)|\mathrm{d}s,$$

即 $$\left|\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_L |f(x,y)|\mathrm{d}s.$$

3 计算下列对弧长的曲线积分：

(1) $\oint_L (x^2+y^2)^n\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x = a\cos t, y = a\sin t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$；

(2) $\int_L (x+y)\mathrm{d}s$,其中 L 为连接(1,0) 及(0,1) 两点的直线段;

(3)$\oint_L x\mathrm{d}s$,其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界;

(4)$\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$,其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$,直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限所围成的扇形的整个边界;

(5) $\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$,其中 Γ 为曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t, y=\mathrm{e}^t\sin t, z=\mathrm{e}^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧;

(6) $\int_\Gamma x^2yz\mathrm{d}s$,其中 Γ 为折线 $ABCD$,这里 A,B,C,D 依次为点(0,0,0),(0,0,2),(1,0,2),(1,3,2);

(7) $\int_L y^2\mathrm{d}s$,其中 L 为摆线的一拱:$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(8) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$,其中 L 为摆线 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

【解】 (1)$x_t'=-a\sin t$, $y_t'=a\cos t$,则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\mathrm{d}t=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\mathrm{d}t=a\mathrm{d}t,$$

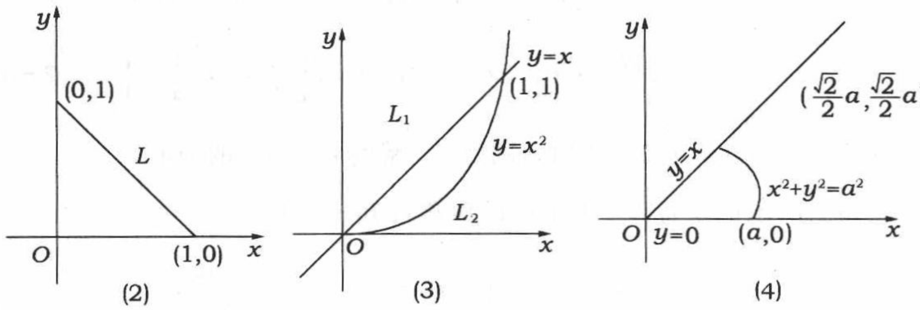
所以 $\oint_L (x^2+y^2)^n\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}[(a\cos t)^2+(a\sin t)^2]^n a\mathrm{d}t=a^{2n+1}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi a^{2n+1}.$

(2) 如图(2) 所示,可求得 L 的方程为 $L: y=1-x, 0\leqslant x\leqslant 1$,于是

$$\int_L (x+y)\mathrm{d}s=\int_0^1[x+(1-x)]\sqrt{1+(-1)^2}\mathrm{d}x=\sqrt{2}.$$

(3) 如图(3),设 $L_1: y=x(0\leqslant x\leqslant 1)$, $L_2: y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$,则

$$\begin{aligned}\oint_L x\mathrm{d}s&=\int_{L_1}x\mathrm{d}s+\int_{L_2}x\mathrm{d}s=\int_0^1 x\sqrt{1+1^2}\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{8}\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}(1+4x^2)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)\\&=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$



第 3 题图

(4) 如图(4) 所示,设 $L_1: y=0(0\leqslant x\leqslant a)$, $L_2: x^2+y^2=a^2\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$,

其极坐标方程为 $r=a$; $L_3: y=x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$. 于是

$$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds = \int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds + \int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds + \int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$$

$$= \int_0^a e^x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}d\theta + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}dx$$

$$= e^a - 1 + \frac{\pi}{4}ae^a + e^a - 1 = e^a\left(2 + \frac{\pi}{4}a\right) - 2.$$

(5) 因为 $x^2 + y^2 + z^2 = 2e^{2t}$,且

$$x_t' = e^t(\cos t - \sin t),\quad y_t' = e^t(\cos t + \sin t),\quad z_t' = e^t,$$

所以 $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}ds = \int_0^2 \frac{1}{2}e^{-2t}\sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}dt$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-2t}\cdot\sqrt{3e^{2t}}dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2 e^{-t}dt = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - e^{-2}).$$

(6) 由已知,可设

Γ_1 为直线段 $AB: x = 0, y = 0, z = z\ (0 \leqslant z \leqslant 2)$;

Γ_2 为直线段 $BC: x = x, y = 0, z = 2\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$;

Γ_3 为直线段 $CD: x = 1, y = y, z = 2\ (0 \leqslant y \leqslant 3)$,

于是 $\displaystyle\int_\Gamma x^2yzds = \int_{\Gamma_1} x^2yzds + \int_{\Gamma_2} x^2yzds + \int_{\Gamma_3} x^2yzds$

$$= \int_{\Gamma_3} x^2yzds = \int_0^3 1^2\cdot y\cdot 2\cdot\sqrt{1}dy = 2\int_0^3 ydy = 9.$$

(7) $x_t' = a(1 - \cos t), y_t' = a\sin t$,则

$$\int_L y^2ds = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2\sqrt{x'^2_t + y'^2_t}dt$$

$$= 8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt = 16a^3\int_{2\pi}^0\left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right)^2 d\left(\cos\frac{t}{2}\right)$$

$$\xlongequal{\text{令 } u = \cos\frac{t}{2}} 16a^3\int_{-1}^1(1 - 2u^2 + u^4)du = \frac{256}{15}a^3.$$

(8) $x_t' = at\cos t, y_t' = at\sin t$,则

$$\int_L(x^2 + y^2)ds = \int_0^{2\pi}[a^2(\cos t + t\sin t)^2 + a^2(\sin t - t\cos t)^2]\sqrt{x'^2_t + y'^2_t}dt$$

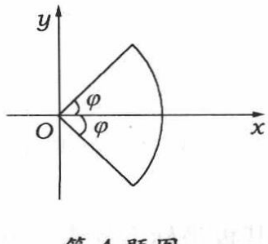
$$= \int_0^{2\pi}a^2(1 + t^2)\cdot atdt = a^3\left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^4\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2a^3(1 + 2\pi^2).$$

4 求半径为 a、中心角为 2φ 的均匀圆弧(线密度 $\mu = 1$)的质心.

【解】 建立如图所示的坐标系.由扇形的对称性知 $\bar{y} = 0$.又

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{2a\varphi}\int_L xds = \frac{1}{2a\varphi}\int_{-\varphi}^{\varphi}a\cos\theta\cdot ad\theta = \frac{a\sin\varphi}{\varphi},$$

故质心坐标为$\left(\dfrac{a\sin\varphi}{\varphi}, 0\right)$.



第 4 题图

5 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = kt$,其中 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$,它的线密度 $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.求:(1) 它关于 z 轴的转

动惯量 I_z；（2）它的质心．

【解】（1）它关于 z 轴的转动惯量为

$$\begin{aligned}I_z &= \int_\Gamma (x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)\,ds\\&= \int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,dt\\&= a^2\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\,dt=\frac{2}{3}a^2\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2).\end{aligned}$$

（2）由于 $\int_\Gamma \rho(x,y,z)\,ds=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,dt=\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)$，

$$\begin{aligned}\int_\Gamma x\rho(x,y,z)\,ds &= \int_0^{2\pi} a\cos t\cdot(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,dt\\&= a\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}\cos t\cdot(a^2+k^2t^2)\,dt=4\pi k^2a\sqrt{a^2+k^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma y\rho(x,y,z)\,ds &= \int_0^{2\pi} a\sin t\cdot(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,dt\\&= a\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}\sin t\cdot(a^2+k^2t^2)\,dt=-4k^2\pi^2a\sqrt{a^2+k^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma z\rho(x,y,z)\,ds &= \int_0^{2\pi} kt(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,dt\\&= k\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}(a^2t+k^2t^3)\,dt=2k\pi^2\sqrt{a^2+k^2}(a^2+2k^2\pi^2),\end{aligned}$$

因此，所求质心之坐标为

$$\bar{x}=\frac{\int_\Gamma x\rho(x,y,z)\,ds}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)\,ds}=\frac{6ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},\quad \bar{y}=\frac{\int_\Gamma y\rho(x,y,z)\,ds}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)\,ds}=\frac{-6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},$$

$$\bar{z}=\frac{\int_\Gamma z\rho(x,y,z)\,ds}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)\,ds}=\frac{3k(\pi a^2+2\pi^3k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$

习题 11－2　对坐标的曲线积分

1 设 L 为 xOy 面内直线 $x=a$ 上的一段，证明：$\int_L P(x,y)\,dx=0$.

【证】将 L 的方程表达为如下的参数形式：$\begin{cases}x=a,\\y=t,\end{cases}$ t 从 α 变到 β，于是由第二类曲线积分的计算公式，得 $\int_L P(x,y)\,dx=\int_\alpha^\beta P(a,t)\cdot 0\,dt=0$.

【注】本题给出了第二类曲线积分的一个重要性质：如果 L 为垂直于 x 轴的有向线段，则 $\int_L P(x,y)\,dx=0$；如果 L 为垂直于 y 轴的有向线段，则 $\int_L Q(x,y)\,dy=0$．这一性质常被用来简化第二类曲线积分的计算．

2 设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点$(a,0)$到点$(b,0)$的一段直线,证明:

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b P(x,0)\,\mathrm{d}x.$$

【证】 将 L 的方程表达为如下的参数形式: $\begin{cases} x = x, \\ y = 0, \end{cases}$ x 从 a 变到 b,于是

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b P(x,0)\,\mathrm{d}x.$$

3 计算下列对坐标的曲线积分:

(1) $\int_L (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}s$,其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点$(0,0)$到点$(2,4)$的一段弧;

(2) $\oint_L xy\,\mathrm{d}x$,其中 L 为圆周$(x - a)^2 + y^2 = a^2(a > 0)$及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行);

(3) $\int_L y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$,其中 L 为圆周 $x = R\cos t, y = R\sin t$ 上对应于 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧;

(4) $\oint_L \frac{(x + y)\,\mathrm{d}x - (x - y)\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$,其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$(按逆时针方向绕行);

(5) $\int_\Gamma x^2\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}z$,其中 Γ 为曲线 $x = k\theta, y = a\cos\theta, z = a\sin\theta$ 上对应于 θ 从 0 到 π 的一段弧;

(6) $\int_\Gamma x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + (x + y - 1)\,\mathrm{d}z$,其中 Γ 是从点$(1,1,1)$到点$(2,3,4)$的一段直线;

(7) $\oint_\Gamma \mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$,其中 Γ 为有向闭折线段 $ABCA$,这里 A,B,C 依次为点$(1,0,0)$,$(0,1,0)$,$(0,0,1)$;

(8) $\int_L (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y$,其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点$(-1,1)$到点$(1,1)$的一段弧.

【解】 (1) 沿 $L: y = x^2$ 从点$(0,0)$到点$(2,4)$,即 x 从 0 到 2,于是

$$\int_L (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x = -\frac{56}{15}.$$

(2) $L = L_1 + L_2$,其中 $L_1: \begin{cases} x = a + a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}$ $L_2: y = 0$. 从而

$$\int_{L_1} xy\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi (a + a\cos t) \cdot a\sin t \cdot a(-\sin t)\,\mathrm{d}t = -a^3\int_0^\pi (\sin^2 t + \sin^2 t\cos t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -a^3\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^\pi = -\frac{1}{2}\pi a^3,$$

$$\int_{L_2} xy\,\mathrm{d}x = \int_0^a x \cdot 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

故 $\oint_L xy\,\mathrm{d}x = \int_{L_1} xy\,\mathrm{d}x + \int_{L_2} xy\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi a^3.$

(3) $\int_L y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [R\sin t \cdot R(-\sin t) + R\cos t \cdot R\cos t]\,\mathrm{d}t = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,\mathrm{d}t = 0.$

(4) L 的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta \end{cases}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$,故

$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x - (x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos\theta + a\sin\theta)\cdot a(-\sin\theta) - (a\cos\theta - a\sin\theta)a\cos\theta}{a^2}\mathrm{d}\theta = -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = -2\pi.$$

(5) $\displaystyle\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z$

$$= \int_0^{\pi}[k^2\theta^2\cdot k + a\sin\theta(-a\sin\theta) + (-a\cos\theta)a\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(k^3\theta^2 - a^2)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}k^3\pi^3 - a^2\pi.$$

(6) 点(1,1,1) 到点(2,3,4) 的直线方程为 $\dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{y-1}{3-1} = \dfrac{z-1}{4-1}$,用参数方程表示为 $x = 1+t, y = 1+2t, z = 1+3t$, x 从 1 到 2,因此 t 从 0 到 1. 于是

$$\int_\Gamma x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + (x+y-1)\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1[(1+t) + (1+2t)\cdot 2 + (1+t+1+2t-1)\cdot 3]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1(6+14t)\mathrm{d}t = 13.$$

(7) 直线段 AB 的参数方程为 $x = t, y = 1-t, z = 0$ (t 从 1 到 0);

直线段 BC 的参数方程为 $x = 0, y = 1-t, z = t$ (t 从 0 到 1);

直线段 CA 的参数方程为 $x = t, y = 0, z = 1-t$ (t 从 0 到 1),

所以 $\displaystyle\int_\Gamma \mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$

$$= \int_{\overline{AB}}\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z + \int_{\overline{BC}}\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z + \int_{\overline{CA}}\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1[1-(-1)+0]\mathrm{d}t + \int_0^1[0-(-1)+(1-t)]\mathrm{d}t + \int_0^1 1\cdot\mathrm{d}t$$

$$= 2 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{8}{2}.$$

(8) L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点$(-1,1)$ 到点$(1,1)$ 的一段弧,因此 x 从 -1 到 1,于是

$$\int_L(x^2 - 2xy)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^1[(x^2 - 2x\cdot x^2) + (x^4 - 2x\cdot x^2)2x]\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^1(x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)\mathrm{d}x = 2\int_0^1(x^2 - 4x^4)\mathrm{d}x = -\frac{14}{15}.$$

4 计算 $\displaystyle\int_L(x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y$,其中 L 是:

(1) 抛物线 $y^2 = x$ 从点(1,1) 到点(4,2) 的一段弧;

(2) 从点(1,1) 到点(4,2) 的直线段;

(3) 先沿直线从点(1,1) 到点(1,2),然后再沿直线到点(4,2) 的折线;

(4) 曲线 $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$ 从点(1,1)到点(4,2)的一段弧.

【解】 (1) 过点(1,1)与点(4,2)的抛物线 $x = y^2 (1 \leqslant y \leqslant 2), \mathrm{d}x = 2y\mathrm{d}y$,于是

$$I = \int_1^2 [(y^2 + y) \cdot 2y + (y - y^2)]\mathrm{d}y = \int_1^2 (2y^3 + y^2 + y)\mathrm{d}y = \frac{34}{3}.$$

(2) 过点(1,1)与点(4,2)的 L 的直线方程为 $x = 3y - 2$,且 y 对应地从 $\alpha = 1$ 变到 $\beta = 2$,于是

$$\int_L (x + y)\mathrm{d}x + (y - x)\mathrm{d}y = \int_1^2 [(3y - 2 + y) \cdot 3 + (y - 3y + 2)]\mathrm{d}y$$

$$= \int_1^2 (10y - 4)\mathrm{d}y = 11.$$

(3) 过点(1,1)与点(1,2)的直线段的方程为 $x = 1(1 \leqslant y \leqslant 2), \mathrm{d}x = 0$,因此

$$I_1 = \int_{L_1} (1 + y) \cdot 0 + (y - 1)\mathrm{d}y = \int_1^2 (y - 1)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$$

过点(1,2)与点(4,2)的直线段的方程为 $y = 2(1 \leqslant x \leqslant 4), \mathrm{d}y = 0$,因此

$$I_2 = \int_{L_2} (x + 2)\mathrm{d}x + (2 - x) \cdot 0 = \int_1^4 (x + 2)\mathrm{d}x = \frac{27}{2},$$

故 $$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} + \frac{27}{2} = 14.$$

(4) 由点(1,1)到点(4,2)时,因 $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$ 有 $t = x - 2y + 1$,故 t 对应于从 $t = 0$ 到 $t = 1$,于是

$$I = \int_0^1 [(3t^2 + t + 2)(4t + 1) + (-t^2 - t) \cdot 2t]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (10t^3 + 5t^2 + 9t + 2)\mathrm{d}t = \frac{32}{3}.$$

5 一力场由沿横轴正方向的恒力 $\boldsymbol{F}$ 所构成. 试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时场力所做的功.

【解】 $L: x = R\cos\theta, y = R\sin\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \boldsymbol{F} = \{|\boldsymbol{F}|, 0\}$,

所以 $$W = \int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L |\boldsymbol{F}|\mathrm{d}x + 0\mathrm{d}y = |\boldsymbol{F}|\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\mathrm{d}(\cos\theta) = -|\boldsymbol{F}|R.$$

6 设 z 轴与重力的方向一致,求质量为 m 的质点从位置 (x_1, y_1, z_1) 沿直线移到位置 (x_2, y_2, z_2) 时重力所做的功.

【解】 $\boldsymbol{F} = \{0, 0, mg\}$,所以

$$W = \int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L 0\mathrm{d}x + 0\mathrm{d}y + mg\mathrm{d}z = mg\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z = mg(z_2 - z_1).$$

7 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化成对弧长的曲线积分,其中 L 为:

(1) 在 xOy 面内沿直线从点(0,0)到点(1,1);

(2) 沿抛物线 $y = x^2$ 从点(0,0)到点(1,1);

(3) 沿上半圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 从点(0,0)到点(1,1).

【解】 (1) L 的方程为:$y = x$,且 $y' = 1$,所以 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L \frac{\sqrt{2}}{2}(P + Q)\mathrm{d}s$.

(2) $y'_x = 2x$，方向角 α, β 分别满足 $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$，　$\cos\beta = \dfrac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$，所以

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s = \int_L \frac{P+2xQ}{\sqrt{1+4x^2}}\mathrm{d}s.$$

(3) 对 $x^2+y^2=2x$ 两边关于 x 求导，得

$$2x + 2y \cdot y'_x = 2 \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = y'_x = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}},$$

所以　$\cos\alpha = \sqrt{2x-x^2}$，$\cos\beta = \sin\alpha = 1-x$. 于是

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L [\sqrt{2x-x^2}P + (1-x)Q]\mathrm{d}s.$$

8 设 Γ 为曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧，把对坐标的曲线积分 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 化成对弧长的曲线积分.

【解】 曲线的切线方向为 $(x'_t, y'_t, z'_t) = (1, 2t, 3t^2)$. 切线方向与三个坐标轴正向夹角的余弦分别为

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+8t^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+8y^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2+8t^4}} = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+8y^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{3t^2}{\sqrt{1+4t^2+8t^4}} = \frac{3y}{\sqrt{1+4x^2+8y^2}},$$

故　$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_\Gamma \frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\mathrm{d}s.$$

习题 11－3　格林公式及其应用

1 计算下列曲线积分，并验证格林公式的正确性：

(1) $\oint_L (2xy-x^2)\mathrm{d}x + (x+y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 所围成区域的正向边界曲线；

(2) $\oint_L (x^2-xy^3)\mathrm{d}x + (y^2-2xy)\mathrm{d}y$，其中 L 是四个顶点分别为 $(0,0)$，$(2,0)$，$(2,2)$ 及 $(0,2)$ 的正方形区域的正向边界.

【解】 (1) 如图(1)，$\oint_L = \int_{L_1} + \int_{L_2}$，其中 $L_1: y=x^2, 0 \leqslant x \leqslant 1$；$L_2: x=y^2, 0 \leqslant y \leqslant 1$.

所以　$$\int_{L_1}(2xy-x^2)\mathrm{d}x + (x+y^2)\mathrm{d}y = \int_0^1 [(2x^3-x^2) + (x+x^4)2x]\mathrm{d}x = \frac{7}{6},$$

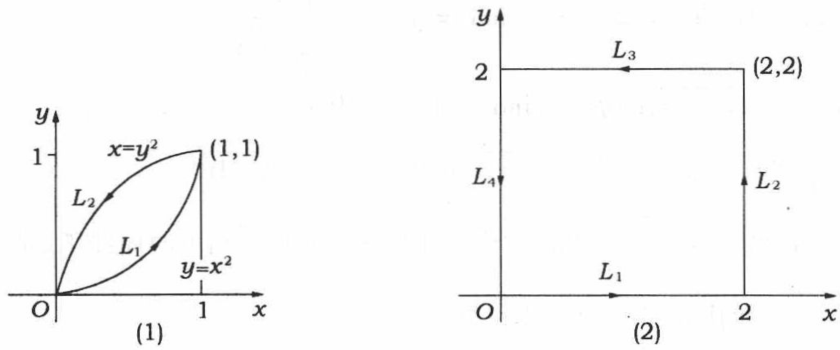
$$\int_{L_2}(2xy-x^2)\mathrm{d}x + (x+y^2)\mathrm{d}y = \int_0^1 [(2y^3-y^4)2y + (y^2+y^2)]\mathrm{d}y = -\frac{17}{15},$$

所以　$$\oint_L (2xy-x^2)\mathrm{d}x + (x+y^2)\mathrm{d}y = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}.$$

另外，令 $P = 2xy - x^2$，$Q = x + y^2$，则

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(1-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(1-2x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1(\sqrt{y}-y-y^2+y^4)\mathrm{d}y=\frac{1}{30}.$$

所以 $\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$



第 1 题图

（2）如图（2）所示，$\oint_L=\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}+\int_{L_4}$，其中：

$L_1:y=0$，x 由 0 到 2，则 $\int_{L_1}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_0^2x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$；

$L_2:x=2$，y 由 0 到 2，则 $\int_{L_2}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_0^2(y^2-4y)\mathrm{d}y=-\frac{16}{3}$；

$L_3:y=2$，x 由 2 到 0，则 $\int_{L_3}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_2^0(x^2-8x)\mathrm{d}x=\frac{40}{3}$；

$L_4:x=0$，y 由 2 到 0，则 $\int_{L_4}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_2^0y^2\mathrm{d}y=-\frac{8}{3}$.

所以 $\oint_L(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\frac{8}{3}-\frac{16}{3}+\frac{40}{3}-\frac{8}{3}=8.$

其次，令 $P=x^2-xy^3$，$Q=y^2-2xy$，则

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(-2y+3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2(3xy^2-2y)\mathrm{d}y=\int_0^2(8x-4)\mathrm{d}x=8.$$

所以 $\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$

2 利用曲线积分，求下列曲线所围平面图形的面积：

（1）星形线 $x=a\cos^3t,y=a\sin^3t$；　　（2）椭圆 $9x^2+16y^2=144$；

（3）圆 $x^2+y^2=2ax$.

【解】（1）设所求面积为 A，则 $A=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由格林公式知

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3t\cdot3a\sin^2t\cos t-a\sin^3t\cdot3a\cos^2t(-\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}(\sin^2 t\cos^4 t + \sin^4 t\cos^2 t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\mathrm{d}t = \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}(1 - \cos 4t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

（2）椭圆的参数方程为 $x = 4\cos\theta,\quad y = 3\sin\theta\ (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$，设椭圆的面积为 A，由格林公式知

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[4\cos\theta \cdot 3\cos\theta - 3\sin\theta(-4\sin\theta)]\,\mathrm{d}\theta = 6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 12\pi.$$

（3）圆的参数方程为 $x = a + a\cos\theta,\quad y = a\sin\theta\ (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$，设圆的面积为 A，则由格林公式知

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(a + a\cos\theta)\cdot a\cos\theta - a\sin\theta(-a\sin\theta)]\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(1 + \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi a^2.$$

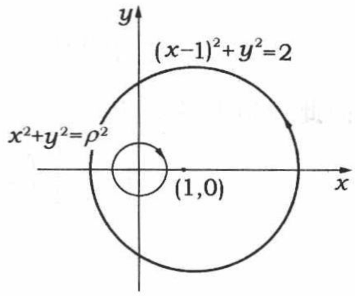
3 计算曲线积分 $\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2 + y^2)}$，其中 L 为圆周 $(x - 1)^2 + y^2 = 2$，L 的方向为逆时针方向.

【解】 令 $P = \frac{y}{2(x^2 + y^2)}, Q = \frac{-x}{2(x^2 + y^2)}$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 显然 $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内有唯一不连续点 $(0,0)$.

取积分曲线 $l: x^2 + y^2 = \rho^2(\rho > 0)$，其方向为顺时针方向，$l$ 包含 $(0,0)$ 点且 ρ 足够小，使 l 在 D 内，则由格林公式知

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2 + y^2)} = \oint_{l^-} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2 + y^2)}.$$



第 3 题图

且 l 的参数方程为 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$，故

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2 + y^2)} = \int_0^{2\pi}\frac{\rho\sin\theta \cdot \rho(-\sin\theta) - \rho\cos\theta \cdot \rho\cos\theta}{2\rho^2}\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = -\pi.$$

4 确定闭曲线 C，使曲线积分

$$\oint_C\left(x + \frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x + \left(y + x - \frac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}y$$

达到最大值.

【解】 记 D 为 C 所围成的平面有界闭区域，C 为 D 的正向边界曲线，则由格林公式

$$\oint_C\left(x + \frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x + \left(y + x - \frac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}y = \iint_D[(1 - 2x^2) - y^2]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

要使上式右端的二重积分达到最大值，D 应包含所有使被积函数 $1 - 2x^2 - y^2$ 大于零的点，而不包含使被积函数小于零的点. 因此 D 应为由椭圆 $2x^2 + y^2 = 1$ 所围成的闭区域. 这就是说，当 C 为取逆时针方向的椭圆 $2x^2 + y^2 = 1$ 时，所给的曲线积分达到最大值.

5 设 n 边形的 n 个顶点按逆时针向依次为 $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2), \cdots, M_n(x_n,y_n)$. 试利

用曲线积分证明此 n 边形的面积为

$$A=\frac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\cdots+(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})+(x_ny_1-x_1y_n)].$$

【证】 n 边形的正向边界 L 由有向线段 $M_1M_2,M_2M_3,\cdots,M_{n-1}M_n,M_nM_1$ 组成.

有向线段 M_1M_2 的参数方程为 $x=x_1+(x_2-x_1)t,y=y_1+(y_2-y_1)t,t$ 从 0 变到 1,于是

$$\begin{aligned}\int_{M_1N_1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x&=\int_0^1\{[x_1+(x_2-x_1)t](y_2-y_1)-[y_1+(y_2-y_1)t](x_2-x_1)\}\mathrm{d}t\\&=\int_0^1[x_1(y_2-y_1)-y_1(x_2-x_1)]\mathrm{d}t\\&=\int_0^1(x_1y_2-x_2y_1)\mathrm{d}t=x_1y_2-x_2y_1.\end{aligned}$$

同理可求得

$$\int_{M_2M_3}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=x_2y_3-x_3y_2,\cdots,$$

$$\int_{M_{n-1}M_n}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1},$$

$$\int_{M_nM_1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=x_ny_1-x_1y_n.$$

因此 n 边形的面积

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_{M_1M_2}+\int_{M_2M_3}+\cdots+\int_{M_{n-1}M_n}+\int_{M_nM_1}\right)x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\cdots\\&\quad+(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})+(x_ny_1-x_1y_n)].\end{aligned}$$

6 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关,并计算积分值:

(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$;　　(2) $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$;

(3) $\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)\mathrm{d}x+(x^2-4xy^3)\mathrm{d}y$.

【解】 (1) 令 $P=x+y,Q=x-y$,则 $\frac{\partial P}{\partial y}=1,\frac{\partial Q}{\partial x}=1\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,

该曲线积分与路径无关.取点 $C(2,1)$,并取积分路径为折线 ACB(如图(1)),则

$$\overline{AC}:y=1,1\leqslant x\leqslant 2;\quad \overline{CB}:x=2,1\leqslant y\leqslant 3.$$

所以
$$\begin{aligned}\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y&=\int_{\overline{AC}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{\overline{CB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\int_1^2(x+1)\mathrm{d}x+\int_1^3(2-y)\mathrm{d}y=\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

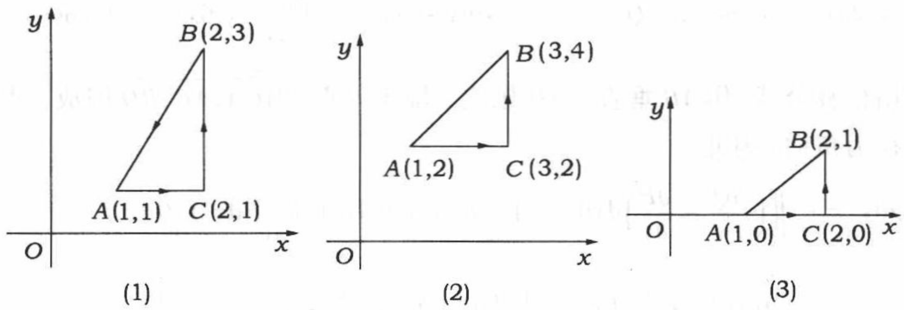
(2) 令 $P=6xy^2-y^3,Q=6x^2y-3xy^2$,则 $\frac{\partial P}{\partial y}=12xy-3y^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$,

故该积分与路径无关,取点 $C(3,2)$,并选积分路径为折线 ACB,如图(2) 所示.则

$$\overline{AC}:y=2,1\leqslant x\leqslant 3,\quad \overline{CB}:x=3,2\leqslant y\leqslant 4.$$

所以 $\int_{(1,2)}^{(3,4)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

$$= \int_{\overline{AC}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{\overline{CB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_1^3 (24x - 8)\mathrm{d}x + \int_2^4 (54y - 9y^2)\mathrm{d}y = 236.$$



第 6 题图

(3) 令 $P = 2xy - y^4 + 3, Q = x^2 - 4xy^3$,则 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x - 4y^3 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

该积分与路径无关. 取点 $C(2,0)$,并取积分路径为折线 ACB,如图(3) 所示. 此时

$$\overline{AC}: y = 0, 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \overline{CB}: x = 2, 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

所以 $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)\mathrm{d}x + (x^2 - 4xy^3)\mathrm{d}y$

$$= \int_{\overline{AC}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{\overline{CB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_1^2 3\mathrm{d}x + \int_0^1 (4 - 8y^3)\mathrm{d}y = 5.$$

7 利用格林公式,计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L (2x - y + 4)\mathrm{d}x + (5y + 3x - 6)\mathrm{d}y$,其中 L 为三顶点 $(0,0)$, $(3,0)$ 及 $(3,2)$ 的三角形正向边界;

(2) $\oint_L (x^2 y\cos x + 2xy\sin x - y^2 \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (x^2 \sin x - 2y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y$,其中 L 为正向星形线 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} (a > 0)$;

(3) $\int_L (2xy^3 - y^2\cos x)\mathrm{d}x + (1 - 2y\sin x + 3x^2 y^2)\mathrm{d}y$,其中 L 为抛物线 $2x = \pi y^2$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ 的一段弧;

(4) $\int_L (x^2 - y)\mathrm{d}x - (x + \sin^2 y)\mathrm{d}y$,其中 L 是在圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

【解】 (1) 令 $P = 2x - y + 4, Q = 5y + 3x - 6$,则 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3$. 由格林公式知

$$\oint_L (2x - y + 4)\mathrm{d}x + (5y + 3x - 6)\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 12.$$

(2) 令 $P = x^2 y\cos x + 2xy\sin x - y^2\mathrm{e}^x, Q = x^2\sin x - 2y\mathrm{e}^x \Rightarrow$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2\cos x + 2x\sin x - 2y\mathrm{e}^x = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

由格林公式知

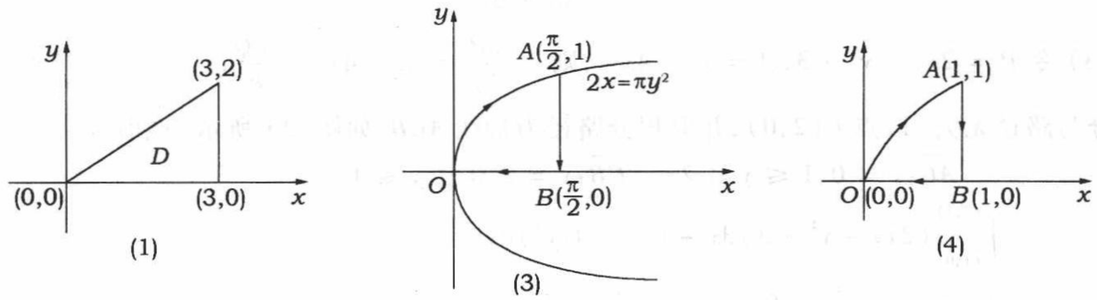
$$\oint_L (x^2y\cos x + 2xy\sin x - y^2e^x)dx + (x^2\sin x - 2ye^x)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0.$$

(3) 令 $P = 2xy^3 - y^2\cos x$, $Q = 1 - 2y\sin x + 3x^2y^2$,则$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 - 2y\cos x = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

为了能利用格林公式,作 AB 垂直于 Ox 轴交 x 轴于 B 点,则$\overset{\frown}{OA}$,$\overline{AB}$,$\overline{BO}$ 围成一封闭区域 D,并注意到积分路径为负向. 因此

$$\int_L Pdx + Qdy = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \int_{\overline{OB}} Pdx + Qdy + \int_{\overline{BA}} Pdx + Qdy$$

$$= -\iint_D 0dxdy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dx + \int_0^1 \left(1 - 2y + \frac{3}{4}\pi^2y^2\right)dy = \frac{\pi^2}{4}.$$



第 7 题图

(4) 令 $P = x^2 - y$, $Q = -x - \sin^2 y$,则$\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

为了能利用格林公式,作 AB 垂直于 Ox 轴且交 x 轴于 B,于是$\overset{\frown}{OA}$,$\overline{AB}$,$\overline{BO}$ 围成一封闭区域,并注意到积分路径为负向. 因此

$$\int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy$$

$$= -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \int_{\overline{OB}} Pdx + Qdy + \int_{\overline{BA}} Pdx + Qdy$$

$$= -\iint_D 0 \cdot dxdy + \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 (-1 - \sin^2 y)dy = \frac{1}{4}\sin 2 - \frac{7}{6}.$$

8 验证下列 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分,并求这样的一个 $u(x,y)$:

(1) $(x + 2y)dx + (2x + y)dy$;　　(2) $2xydx + x^2dy$;

(3) $4\sin x\sin 3y\cos xdx - 3\cos 3y\cos 2xdy$;

(4) $(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy$;

(5) $(2x\cos y + y^2\cos x)dx + (2y\sin x - x^2\sin y)dy$.

【解】 (1) $P = x + 2y$, $Q = 2x + y$,则 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

故 $(x + 2y)dx + (2x + y)dy$ 为全微分. 又因为

$$(x + 2y)dx + (2x + y)dy = \frac{1}{2}d(x^2) + \frac{1}{2}d(y^2) + 2(ydx + xdy)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)+2\mathrm{d}(xy)=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+2xy\right),$$

所以原函数 $u(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+2xy+C$.

(2) 令 $P=2xy, Q=x^2$,则 $\quad \frac{\partial P}{\partial y}=2x=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

$\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在整个 xOy 面内是连续且相等的,因此,$2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$ 是全微分.又

$$2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=y\mathrm{d}(x^2)+x^2\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x^2y),$$

故所求原函数 $\quad u(x,y)=x^2y+C$.

(3) 令 $P=4\sin x\sin 3y\cos x, Q=-3\cos 3y\cos 2x$,则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6\cos 3y\sin 2x=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在整个 xOy 面内是连续且相等的,因此,$4\sin x\cos x\sin 3y\mathrm{d}x-3\cos 3y\cos 2x\mathrm{d}y$ 是全微分.又

$$\begin{aligned}&4\sin x\sin 3y\cos x\mathrm{d}x-3\cos 3y\cos 2x\mathrm{d}y\\&=\sin 3y\mathrm{d}(-\cos 2x)-\cos 2x\mathrm{d}(\sin 3y)=\mathrm{d}(-\sin 3y\cos 2x),\end{aligned}$$

故所求原函数 $u(x,y)=-\sin 3y\cos 2x+C$.

(4) 令 $P=3x^2y+8xy^2, Q=x^3+8x^2y+12ye^y$,则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+16xy=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

故 $(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+8x^2y+12ye^y)\mathrm{d}y$ 是全微分.又因

$$\begin{aligned}&(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+8x^2y+12ye^y)\mathrm{d}y\\&=y\mathrm{d}(x^3)+4y^2\mathrm{d}(x^2)+x^3\mathrm{d}y+4x^2\mathrm{d}(y^2)+12\mathrm{d}(ye^y-e^y)\\&=\mathrm{d}(x^3y+4x^2y^2+12e^y(y-1)),\end{aligned}$$

所求原函数为 $u(x,y)=x^3y+4x^2y^2+12e^y(y-1)+C$.

(5) 令 $P=2x\cos y+y^2\cos x, Q=2y\sin x-x^2\sin y$,则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y\cos x-2x\sin y=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

故 $(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$ 是全微分.又

$$\begin{aligned}&(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y\\&=\cos y\mathrm{d}(x^2)+y^2\mathrm{d}(\sin x)+\sin x\mathrm{d}(y^2)+x^2\mathrm{d}(\cos y)=\mathrm{d}(x^2\cos y+y^2\sin x),\end{aligned}$$

所以原函数为 $u(x,y)=x^2\cos y+y^2\sin x+C$.

9 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X=x+y^2, Y=2xy-8$,该变力确定了一个力场.证明质点在此场内移动时,场力所做的功与路径无关.

【证】 设质点在此力场内沿着曲线 L 移动且起点为 (x_0,y_0),终点为 (x,y),则场力所做的功为

$$W=\int_L X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=\int_L(x+y^2)\mathrm{d}x+(2xy-8)\mathrm{d}y.$$

若令 $\quad P=x+y^2, Q=2xy-8$,则 $\quad \frac{\partial P}{\partial y}=2y=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

因$\dfrac{\partial P}{\partial y},\dfrac{\partial Q}{\partial x}$在全平面内相等且为连续函数，故曲线积分与路径无关．这意味着质点在此力场内移动时，场力所做的功与路径无关．

10 判别下列方程中哪些是全微分方程？对于全微分方程，求出它的通解．

(1) $(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^2)\mathrm{d}y=0$；　　(2) $(a^2-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y=0$；

(3) $\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y=0$；　　(4) $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$；

(5) $(x^2-y)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$；　　(6) $y(x-2y)\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=0$；

(7) $(1+\mathrm{e}^{2\theta})\mathrm{d}\rho+2\rho\mathrm{e}^{2\theta}\mathrm{d}\theta=0$；　　(8) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=0$．

【解】 (1) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=12xy=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，这是全微分方程．取 $x_0=y_0=0$，所求通解为

$$C=\int_0^x(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+\int_0^y4y^2\mathrm{d}y=x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3.$$

(2) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2(x+y)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，该方程是全微分方程，取$(x_0,y_0)=(0,0)$，则其通解为

$$C=\int_0^xa^2\mathrm{d}x-\int_0^y(x+y)^2\mathrm{d}y=a^2x-x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3.$$

(3) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，该方程是全微分方程．所求通解为

$$C=\int_0^x\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+\int_0^y(-2y)\mathrm{d}y=x\mathrm{e}^y-y^2.$$

(4) 方程变形为　$(\sin y-y\sin x)\mathrm{d}x+(x\cos y+\cos x)\mathrm{d}y=0$．

由于$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\cos y-\sin x=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，该微分方程是全微分方程，所求通解为　$x\sin y+y\cos x=C$．

(5) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，该方程是全微分方程．故其通解为　$\dfrac{1}{3}x^3-xy=C$．

(6) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=x-4y,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2x,\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故该方程不是全微分方程．

(7) $\dfrac{\partial}{\partial\theta}(1+\mathrm{e}^{2\theta})=2\mathrm{e}^{2\theta}=\dfrac{\partial}{\partial\rho}(2\rho\mathrm{e}^{2\theta})$，该方程是全微分方程，故通解为

$$C=\int_0^\rho(1+\mathrm{e}^{2\theta})\mathrm{d}\rho=\rho+\rho\mathrm{e}^{2\theta}.$$

(8) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2y,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=y,\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以该方程不是全微分方程．

11 确定常数λ，使在右半面 $x>0$ 上的向量 $\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^\lambda\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$．

【解】 令 $P(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda$，　$Q(x,y)=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$，则 $\boldsymbol{A}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 在单连通区域右半平面 $x>0$ 上为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度 $\Leftrightarrow P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 $x>0$ 上 $\exists$ 原函数 $u(x,y)$　$\Leftrightarrow$　$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y},x>0$．

此即　$-2x(x^4+y^2)^\lambda-\lambda x^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot4x^3=2x(x^4+y^2)^\lambda+2\lambda xy(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot2y.$

$\Leftrightarrow$　$4x(x^4+y^2)^\lambda(1+\lambda)=0.$　$\Leftrightarrow$　$\lambda=-1.$

取 $\lambda=-1$ 后，则

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \frac{2xy\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y}{x^4 + y^2} = \frac{y\mathrm{d}x^2 - x^2\mathrm{d}y}{x^4\left[1 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2\right]} = \frac{-\mathrm{d}\left(\frac{y}{x^2}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2} = -\mathrm{d}\arctan\frac{y}{x^2}.$$

因此 $$u(x,y) = -\arctan\frac{y}{x^2} + C,\text{其中 } C \text{ 为 } \forall \text{ 常数}.$$

习题 11－4　对面积的曲面积分

1 设有一分布着质量的曲面 Σ,在点 (x,y,z) 处它的面密度为 $\mu(x,y,z)$,用对面积的曲面积分表示这曲面对于 x 轴的转动惯量.

【解】 设想将 Σ 分成 n 小块,取出其中任意一块记作 $\mathrm{d}S$(其面积也记作 $\mathrm{d}S$),(x,y,z) 为 $\mathrm{d}S$ 上一点,则 $\mathrm{d}S$ 对 x 轴的转动惯量近似等于 $\mathrm{d}I_x = (y^2 + z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S$.

以此作为转动惯量元素并积分,即得 Σ 对 x 轴的转动惯量为 $I_x = \iint\limits_{\Sigma}(y^2 + z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S$.

2 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 是由 Σ_1 和 Σ_2 组成的.

【证】 由于 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上可积,故不论把 Σ 如何分割,积分和的极限总是不变的.因此在分割 Σ 时,可以使 Σ_1 和 Σ_2 的公共边界曲线永远作为一条分割线.这样,$f(x,y,z)$ 在 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ 上的积分和等于 Σ_1 上的积分和加上 Σ_2 上的积分和,记为

$$\sum_{(\Sigma_1+\Sigma_2)} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i = \sum_{(\Sigma_1)} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i + \sum_{(\Sigma_2)} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

令 $\lambda = \max\{\Delta S_i \text{ 的直径}\} \to 0$,上式两端同时取极限,即得

$$\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

3 当 Σ 是 xOy 面内的一个闭区域时,曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 与二重积分有什么关系?

【解】 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时,Σ 的方程为 $z = 0$,因此在 Σ 上取值的 $f(x,y,z)$ 恒为 $f(x,y,0)$,且 $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

又 Σ 在 xOy 面上的投影区域即为 Σ 自身,因此 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$,其中 Σ 是抛物面 $z = 2 - (x^2 + y^2)$ 在 xOy 面上方的部分,$f(x,y,z)$ 分别如下:

(1) $f(x,y,z) = 1$;　　(2) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$;　　(3) $f(x,y,z) = 3z$.

【解】 设 D 是 Σ 在 xOy 平面上的投影区域,则其边界方程为:$x^2 + y^2 = 2, z = 0$.由 $z = 2 - (x^2 + y^2)$ 得 $z_x = -2x, z_y = -2y$,故　$I = \iint\limits_{D} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(1) 当 $f(x,y,z) = 1$ 时， $I = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}r\mathrm{d}r = \frac{13}{3}\pi$.

(2) 当 $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ 时，

$$I = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r\mathrm{d}r = \frac{149}{30}\pi.$$

(3) 当 $f(x,y,z) = 3z$ 时，

$$I = \iint\limits_D 3[2 - (x^2 + y^2)] \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} 3(2 - r^2) \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{111}{10}\pi.$$

5 计算 $\iint\limits_\Sigma (x^2 + y^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是：

(1) 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1$ 所围成的区域的整个边界曲面；

(2) 锥面 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ 被平面 $z = 0$ 和 $z = 3$ 所截的部分.

【解】 (1) Σ 由 Σ_1 与 Σ_2 组成，即 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$，其中

$$\Sigma_1 : z = 1 \quad (x^2 + y^2 \leqslant 1), \quad \Sigma_2 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leqslant z \leqslant 1).$$

对于 $\Sigma_1 : z = 1 \quad (x^2 + y^2 \leqslant 1) \Rightarrow \mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y, D_{xy} : x^2 + y^2 \leqslant 1$，于是有

$$\iint\limits_{\Sigma_1} (x^2 + y^2)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}.$$

对于 $\Sigma_2 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leqslant z \leqslant 1) \Rightarrow \mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D_{xy} : x^2 + y^2 \leqslant 1$，

于是有

$$\iint\limits_{\Sigma_2} (x^2 + y^2)\mathrm{d}S = \sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

故

$$\iint\limits_\Sigma (x^2 + y^2)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_1} (x^2 + y^2)\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Sigma_2} (x^2 + y^2)\mathrm{d}S = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\pi.$$

(2) Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy} : x^2 + y^2 \leqslant 3$，由于 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$，所以有

$$z_x = \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z_y = \frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \mathrm{d}S = \sqrt{1 + \frac{3x^2}{x^2 + y^2} + \frac{3y^2}{x^2 + y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故 $\iint\limits_\Sigma (x^2 + y^2)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2)2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}} r^3\mathrm{d}r = 9\pi$.

6 计算下列对面积的曲面积分：

(1) $\iint\limits_\Sigma \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限中的部分；

(2) $\iint\limits_\Sigma (2xy - 2x^2 - x + z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $2x + 2y + z = 6$ 在第一卦限中的部分；

(3) $\iint\limits_\Sigma (x + y + z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上 $z \geqslant h \quad (0 < h < a)$ 的部分；

(4) $\iint\limits_\Sigma (xy + yz + zx)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截得的部分.

【解】 (1) Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy} : x \geqslant 0, y \geqslant 0, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leqslant 1$，由于 $z = 4 - 2x -$

$\frac{4}{3}y$, $dS=\sqrt{1+4+\left(\frac{4}{3}\right)^2}dxdy=\frac{1}{3}\sqrt{61}dxdy$，于是有

$$\iint_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dS=\iint_{D_{xy}}\left(4-2x-\frac{4}{3}y+2x+\frac{4}{3}y\right)\frac{1}{3}\sqrt{61}dxdy$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{61}\iint_{D_{xy}}dxdy=\frac{4}{3}\sqrt{61}\times\frac{1}{2}\times 2\times 3=4\sqrt{61}.$$

(2) Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}:x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 3$，由于 $z=6-2x-2y$，$dS=\sqrt{1+4+4}dxdy=3dxdy$，从而有

$$\iint_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)dS$$

$$=\iint_{D_{xy}}(2xy-2x^2-x+6-2x-2y)3dxdy$$

$$=3\int_0^3dx\int_0^{3-x}(6-3x-2x^2+2xy-2y)dy$$

$$=3\int_0^3[(6-3x-2x^2)(3-x)+(x-1)(3-x)^2]dx=-\frac{27}{4}.$$

(3) 由于 Σ 关于 yOz 平面及 zOx 平面都是对称的，再注意到被积函数中的前两项，第一项是关于 x 的奇函数，第二项是关于 y 的奇函数，故 $\iint_{\Sigma}xdS=0$， $\iint_{\Sigma}ydS=0$.

由 $z=\sqrt{a-x^2-y^2}$，可得 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$.

Σ 在 xOy 平面上的投影域为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant a^2-h^2$，从而有

原式 $=\iint_{\Sigma}zdS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\iint_{D_{xy}}dxdy=\pi a(a^2-h^2)$.

(4) 由于 Σ 关于 zOx 平面对称，而 xy 与 yz 都是关于 y 的奇函数，由对称性知

$$\iint_{\Sigma}xydS=0,\quad \iint_{\Sigma}yzdS=0.$$

于是 $\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS=\iint_{\Sigma}zxdS$.

由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 可得 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}dxdy$，而 Σ 在 xOy 平面上的投影域为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 2ax$，故

$$\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS=\iint_{\Sigma}zxdS=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\cos\theta dr=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta$$

$$=8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

7 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量，此壳的面密度为 $\mu=z$.

【解】 设所求曲面 Σ 的质量为 M，Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 2$. $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$. 从而有

$$M=\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}r^3\sqrt{1+r^2}\mathrm{d}r=\pi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+r^2}\mathrm{d}r$$

$$\xlongequal{\text{令 }t=\sqrt{1+r^2}}\pi\int_1^{\sqrt{3}}(t^2-1)t^2\mathrm{d}t=\frac{4\pi}{5}\sqrt{3}+\frac{2\pi}{15}.$$

8 求面密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动惯量.

【解】 $$I_z=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu_0\mathrm{d}S=\mu_0\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\mu_0\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\mu_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{a\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho\xlongequal{\rho=a\sin t}2\pi a\mu_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3\sin^3 t}{a\cos t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t$$

$$=2\pi a^4\mu_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\mathrm{d}t=2\pi a^4\mu_0\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\pi a^4\mu_0.$$

习题 11 - 5　对坐标的曲面积分

1 按对坐标的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma}[P_1(x,y,z)\pm P_2(x,y,z)]\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}P_1(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\pm\iint_{\Sigma}P_2(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【证】 把 Σ 任意分成 n 块小曲面 ΔS_i(其面积也记为 ΔS_i),ΔS_i 在 yOz 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{yz}$. 在 ΔS_i 上任意取定一点 (ξ_i,η_i,ζ_i). 设 λ 是各小块曲面的直径的最大值,则

$$\iint_{\Sigma}[P_1(x,y,z)\pm P_2(x,y,z)]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\pm P_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)](\Delta S_i)_{yz}$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}\pm\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$=\iint_{\Sigma}P_1(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\pm\iint_{\Sigma}P_2(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

2 当 Σ 为 xOy 平面内的一个闭区域时,曲面积分 $\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与二重积分有什么关系?

【答】 $\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}}R(x,y,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D_{xy} 为 Σ 在 xOy 平面上占有的区域,当 Σ 取上侧时,等式右端取正号,取下侧时,取负号.

3 计算下列对坐标的曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧;

(2) $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧;

(3) $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $f(x,y,z)$ 为连续连数,Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧;

(4) $\oint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,其中 Σ 是平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

【解】 (1) 由于 $\Sigma: z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$(取下侧),$\Sigma$ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant R^2$,于是有

$$\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{采用极坐标并利用二重积分对称性}}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R\sin^2\theta\cos^2\theta\sqrt{R^2-r^2}\cdot r^5\mathrm{d}r$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}\mathrm{d}r\xlongequal{\text{令 } r=R\sin t}\frac{2}{105}\pi R^7.$$

(2) 曲面 Σ 垂直于 xOy 平面,故 $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 对于 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}y$($\Sigma$ 取前侧)及 $\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$($\Sigma$ 取右侧).这两个曲面积分,注意到轮换对称性知 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,因此只需计算 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 即可.

$\Sigma: x=\sqrt{1-y^2}\ (0\leqslant y<1, 0\leqslant z\leqslant 3)$ 取前侧,Σ 在 yOz 平面上的投影区域为 $D_{yz}: 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 3$,于是

$$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\pi.$$

故
$$\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{3}{2}\pi.$$

(3) 在 Σ 上,$z=1-x+y$. 由于 Σ 取上侧,故 Σ 在任一点处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\{-z_x,-z_y,1\}=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,-1,1\}.$$

由两类曲面积积分之间的联系,可得

$$\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma}[(f+x)\cos\alpha+(2f+y)\cos\beta+(f+x)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}[(f+x)-(2f+y)+(f+z)]\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\Sigma\text{的面积}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}.$$

(4) 在面 $x=0$、$y=0$ 和 $z=0$ 上,积分值均为零,因此只需计算在 $\Sigma': x+y+z=1$(取上侧)

上的积分值(如图)：

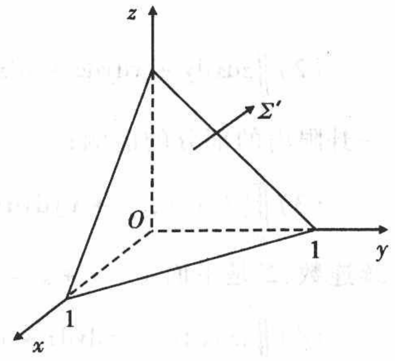
$$\iint_{\Sigma'} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} x(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y = \frac{1}{24},$$

由被积函数和积分曲面关于积分变量的对称性,可得

$$\iint_{\Sigma'} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma'} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma'} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{24},$$

因此 $\displaystyle\oiint_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$



第 3 题图

4 把对坐标的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化成对面积的曲面积分,其中

(1) Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限的部分的上侧；

(2) Σ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方部分的上侧.

【解】 (1) 显然平面片 Σ:$3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{3,2,2\sqrt{3}\}$(依题意取 $\boldsymbol{n}$ 的方向朝上),于是 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦是 $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{3^2+2^2+(2\sqrt{3})^2}} = \dfrac{3}{5}$,$\cos\beta = \dfrac{2}{5}$,$\cos\gamma = \dfrac{2}{5}\sqrt{3}$,故

$$原式 = \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma}\frac{1}{5}(3P+2Q+2\sqrt{3}R)\mathrm{d}S.$$

(2) 令 $F(x,y,z)=z+x^2+y^2-8$,于是曲面 Σ 上任意点 (x,y,z) 处的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{2x,2y,1\}$(依题设取 $\boldsymbol{n}$ 的方向朝上),从而 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2x}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}},\quad \cos\beta = \frac{2y}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}},\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}},$$

故 $$原式 = \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma}\frac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}\mathrm{d}S.$$

习题 11－6 高斯公式 通量与散度

1 利用高斯公式计算曲面积分：

(1) $\displaystyle\oiint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为平面 $x=0,y=0,z=0,x=a,y=a,z=a$ 所围成的立体的表面的外侧；

(2) $\displaystyle\oiint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧；

(3) $\displaystyle\oiint_{\Sigma} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为上半球体 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,$x^2+y^2\leqslant a^2$ 的表面外侧；

(4) $\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是介于 $z = 0$ 和 $z = 3$ 之间的圆柱体 $x^2 + y^2 \leqslant 9$ 的整个表面的外侧;

(5) $\oiint\limits_{\Sigma} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z - y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$ 所围成的立方体的全表面的外侧.

【解】 (1) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = 2\iiint\limits_{\Omega}(x + y + z)\mathrm{d}V$

$$\xlongequal{\text{对称性}} 6\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V = 6\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a z\mathrm{d}z = 6 \cdot a \cdot a \cdot \frac{a^2}{2} = 3a^4.$$

(2) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = 3\iiint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V$

$$\xlongequal{\text{球面坐标}} 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2 \cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r = 3 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

(3) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega}(z^2 + x^2 + y^2)\mathrm{d}V$

$$\xlongequal{\text{球面坐标}} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2 \cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{2}{5}\pi a^5.$$

(4) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$

$$= \iiint\limits_{\Omega}(1 + 1 + 1)\mathrm{d}V = 3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V = 3 \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 81\pi.$$

(5) 原式 $= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega}(4z - 2y + y)\mathrm{d}V$

$$= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(4z - y)\mathrm{d}z = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(2 - y)\mathrm{d}y = \frac{3}{2}.$$

【注】 在计算上面的积分 $\iiint\limits_{\Omega}(4z - 2y + y)\mathrm{d}V$ 时,如果利用被积函数和积分区域关于积分变量的对称性,可知 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}V$,于是

$$\iiint\limits_{\Omega}(4z - 2y + y)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} 3z\mathrm{d}V = 3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 z\mathrm{d}z = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

从而可简化运算.

2 求下列向量 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 Σ 流向指定侧的通量:

(1) $\boldsymbol{A} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$,其中 Σ 为圆柱体 $x^2 + y^2 \leqslant a^2 (0 \leqslant z \leqslant h)$ 的全表面,流向外侧;

(2) $\boldsymbol{A} = (2x - z)\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} - xz^2\boldsymbol{k}$,其中 Σ 为立方体 $0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant a$ 的全表面,流向外侧;

(3) $\boldsymbol{A} = (2x + 3z)\boldsymbol{i} - (xz + y)\boldsymbol{j} + (y^2 + 2z)\boldsymbol{k}$,其中 Σ 是以点 $(3, -1, 2)$ 为球心,半径 $R = 3$ 的球面,流向外侧.

【解】 (1) $\Phi = \oiint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega}(0 + 0 + 0)\mathrm{d}V = 0.$

$$(2)\Phi = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(2x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x - xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{\Omega}(2+x^2-2xz)\mathrm{d}V = \int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a(2+x^2-2xz)\mathrm{d}z$$

$$= a\int_0^a(2a+ax^2-a^2x)\mathrm{d}x = a^3\left(2-\frac{a^2}{6}\right).$$

(3) 依题设得 Σ 的方程为 $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$,取外侧,于是由高斯公式得

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(2x+3z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(xz+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{\Omega}(2-1+2)\mathrm{d}V = 3\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V = 3\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^2 = 108\pi.$$

3 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度:

(1) $\boldsymbol{A}=(x^2+yz)\boldsymbol{i}+(y^2+xz)\boldsymbol{j}+(z^2+xy)\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{xy}\boldsymbol{i}+\cos(xy)\boldsymbol{j}+\cos(xz^2)\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{A}=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$.

【解】 由散度的定义 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 易得:

(1) $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=2(x+y+z)$;

(2) $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=y\mathrm{e}^{xy}-x\sin(xy)-2xz\sin(xz^2)$.

(3) $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0+x+x=2x$.

4 设 $u(x,y,z)$、$v(x,y,z)$ 是两个定义在闭区域 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数,$\frac{\partial u}{\partial n}$、$\frac{\partial v}{\partial n}$ 依次表示 $u(x,y,z)$、$v(x,y,z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数. 证明

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的整个边界曲面. 这个公式叫做**格林第二公式**.

【证】 由格林第一公式知:

$$\iiint_{\Omega}u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

在此公式中将函数 u 和 v 交换位置,得

$$\iiint_{\Omega}v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

将上面两个式子相减即得

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$

5 利用高斯公式推证阿基米德原理:浸没在液体中的物体所受液体的压力的合力(即浮力)的方向铅直向上、其大小等于这物体所排开的液体的重力.

【证】 取液面为 xOy 面,z 轴铅直向上. 设液体的密度为 ρ. 在物体表面 Σ 上取面积元素 $\mathrm{d}S$,$M(x,y,z)$ 为 $\mathrm{d}S$ 上的一点 $(z\leqslant 0)$,Σ 在点 M 处的外法线向量的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,则

dS 所受液体的压力在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量分别为

$$\rho z\cos\alpha dS,\quad \rho z\cos\beta daS,\quad \rho z\cos\gamma dS.$$

Σ 所受的液体的总压力在各坐标轴上的分量等于上列各分量元素在 Σ 上的积分. 由高斯公式可算得

$$F_x=\oiint_{\Sigma}\rho z\cos\alpha dS=\iiint_{\Omega}\frac{\partial(\rho z)}{\partial x}dV=\iiint_{\Omega}0dV=0;$$

$$F_y=\oiint_{\Sigma}\rho z\cos\beta dS=\iiint_{\Omega}\frac{\partial(\rho z)}{\partial y}dV=\iiint_{\Omega}0dV=0;$$

$$F_z=\oiint_{\Sigma}\rho z\cos\gamma dS=\iiint_{\Omega}\frac{\partial(\rho z)}{\partial z}dV=\iiint_{\Omega}\rho dV=\rho V,$$

(V 为 Ω 的体积),故合力 $\boldsymbol{F}=\rho V\boldsymbol{k}$,

此力的方向铅直向上,大小等于被物体排开的液体的重力.

习题 11－7 斯托克斯公式 环流量与旋度

1 试对曲面 $\Sigma: z=x^2+y^2, x^2+y^2\leqslant 1, P=y^2, Q=x, R=z^2$ 验证斯托克斯公式.

【解】 按右手法则,Σ 取上侧,Σ 的边界 Γ 为圆周 $x^2+y^2=1, z=1$,从 z 轴正向看去,取逆时针方向.

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x & z^2 \end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}(1-2y)dxdy=\iint_{D_{xy}}(1-2y)dxdy$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-2\rho\sin\theta)\rho d\rho=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{2}{3}\rho^3\sin\theta\right]_0^1 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin\theta\right)d\theta=\pi;$$

Γ 的参数方程可取为 $x=\cos t, y=\sin t, z=1$, t 从 0 变到 2π,故

$$\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\int_0^{2\pi}(-\sin^3 t+\cos^2 t)dt=\pi,$$

两者相等,斯托克斯公式得到验证.

2 利用斯托克斯公式,计算下列曲线积分:

(1) $\oint_{\Gamma}ydx+zdy+xdz$,其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$,若从 x 轴的正向看去,这圆周是取逆时针方向;

(2) $\oint_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$,其中 Γ 为椭圆 $x^2+y^2=a^2, \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1(a>0, b>0)$,若从 x 轴正向看去,这椭圆是取逆时针方向;

(3) $\oint_{\Gamma}3ydx-xzdy+yz^2dz$,其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2=2z, z=2$,若从 z 轴正向看去,这圆周是取逆时针方向;

(4) $\oint_{\Gamma} 2y\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y - z^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = 0$，若从 z 轴正向看去，这圆周是取逆时针方向．

【解】 (1) 取 Σ 为平面 $x + y + z = 0$ 的上侧被 Γ 所围成的部分，则 Σ 的面积为 πa^2，Σ 的单位法向量为 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$．由斯托克斯公式，

$$\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \mathrm{d}S = -\frac{3}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} \mathrm{d}S$$

$$= -\sqrt{3}\pi a^2.$$

(2) 由斯托克斯公式有

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y - z & z - x & x - y \end{vmatrix} = -2\iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 取为平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ 上由 Γ 所围部分的上侧，

Σ 在 yOz 平面上的投影区域为 $D_{yz}: \frac{y^2}{a^2} + \frac{(z-b)^2}{b^2} \leqslant 1$，其面积为 πab，

Σ 在 xOy 平面上的投影域为 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leqslant a^2$，其面积为 πa^2．

Σ 在 zOx 平面上的投影区域为一直线段，从而 $\iint_{\Sigma} \mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0$．

故 $\quad$ 原式 $= -2\left(\iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) = -2(\pi ab + \pi a^2) = -2\pi a(a+b)$．

(3) 取 Σ 为平面 $z = 2$ 上被 Γ 所围成部分的上侧，则由斯托克斯公式，有

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} (z^2 + x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - (z+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 Σ 在 yOz 平面上的投影区域为直线段，所以 $\iint_{\Sigma} (z^2 + x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$．

又 Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leqslant 4$，故

原式 $= \iint_{\Sigma} -(z+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} (2+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -5\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -20\pi$．

(4) 取 Σ 为平面 $z = 0$ 上被 Γ 所围部分的上侧，它在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leqslant 9$，故由斯托克斯公式，有

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9\pi.$$

3 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度：

(1) $\boldsymbol{A} = (2z-3y)\boldsymbol{i}+(3x-z)\boldsymbol{j}+(y-2x)\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{A} = (z+\sin y)\boldsymbol{i}-(z-x\cos y)\boldsymbol{j}$;

(3) $\boldsymbol{A} = x^2\sin y\,\boldsymbol{i}+y^2\sin(xz)\boldsymbol{j}+xy\sin(\cos z)\boldsymbol{k}$.

【解】 由旋度的定义 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ 分别计算，可得：

$$(1)\ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z-3y & 3x-z & y-2x \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}.$$

$$(2)\ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z+\sin y & -(z-x\cos y) & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}.$$

$$(3)\ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2\sin y & y^2\sin(xz) & xy\sin(\cos z) \end{vmatrix}$$

$$= [x\sin(\cos z)-xy^2\cos(xz)]\boldsymbol{i}-y\sin(\cos z)\boldsymbol{j}+[y^2z\cos(xz)-x^2\cos y]\boldsymbol{k}.$$

4 利用斯托克斯公式把曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 化为曲线积分，并计算积分值，其中 $\boldsymbol{A}$，Σ 及 $\boldsymbol{n}$ 分别如下：

(1) $\boldsymbol{A} = y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量；

(2) $\boldsymbol{A} = (y-z)\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}-xz\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为立方体 $\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2,0\leqslant z\leqslant 2\}$ 的表面外侧去掉 xOy 面上的那个底面，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量.

【解】 (1) Σ 的正向边界曲线 Γ 为 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=1$，从 z 轴正向看去 Γ 取逆时针方向，Γ 的参数方程为 $x=\cos t, y=\sin t, z=0$，t 从 0 变到 2π. 由斯托克斯公式，

$$\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z = \oint_{\Gamma}y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}[\sin^2 t\cdot(-\sin t)+\cos t\cdot\sin t\cdot\cos t]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi}(1-2\cos^2 t)\mathrm{d}\cos t = 0.$$

(2) Σ 的边界曲线 Γ 为 xOy 面上由直线 $x=0, y=0, x=2, y=2$ 所围成的正方形的边界，从 z 轴正向看去取逆时针方向. 由斯托克斯公式，

$$\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z = \oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y-xz\mathrm{d}z\ (\text{代入 } z=0)$$

$$= \oint_{\Gamma}y\mathrm{d}x = \int_2^0\mathrm{d}x = -4.$$

5 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿闭曲线 Γ(从 z 轴正向看依逆时针方向)的环流量:

(1) $\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$($c$ 为常量),其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2=1,z=0$;

(2) $\boldsymbol{A}=(x-z)\boldsymbol{i}+(x^3+yz)\boldsymbol{j}-3xy^2\boldsymbol{k}$,其中 Γ 为圆周 $z=2-\sqrt{x^2+y^2},z=0$.

【解】 环流量计算公式为 $\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$.

(1) Γ 的参数方程为 $x=\cos t,y=\sin t,z=0$,从 0 变到 2π,于是所求环流量为

$$\oint \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\oint_\Gamma -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}[(-\sin t)(-\sin t)+\cos t\cdot\cos t]\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.$$

(2) 将圆周 $z=2-\sqrt{x^2+y^2},z=0$ 化为参数方程为 $x=2\cos\theta,y=2\sin\theta,z=0$,故

$$\oint_\Gamma (x-z)\mathrm{d}x+(x^3+yz)\mathrm{d}y-3xy^2\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}[2\cos\theta\cdot(-2\sin\theta)+8\cos^3\theta\cdot 2\cos\theta]\mathrm{d}\theta=0+16\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=12\pi.$$

6 证明 $\mathbf{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}+\mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}$.

【证】 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}.$$

故 $$\mathbf{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ a_x+b_x&a_y+b_y&a_z+b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}+\mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}.$$

7 设 $u=u(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数,求 $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}u)$.

【解】 $\mathbf{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$,

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}u)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}&\frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=0\cdot\boldsymbol{i}+0\cdot\boldsymbol{j}+0\cdot\boldsymbol{k}=\mathbf{0}.$$

【注】 由此题得结论"梯度场无旋".

总习题十一

1 填空:

(1) 第二类曲线积分 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 化成第一类曲线积分是________,其中 α、β、γ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x,y,z) 处的________的方向角;

(2) 第二类曲面积分$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$化成第一类曲面积分是________，其中$\alpha$、$\beta$、$\gamma$为有向曲面$\Sigma$在点$(x,y,z)$处的________的方向角.

【解】 (1)$\int_{\Gamma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$；切向量.

(2)$\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$；法向量.

2 设曲面Σ是上半球面：$x^2 + y^2 + z^2 = R^2(z \geqslant 0)$，曲面$\Sigma_1$是曲面$\Sigma$在第一卦限中的部分，则

(A)$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$.　　(B)$\iint_{\Sigma} y\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$.

(C)$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$.　　(D)$\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}S$.

【解】 应选(C).(A)不对.由于Σ关于yOz面对称，被积函数x关于x是奇函数，所以$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}S = 0$.但在$\Sigma_1$上，被积函数$x$连续且大于零，所以$\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S > 0$.因此$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}S \neq 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$.类似可说明(B)和(D)不对.再说明(C)正确.由于Σ关于yOz面和zOx面均对称，被积函数z关于x和y均为偶函数，故$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} z\mathrm{d}S$；而在$\Sigma_1$上，字母$x$、$y$、$z$是对称的.故$\iint_{\Sigma_1} z\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$，因此有$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$.

3 计算下列曲线积分：

(1)$\oint_L \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}s$，其中$L$为圆周$x^2 + y^2 = ax$；

(2)$\int_{\Gamma} z\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为曲线$x = t\cos t, y = t\sin t, z = t(0 \leqslant t \leqslant t_0)$；

(3)$\int_L (2a - y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$，其中$L$为摆线$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$上对应$t$从0到$2\pi$的一段弧；

(4)$\int_{\Gamma}(y^2 - z^2)\mathrm{d}x + 2yz\mathrm{d}y - x^2\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$是曲线$x = t, y = t^2, z = t^3$上由$t_1 = 0$，到$t_2 = 1$的一段弧；

(5)$\int_L (\mathrm{e}^x\sin y - 2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - 2)\mathrm{d}y$，其中$L$为上半圆周$(x - a)^2 + y^2 = a^2, y \geqslant 0$，沿逆时针方向；

(6)$\oint_{\Gamma} xyz\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$是用平面$y = z$截球面$x^2 + y^2 + z^2 = 1$所得的截痕，从$z$轴的正向看去，沿逆时针方向.

【解】 (1)L的极坐标方程为$\rho = a\cos\theta\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$，　$\mathrm{d}S = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\mathrm{d}\theta = a\mathrm{d}\theta$，

因此　$\oint_L \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta \cdot a\mathrm{d}\theta = 2a^2$.

(2)$\int_{\Gamma} z\mathrm{d}s = \int_0^{t_0} t\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{t_0} t\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{t_0}\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}(2+t^2)$$

$$= \frac{1}{3}(2+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{t_0} = \frac{1}{3}[(2+t_0)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}].$$

(3) $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}[(2a-a+a\cos t)\cdot a(1-\cos t) + a(t-\sin t)\cdot a\sin t]\mathrm{d}t$

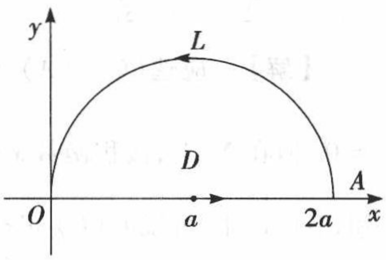
$$= a^2\int_0^{2\pi} t\sin t\mathrm{d}t = a^2[-t\cos t]_0^{2\pi} + a^2\int_0^{2\pi}\cos t\mathrm{d}t$$

$$= -2\pi a^2 + 0 = -2\pi a^2.$$

(4) $\int_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x + 2yz\mathrm{d}y - x^2\mathrm{d}z = \int_0^1[(t^4-t^6)\cdot 1 + 2t^2\cdot t^3\cdot 2t - t^2\cdot 3t^2]\mathrm{d}t$

$$= \int_0^1(3t^6-2t^4)\mathrm{d}t = \frac{1}{35}.$$

(5) 如图,添加有向线段 OA:$y=0$,x 从 0 变到 $2a$,则在由 L 与 OA 所围成的闭区域 D 上应用格林公式可得



第 3 题图

$$\int_{L+OA}(\mathrm{e}^x\sin y - 2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - 2)\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D(\mathrm{e}^x\cos y - \mathrm{e}^x\cos y + 2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi a^2,$$

于是 $\int_L(\mathrm{e}^x\sin y - 2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - 2)\mathrm{d}y$

$$= \pi a^2 - \int_{\overline{OA}}(\mathrm{e}^x\sin y - 2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - 2)\mathrm{d}y$$

$$= \pi a^2 - \int_0^{2a}(\mathrm{e}^x\sin 0 - 2\cdot 0)\mathrm{d}x = \pi a^2.$$

(6) 由 Γ 的一般方程 $\begin{cases} y = z, \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$ 可得 $x^2+2y^2=1$. 从而可令 $x=\cos t$, $y=\dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}$, $z=\dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}$, t 从 0 变到 2π,于是

$$\oint_\Gamma xyz\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\cos t\left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}.$$

4 计算下列曲面积分:

(1) $\iint_\Sigma \dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$,其中 Σ 是介于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$;

(2) $\iint_\Sigma (y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外侧;

(3) $\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧;

(4) $\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 的外侧.

【解】 (1) 将 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两片,Σ_1 为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$,Σ_2 为 $y=-\sqrt{R^2-x^2}$,Σ_1 和 Σ_2 在 zOx 面上的投影区域均为 $D_{zx}=\{(x,z)\mid 0\leqslant z\leqslant H,-R\leqslant x\leqslant R\}$,于是

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{D_{zx}}\frac{1}{R^2+z^2}\sqrt{1+\frac{(-x)^2}{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\int_0^H\frac{1}{R^2+z^2}\mathrm{d}z\cdot\int_{-R}^{R}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\right]_0^H\cdot\left[R\arcsin\frac{x}{R}\right]_{-R}^{R}=\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

又由于被积函数关于 y 是偶函数,积分曲面 Σ_1 和 Σ_2 关于 zOx 面对称,故

$$\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

由此得 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=2\pi\arctan\frac{H}{R}$.

(2) 添加辅助曲面 $\Sigma_1=\{(x,y,z)\mid z=h,x^2+y^2\leqslant h^2\}$,取上侧,则在由 Σ 和 Σ_1 所包围的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(y^2-z)}{\partial x}+\frac{\partial(z^2-x)}{\partial y}+\frac{\partial(x^2-y)}{\partial z}\right]\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}0\cdot\mathrm{d}V=0,$$

于是 $\displaystyle 原式=-\iint\limits_{\Sigma_1}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=-\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant h^2\}$.

在计算 $\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 时,由对称性易知 $\iint\limits_{D_{xy}}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,又 $\iint\limits_{D_{xy}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,故

$$\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{极坐标}}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}h^4.$$

从而得 $\displaystyle 原式=-\frac{\pi}{4}h^4$.

(3) 添加辅助曲面 $\Sigma_1=\{(x,y,z)\mid z=0,x^2+y^2\leqslant R^2\}$,取下侧,则在由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=3\cdot\frac{2\pi R^3}{3}=2\pi R^3,$$

于是 $\displaystyle 原式=2\pi R^3-\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi R^3-0=2\pi R^3$.

(4) 应用高斯公式计算.

添加辅助曲面 $\Sigma_3:x=0$(取后侧);$\Sigma_4:y=0$(取左侧),则有 $\iint\limits_{\Sigma_3}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_4}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

在由 Σ、Σ_3 和 Σ_4 所围成的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式,得

$$\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma+\Sigma_3+\Sigma_4} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(xyz)}{\partial z}\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} xy\mathrm{d}V = \iint_{D_{xy}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}z$$

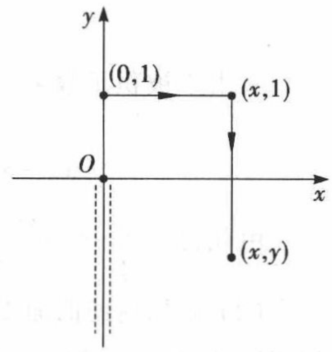
$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2}{15}.$$

5 证明:$\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$在整个$xOy$平面除去$y$的负半轴及原点的区域$G$内是某个二元函数的全微分,并求出一个这样的二元函数.

【证】 G为平面单连通域,在G内$P=\dfrac{x}{x^2+y^2}$,$Q=\dfrac{y}{x^2+y^2}$具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故$\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$在$G$内是某个二元函数$u(x,y)$的全微分.



第 5 题图

取折线积分路径$(0,1)\to(x,1)\to(x,y)$(如图),则

$$u(x,y) = \int_0^x \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1} + \int_1^y \frac{y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+y^2)\right]_1^y = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

6 设在半平面$x>0$内有力$\boldsymbol{F} = -\dfrac{k}{\rho^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$构成力场,其中$k$为常数,$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.证明在此力场中场力所做的功与所取的路径无关.

【证】 半平面$x>0$是单连通域.在此区域内,$P=-\dfrac{kx}{\rho^3}$,$Q=-\dfrac{ky}{\rho^3}$具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{3kxy}{\rho^5} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

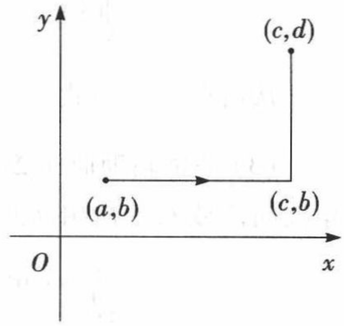
故在此区域内,场力$\boldsymbol{F}$沿曲线L所做的功,即 $\displaystyle\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -k\int_L \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\rho^3}$与路径无关.

7 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有一阶连续导数,L是上半平面$(y>0)$内的有向分段光滑曲线,其起点为(a,b),终点为(c,d),记

$$I = \int_L \frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\mathrm{d}y.$$

(1) 证明曲线积分I与路径无关;

(2) 当$ab=cd$时,求I的值.



第 7 题图

【解】 (1) 将I表为$I=\displaystyle\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$,因上半平面$y>0$是单连通区域,又

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y}+yf(xy)\right] = -\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[xf(xy)-\frac{x}{y^2}\right]=f(xy)+xyf'(xy)-\frac{1}{y^2},$$

即$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}(y>0)$,所以积分 I 在 $y>0$ 与路径无关.

(2) 由于 I 与路径无关,取特殊的一条积分路径:由(a,b) 到(c,b) 再到(c,d) 的折线段(见图),得

$$\begin{aligned}I&=\int_a^c P(x,b)\,\mathrm{d}x+\int_b^d Q(c,y)\,\mathrm{d}y\\&=\int_a^c\left[\frac{1}{b}+bf(bx)\right]\mathrm{d}x+\int_b^d\left[cf(cy)-\frac{c}{y^2}\right]\mathrm{d}y\\&=\frac{c-a}{b}+\int_{ab}^{cb}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{bc}^{cd}f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{c}{y}\bigg|_b^d\\&=\frac{c-a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.\end{aligned}$$

8 求均匀曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的质心的坐标.

【解】 设质心位置为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,由对称性可知质心位于 z 轴上,故 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$.

由于 $$\begin{aligned}\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S&=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\cdot\pi a^2=\pi a^3,\end{aligned}$$

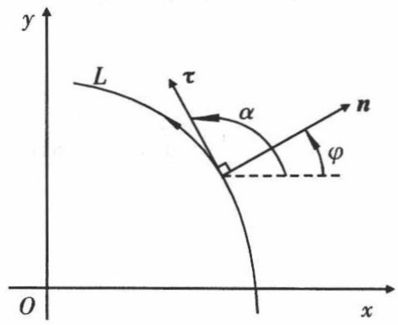
又 Σ 的面积 $A=2\pi a^2$,故 $\bar{z}=\dfrac{\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S}{A}=\dfrac{\pi a^3}{2\pi a^2}=\dfrac{a}{2}$,所求的质心为$\left(0,0,\dfrac{a}{2}\right)$.

9 设 $u(x,y)$,$v(x,y)$ 在闭区域 D 上都具有二阶连续偏导数,分段光滑的曲线 L 为 D 的正向边界曲线.证明:

(1) $\iint_D v\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D(\mathbf{grad}\,u\cdot\mathbf{grad}\,v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$;

(2) $\iint_D(u\Delta v-v\Delta u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$,

其中$\frac{\partial u}{\partial n}$、$\frac{\partial v}{\partial n}$ 分别是 u、v 沿 L 的外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数,符号 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为二维拉普拉斯算子.



第 9 题图

【证】 (1) 如图,$\boldsymbol{n}$ 为有向曲线 L 的外法线向量,$\boldsymbol{\tau}$ 为 L 的切线向量.设 x 轴到 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 的转角分别为 φ 和 α,则 $\alpha=\varphi+\frac{\pi}{2}$,且 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为 $\cos\varphi,\sin\varphi$;$\boldsymbol{\tau}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\sin\alpha$.

于是 $$\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\oint_L v(u_x\cos\varphi+u_y\sin\varphi)\,\mathrm{d}s$$

$$= \oint_L v(u_x \sin\alpha - u_y \cos\alpha)\,\mathrm{d}s$$

$$(\cos\alpha\mathrm{d}s = \mathrm{d}x, \sin\alpha\mathrm{d}s = \mathrm{d}y)$$

$$= \oint_L vu_x\mathrm{d}y - vu_y\mathrm{d}x \xlongequal{\text{格林公式}} \iint_D \left[\frac{\partial(vu_x)}{\partial x} - \frac{\partial(-vu_y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D [(u_x v_x + vu_{xx}) + (u_y v_y + vu_{yy})]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D v(u_{xx} + u_{yy})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D (u_x v_x + u_y v_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D (\mathbf{grad}\ u \cdot \mathbf{grad}\ v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

把上式右端第二个积分移到左端即得所要证明的等式.

(2) 在(1) 证得的等式中交换 u、v 的位置,可得

$$\iint_D u\,\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D (\mathbf{grad}\ v \cdot \mathbf{grad}\ u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_L u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s,$$

在此式的两端分别减去(1) 中等式的两端,即得所需证明的等式.

10 求向量 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 通过闭区域 $\Omega = \{(x,y,z)\mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ 的边界曲面流向外侧的通量.

【解】 通量 $\Phi = \oiint_\Sigma \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \oiint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_\Omega \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$

$$= \iiint_\Omega (1+1+1)\,\mathrm{d}V = 3\iiint_\Omega \mathrm{d}V = 3\cdot 1 = 3.$$

11 求力 $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ 沿有向闭曲线 Γ 所做的功,其中 Γ 为平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界,从 z 轴正向看去,沿顺时针方向.

【解】 利用斯托克斯公式计算. 取 Σ 为平面 $x + y + z = 1$ 的下侧被 Γ 所围的部分,则 Σ 在任一点处的单位法向量为 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,由斯托克斯公式得

$$\oint_\Gamma y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}\mathrm{d}S = \iint_\Sigma \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}S$$

$$= \sqrt{3}\iint_\Sigma \mathrm{d}S = \sqrt{3}\cdot \Sigma\text{ 的面积} = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

考研试题选解

1 已知平面区域 $D = \{(x,y)\mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$,$L$ 为 D 的正向边界. 试证:

(1) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$;(2) $\int_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x \geqslant 2\pi^2$.

【分析与证明一】 用格林公式把第二类曲线积分转化为二重积分.

(1) 由格林公式,有

$$左边曲线积分 = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(xe^{\sin y}) - \frac{\partial}{\partial y}(-ye^{-\sin x})\right]dxdy = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})dxdy,$$

$$右边曲线积分 = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x})dxdy.$$

因为区域 D 关于 $y = x$ 对称 $\Rightarrow$

$$\iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})dxdy \xlongequal{x与y互换} \iint_D (e^{\sin x} + e^{-\sin y})dxdy.$$

因此 $$\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \oint_L xe^{-\sin y}dy - ye^{\sin x}dx. \quad ①$$

(2) 由(1) 的结论,有

$$\int_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})dxdy = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin y})dxdy$$

$$\geqslant \iint_D 2\cdot\sqrt{e^{\sin y}\cdot e^{-\sin y}}dxdy = \iint_D 2dxdy = 2\pi^2.$$

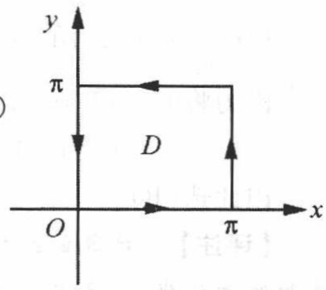
【分析与证明二】 直接把第二类曲线积分化为定积分(见图).

(1) $$左边曲线积分 = \int_0^{\pi} \pi e^{\sin y}dy - \int_{\pi}^{0} \pi e^{-\sin x}dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x} + e^{-\sin x})dx, \quad ②$$

$$右边曲线积分 = \int_0^{\pi} \pi e^{-\sin y}dy - \int_{\pi}^{0} \pi e^{\sin x}dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi}(e^{-\sin x} + e^{\sin x})dx.$$



第 1 题图

因此 ① 式成立.

(2) 注意 $e^{\sin x} + e^{-\sin x} \geqslant 2\sqrt{e^{\sin x}e^{-\sin x}} = 2$,由 ② 式 $\Rightarrow$

$$\int_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x} + e^{-\sin x})dx \geqslant \pi\int_0^{\pi}2dx = 2\pi^2.$$

2 设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分,则曲线积分 $\int_L xdy - 2ydx$ 的值为________.

【分析一】 已知 L 的参数方程 $x = \sqrt{2}\cos t$, $y = \sqrt{2}\sin t$, t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$. 直接代公式得

$$原积分 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sqrt{2}\cos t(\sqrt{2}\cos t) - 2\sqrt{2}\sin t(-\sqrt{2}\sin t)]dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}2dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt = \pi + 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi.$$

【分析二】 利用格林公式来计算. 由于 L 不是封闭曲线,添加辅助线 L_1(x 轴从 $\sqrt{2}$ 到 0 的一段) 与 L_2(y 轴上从 0 到 $\sqrt{2}$ 的一段). 正向曲线 $\Gamma = L \cup L_1 \cup L_2$ 围成区域 D,在 D 上用格林公式得

$$\int_\Gamma -2ydx + xdy = \iint_D [1 - (-2)]dxdy = 3\iint_D dxdy = \frac{3}{4}\pi(\sqrt{2})^2 = \frac{3}{2}\pi.$$

又易知 $\int_{L_1} -2y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$，$\int_{L_2} -2y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$，

因此，$\int_L x\mathrm{d}y - 2y\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\pi$.

3 设曲线 $L: f(x,y) = 1$（$f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数），过第 Ⅱ 象限内的点 M 和第 Ⅳ 象限内的点 N，Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧，则下列积分小于零的是

(A) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s$.　　(D) $\int_\Gamma f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y$.

【分析】 记点 M 与 N 的坐标分别为 (x_M, y_M)，(x_N, y_N)，如图.

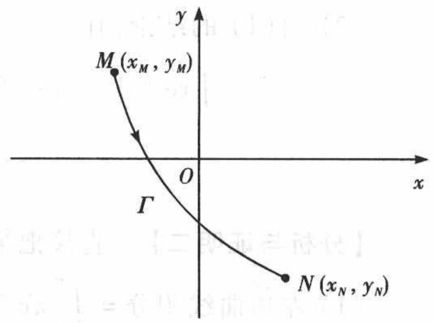
将 $f(x,y) = 1$ 代入被积表达式得

(A) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x = \int_\Gamma 1\mathrm{d}x = x_N - x_M > 0$，

(B) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}y = \int_\Gamma 1\mathrm{d}y = y_N - y_M < 0$，

(C) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\Gamma \mathrm{d}s = \Gamma$ 的弧长 > 0，

(D) $\int_\Gamma f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y = 0$.



第 3 题图

因为将 $f(x,y) = 1$ 求全微分得

$$f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

因此选(B).

【评注】 计算曲线积分（不论是第一类曲线积分还是第二类曲线积分）时，可以而且应该将曲线方程代入，于是立刻可将(A)、(B)、(C)化简. 而(D)的积分表达式为 $f(x,y)$ 的全微分，于是由原函数法可求得该曲线积分的值. 本题是一道基本概念题.

4 计算曲线积分 $\int_L \sin 2x\mathrm{d}x + 2(x^2-1)y\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi, 0)$ 的一段.

【解法一】 将曲线 L 的方程代入直接计算.

$$I = \int_L \sin 2x\mathrm{d}x - 2y\mathrm{d}y + \int_L 2x^2 y\mathrm{d}y = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x - y^2\right)\Bigg|_{(0,0)}^{(\pi,0)} + \int_0^\pi 2x^2\sin x\cos x\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\pi x^2\sin 2x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\mathrm{d}(\cos 2x) = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x\Bigg|_0^\pi + \int_0^\pi x\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\pi x\mathrm{d}(\sin 2x) = -\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2}x\sin 2x\Bigg|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{2}.$$

【解法二】 用格林公式. 曲线 L 不封闭，如图，添加辅助线 $\overline{AO}$ $(y = 0, x \in [\pi, 0])$，L 与 $\overline{AO}$ 围成 D，边界取负向（顺时针方向），则

$$\int_{\overline{AO}} \sin 2x\mathrm{d}x + 2(x^2-1)y\mathrm{d}y = \int_\pi^0 \sin 2x\mathrm{d}x = 0.$$

在 D 上用格林公式得

$$I = \int_L \sin 2x\mathrm{d}x + 2(x^2-1)y\mathrm{d}y$$

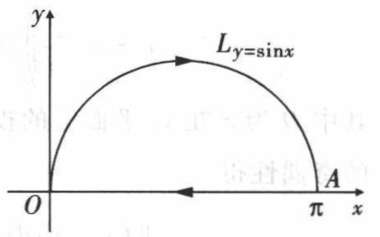
$$= \int_{L \cup \overline{AO}} \sin 2x\,dx + 2(x^2-1)y\,dy$$

$$= -\iint_D 4xy\,dx\,dy = -\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} 4xy\,dy$$

$$= -\int_0^{\pi} 2xy^2 \Big|_0^{\sin x} dx = -\int_0^{\pi} x(1-\cos 2x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\,d\sin 2x$$

$$= -\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}x\sin 2x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\pi^2.$$



第 4 题图

【解法三】 将原积分拆成两部分再分别积分.

$$I = \int_L \sin 2x\,dx + 2(x^2-1)y\,dy = \int_L \sin 2x\,dx - 2y\,dy + \int_L 2x^2 y\,dy = I_1 + I_2.$$

因为$\dfrac{\partial(-2y)}{\partial x} - \dfrac{\partial(\sin 2x)}{\partial y} = 0$,所以 I_1 与积分路径无关,且 $I_1 = \displaystyle\int_{(0,0)}^{(\pi,0)} \sin 2x\,dx - 2y\,dy = 0$;

又 $$I_2 = \int_L 2x^2 y\,dy = \int_0^{\pi} 2x^2 \sin x \cos x\,dx = \int_0^{\pi} x^2 \sin 2x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 2x\cos 2x\,dx$$

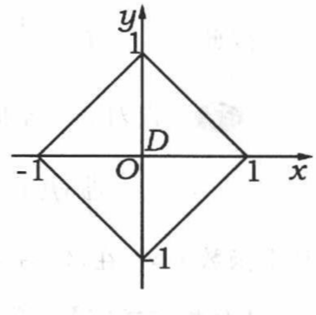
$$= -\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}x\sin 2x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\pi^2.$$

所以 $$I = I_1 + I_2 = -\frac{1}{2}\pi^2.$$

5 计算 $I = \oint_L (y^2 - z^2)\,dx + (2z^2 - x^2)\,dy + (3x^2 - y^2)\,dz$,其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线,从 z 轴正向看去,L 为逆时针方向.

【分析与求解】 用斯托克斯公式来计算. 记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围部分. 由 L 的定向,按右手法则 S 取上侧,S 的单位法向量

$$\boldsymbol{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}.$$



第 5 题图

于是由斯托克斯公式得

$$I = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & 2z^2 - x^2 & 3x^2 - y^2 \end{vmatrix} dS$$

$$= \iint_S \left[(-2y-4z)\frac{1}{\sqrt{3}} + (-2z-6x)\frac{1}{\sqrt{3}} + (-2x-2y)\frac{1}{\sqrt{3}} \right] dS$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S (4x+2y+3z)\,dS \xlongequal{\text{利用 } x+y+z=2} -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S (6+x-y)\,dS.$$

注意 $$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

将第一类曲面积分化为二重积分得

$$I = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_D (6 + x - y)\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\iint_D (6 + x - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 为 S 在 xy 平面上的投影区域 $|x| + |y| \leqslant 1$(见图). 由 D 关于 x,y 轴的对称性及被积函数的奇偶性得

$$\iint_D (x - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

$\Rightarrow$
$$I = -12\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -12(\sqrt{2})^2 = -24.$$

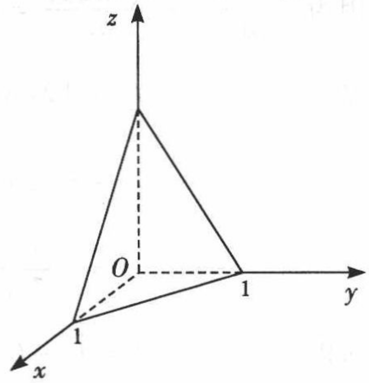
【评注】 该题中用第一类曲面积分表示的斯托克斯公式方便些,因为被积函数可以化简.

6 设曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$,则 $\oiint_\Sigma (x + |y|)\mathrm{d}S =$ ________.

【分析】 Σ 关于 yz 平面对称,x 对 x 为奇函数 $\Rightarrow \oiint_\Sigma x\mathrm{d}S = 0$.

由变量的轮换对称性 $\Rightarrow \oiint_\Sigma |y|\mathrm{d}S = \oiint_\Sigma |x|\mathrm{d}S = \oiint_\Sigma |z|\mathrm{d}S$.

$$\Rightarrow \quad I = \oiint_\Sigma (x + |y|)\mathrm{d}S = \oiint_\Sigma |y|\mathrm{d}S$$
$$= \frac{1}{3}\oiint_\Sigma (|x| + |y| + |z|)\mathrm{d}S$$
$$= \frac{1}{3}\oiint_\Sigma 1\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\cdot \text{曲面 }\Sigma\text{ 的面积}.$$



第 6 题图

记 Σ 在第一卦限部分的面积为 σ_1(如图),则

$$\sigma_1\cos\gamma = \frac{1}{2}, \text{即 } \sigma_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因此 $\quad I = \frac{1}{3}\cdot 8\sigma_1 = \frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$

7 设对于半空间 $x > 0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S,都有

$$\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \qquad ①$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有连续一阶导数,且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$. 求 $f(x)$.

【分析与求解】 闭曲面 S 是任意的,S 围成的区域 Ω 也是任意的. 想到一个结论:设 $g(x,y,z)$ 在某区域 Ω^* 连续,在 Ω^* 内的 $\forall$ 区域 Ω 上有 $\iiint_\Omega g(x,y,z)\mathrm{d}V = 0$,则在 Ω^* 上 $g(x,y,z) = 0$.

于是对 ① 式用高斯公式得

$$\iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(xf(x)) + \frac{\partial}{\partial y}(-xyf(x)) + \frac{\partial}{\partial z}(-\mathrm{e}^{2x}z)\right]\mathrm{d}V = 0,$$

即
$$\iiint_\Omega [xf'(x) + (1 - x)f(x) - \mathrm{e}^{2x}]\mathrm{d}V = 0.$$

由 Ω 的任意性 $\Rightarrow$

$$xf'(x) + (1 - x)f(x) - \mathrm{e}^{2x} = 0\ (x > 0),$$

即 $$f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}e^{2x}\quad(x>0).\tag{②}$$

求 $f(x)$ 转化为求解②并满足 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$.

方程②是一阶线性方程, $\mu(x)=e^{\int(\frac{1}{x}-1)dx}=\frac{|x|}{e^x}$,则两边乘 $\frac{x}{e^x}$ 得

$$\left[\frac{x}{e^x}f(x)\right]'=e^x\xRightarrow{\text{积分}}\frac{x}{e^x}f(x)=e^x+C\Rightarrow f(x)=\frac{e^x}{x}(e^x+C).$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\ \exists\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to0^+}(e^x+C)=0\Rightarrow C=-1$.

验证: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x}{x}(e^x-1)=1$.因此 $f(x)=\frac{e^x}{x}(e^x-1)$.

【评注】 该试题是属于不多见的一类题型,即在某区域中 $\forall$ 封闭曲面 S 上

$$\iint\limits_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=0,$$

被积表达式中含有某待定的一元函数.用高斯公式得 $\iiint\limits_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=0$.

由被积函数的连续性及 Ω 的任意性得 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$.

对某些特殊给定的 P,Q,R,它是这个待定函数的常微分方程,解方程即可定出这个待定的函数.

另外,由条件 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$ 定 C,很有新意.考生应认真体会.

8 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_\Sigma 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy,$$

其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2\ (z\geqslant0)$ 的上侧.

【分析与求解一】 利用高斯公式来计算.因 Σ 不封闭,添加辅助面 $\Sigma_1: z=0, x^2+y^2\leqslant1$(它是 xy 平面上的圆域记为 D),法向量朝下.Σ 与 Σ_1 围成区域 Ω,边界取外法向.在 Ω 上用高斯公式得

$$J\xlongequal{\text{记}}\iint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=\iiint\limits_\Omega 6(x^2+y^2+z)dxdydz.$$

作柱坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$,则 $\Omega: 0\leqslant\theta\leqslant2\pi, 0\leqslant r\leqslant1, 0\leqslant z\leqslant1-r^2$,

$$J=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1dr\int_0^{1-r^2}(r^2+z)r\,dz=12\pi\cdot\int_0^1\left[r^3(1-r^2)+\frac{1}{2}r(1-r^2)^2\right]dr$$

$$=12\pi\cdot\int_0^1\frac{1}{2}(r-r^5)dr=2\pi.$$

又 $$J_1\xlongequal{\text{记}}\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}-3dxdy=-\iint\limits_D-3dxdy=3\pi,$$

因此, $I=J-J_1=2\pi-3\pi=-\pi$.

【评注】 在本解法中,积分 $\iiint\limits_\Omega 6(x^2+y^2+z)dxdydz$ 也可如下计算:

$$6\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)dV+6\iiint\limits_\Omega z\,dV=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1dr\int_0^{1-r^2}r^2\cdot r\,dz+6\int_0^1dz\iint\limits_{D(z)}z\,dxdy$$

$$= 6\cdot 2\pi\int_0^1 r^3(1-r^2)\,dr + 6\int_0^1 z\pi(1-z)\,dz$$

$$= 6\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+6\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=2\pi.$$

【分析与求解二】 直接把第二类曲面积分化为二重积分．S 的方程为 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant 0)$，它在 xy 平面上的投影区域为 $D:x^2+y^2\leqslant 1$．又 $z'_x=-2x$，$z'_y=-2y$，代公式得

$$I=+\iint_D[2x^3(-z'_x)+2y^3(-z'_y)+3((1-x^2-y^2)^2-1)]\,dxdy$$

$$=\iint_D[4x^4+4y^4+3(x^4+y^4-2x^2-2y^2+2x^2y^2)]\,dxdy$$

$$=8\iint_D x^4\,dxdy-6\iint_D(x^2+y^2)\,dxdy+3\iint_D(x^2+y^2)^2\,dxdy,$$

其中，$\iint_D x^4\,dxdy=\iint_D y^4\,dxdy$．作极坐标变换得

$$I=8\int_0^1 r^5\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\,d\theta-6\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^1 r^3\,dr+3\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^1 r^5\,dr$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\,d\theta-3\pi+\pi=\frac{4}{3}\cdot 4\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}-3\pi+\pi=-\pi.$$

9 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\iint_\Sigma x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy=$ ________．

【分析】 在 Ω 上用高斯公式得

$$I=\iiint_\Omega(1+1+1)\,dV=3\iiint_\Omega 1\,dV.$$

作球坐标变换：$x=\rho\sin\varphi\cos\theta,y=\rho\sin\varphi\sin\theta,z=\rho\cos\varphi$，此时 Ω：

$$0\leqslant\rho\leqslant R,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

$$\Rightarrow\qquad I=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^R\rho^2\sin\varphi\,d\rho=3\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,d\varphi\cdot\frac{R^3}{3}=(2-\sqrt{2})\pi R^3.$$

10 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧，则 $\iint_\Sigma x\,dydz+2y\,dzdx+3(z-1)\,dxdy=$ ________．

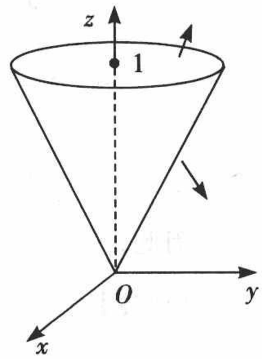
【分析一】 添加辅助面 $\Sigma_1:z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$，法向量朝上（如图）．

$$\iint_{\Sigma_1}x\,dydz+2y\,dzdx+3(z-1)\,dxdy=0+0+0=0.$$

Σ 与 Σ_1 围成区域 Ω，用高斯公式得

$$\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}x\,dydz+2y\,dzdx+3(z-1)\,dxdy=\iiint_\Omega(1+2+3)\,dV$$

$$=6\cdot\frac{1}{3}\pi=2\pi.$$



第 10 题图

因此，原式 $=2\pi-0=2\pi$.

【分析二】 直接计算.

$$\Sigma: z = \sqrt{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Σ 在 xy 平面上投影区域记为 $D:x^2+y^2 \leqslant 1$. 代公式化为二重积分有

$$\begin{aligned}\text{原式} &= -\iint_D \left[x\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2y\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 3\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\right]\mathrm{d}\sigma \\ &= \iint_D \left(\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 3\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma + 3\pi \\ &= -\frac{3}{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma + 3\pi = -\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r + 3\pi = -\pi + 3\pi = 2\pi,\end{aligned}$$

其中用到 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma = \iint_D \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$.

【评注】 ① 本题考查非封闭曲面上的第二类(或称对坐标的)曲面积分,采用投影法或加、减曲面后利用高斯公式都可计算,一般情况下用第二种方法较为简便.

② 用高斯公式计算本题必须加一个曲面,而本题中添上的项 $\displaystyle\iint_{\Sigma_1}$,其值恰巧为 0,这是巧合,而不是必然.

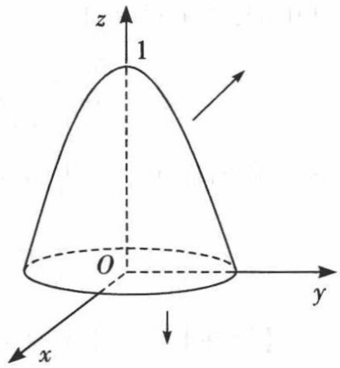
11 计算曲面积分

$$I = \iint_\Sigma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 的上侧.

【分析与求解】 利用高斯公式转化为求三重积分与辅助面上的曲面积分.

曲面 Σ 不封闭,添加辅助面 $\Sigma_1: z = 0\left(x^2 + \dfrac{1}{4}y^2 \leqslant 1\right)$,法向量朝下,$\Sigma$ 与 Σ_1 围成区域 Ω,取外法向(如图).



第 11 题图

因为 Σ_1 垂直 yz 平面与 zx 平面,所以 $\displaystyle\iint_{\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0$. 又

$$\iint_{\Sigma_1} 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

其中区域 $D: x^2 + \dfrac{1}{4}y^2 \leqslant 1$ 关于 x,y 轴对称. 由高斯公式得

$$\begin{aligned}I &= \iint_\Sigma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma\cup\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iiint_\Omega (z + 2z + 0)\mathrm{d}V = \iiint_\Omega 3z\mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z\iint_{D(z)} 3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

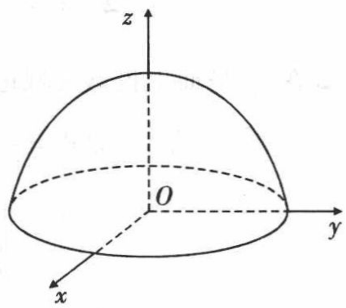
其中 $D(z): x^2 + \dfrac{1}{4}y^2 \leqslant 1 - z$,面积为 $2\pi(1-z)$. 因此

$$I = \int_0^1 3z\,2(1-z)\pi\mathrm{d}z = 6\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \pi.$$

12 设曲面Σ是$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧，则$\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

【分析一】 曲面Σ是上半球面法向量朝上（如图）．用高斯公式来求这个面积分．将所求曲面积分表为

$$I=\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



第 12 题图

由于Σ不封闭，要添加辅助面$\Sigma_1: z=0(x^2+y^2\leqslant 4)$，法向量朝下．由$\Sigma_1$与$\Sigma$围成区域$\Omega$，边界取外法向．

Σ_1垂直yz平面与zx平面$\Rightarrow \iint\limits_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$.

Σ_1在xy平面上的区域记为$D: x^2+y^2\leqslant 4 \quad\Rightarrow$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{（曲面积分化为二重积分）}$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\cos^2\theta r\mathrm{d}r=-\pi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^2=-4\pi.$$

在Ω上用高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_1} P\mathrm{d}xy\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}V=0,$$

其中Ω关于zx平面对称．

因此 $\quad I=-(-4\pi)=4\pi$.

【分析二】 直接代公式将第二类曲面积分化为二重积分．曲面Σ的方程是

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}\quad ((x,y)\in D),$$

其中$D: x^2+y^2\leqslant 4$. $\Rightarrow$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

$\Rightarrow$ 原曲面积分$=\iint\limits_{D}[xy(-z_x')+x(-z_y')+x^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+0+\iint\limits_{D} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\cdot r\mathrm{d}r=\pi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^2=4\pi.$$

【评注】 ① 本题考查高斯公式、三重积分的性质和二重积分的性质与计算．

② 有些考生填-4π，这说明这些考生对第二类曲面积分的方向性没弄清楚．

13 计算曲面积分$I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中$\Sigma$是曲面$2x^2+2y^2+z^2=4$的外侧．

【分析与求解】 直接计算较复杂，若把积分记为

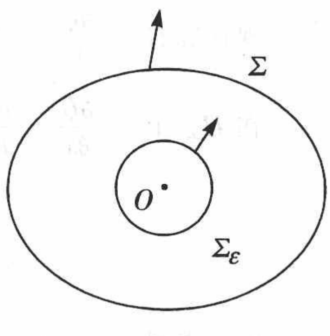
$$I=\oiint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

容易验证 $\quad\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=\dfrac{1}{\rho^3}-\dfrac{3x^2}{\rho^5}+\dfrac{1}{\rho^3}-\dfrac{3y^2}{\rho^5}+\dfrac{1}{\rho^3}-\dfrac{3z^2}{\rho^5}=0\ (\rho\neq 0)$,

其中$\rho=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$．因此想到用高斯公式，椭球面$\Sigma\left(\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{4}z^2=1\right)$围成的区域

记为 Ω,它含原点$(0,0,0)$,而 P,Q,R 在$(0,0,0)$无定义,因而不能在 Ω 上直接应用高斯公式. 如果我们作以原点为心的小球面 Σ_ε 位于 Ω 内,在 Σ 与 Σ_ε 所围的区域 Ω_ε 上就可用高斯公式,把求 Σ 上的曲面积分转化为 Σ_ε 上的曲面积分,在 Σ_ε 上被积函数大大简化.

现作以原点为心,$\varepsilon>0$ 为半径的小球面 Σ_ε,$\varepsilon>0$ 充分小使 Σ_ε 位于 Σ 所围的椭球内. 记 Σ 与 Σ_ε 所围的区域为 Ω_ε,Σ_ε 取 Ω_ε 的内法向(即小球的外法向),见图(用平面图示意立体图). 在 Ω_ε 上用高斯公式得



第 13 题图

$$\iiint_{\Omega_\varepsilon}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$
$$=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\oiint_{\Sigma_\varepsilon}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而在 Ω_ε 上,P,Q,R 有连续的一阶偏导数且$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$,于是

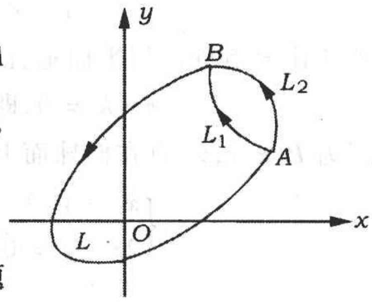
$$\begin{aligned}I&=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\oiint_{\Sigma_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\&=\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint_{\Sigma_\varepsilon}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega_\varepsilon^*}3\mathrm{d}V=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3=4\pi\ (\text{在 }\Omega_\varepsilon^*:x^2+y^2+z^2\leqslant\varepsilon^2\text{ 上用高斯公式}).\end{aligned}$$

14 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数,在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上,曲线积分 $\oint_L\dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

(Ⅰ)证明:对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C,有 $\oint_C\dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0$;

(Ⅱ)求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

【分析与证明】 (Ⅰ)在右半平面 $x>0$ 内 $\forall$ 取两点 A,B,以 A 为起点,B 为终点 $\forall$ 作两条分段光滑曲线 L_1 与 L_2,记 $P=\dfrac{\varphi(y)}{2x^2+y^4}$,$Q=\dfrac{2xy}{2x^2+y^4}$,要证 $\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.



第 14 题图

以 B 为起点作另一分段光滑曲线 L 绕过原点与 A 连接,如图,按题意

$$\int_{L\cup L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L\cup L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在右半平面与路径无关

$\Rightarrow$ $\displaystyle\oint_{C}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$,其中,$C$ 为右半平面内 $\forall$ 分段光滑闭曲线.

(Ⅱ) 右半平面 $\Pi_{右}(x>0)$ 是单连通区域,在 $\Pi_{右}$ 上 $\forall$ 分段光滑闭曲线 C,有

$$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0 \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}((x,y)\in \Pi_{右}).$$

现计算有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{2y^5-4x^2y}{(2x^2+y^4)^2}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\varphi'(y)(2x^2+y^4)-4y^3\varphi(y)}{(2x^2+y^4)^2}$.

在 $\Pi_{右}$ 上 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}\Leftrightarrow 2y^5-4x^2y=\varphi'(y)(2x^2+y^4)-4y^3\varphi(y)\quad(x>0)$

$$\Leftrightarrow\ 2y^5+4y^3\varphi(y)-y^4\varphi'(y)=2x^2[\varphi'(y)+2y]\quad(x>0)$$

$$\Leftrightarrow\ 2y^5+4y^3\varphi(y)-y^4\varphi'(y)=0 \text{ 且 } \varphi'(y)+2y=0$$

$$\Leftrightarrow\ 2y^2+4\varphi(y)-y\varphi'(y)=0 \text{ 且 } \varphi'(y)+2y=0.$$

由此求得 $\varphi(y)=-y^2$.

此时,相应的 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在全平面除原点外均成立.

因此,由格林公式可知,对任意环绕原点的分段光滑闭曲线 L, $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 均为常值,因此最后求得

$$\varphi(y)=-y^2.$$

15 设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点,若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直,求点 P 的轨迹 C,并计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma \frac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S,\text{其中 }\Sigma\text{ 是椭球面 }S\text{ 位于曲线 }C\text{ 上方的部分}.$$

【分析与求解】 先求点 P 的轨迹曲线 C.

椭球面 $S:F(x,y,z)\xlongequal{\text{记}}x^2+y^2+z^2-yz-1=0$ 上动点 P 的法向量

$$\boldsymbol{n}=\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}=\{2x,2y-z,2z-y\}.$$

若 S 在 P 点处的切平面垂直于 xOy 平面,则 P 点处 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 应垂直于 Oz 轴,因而

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}=0,\text{即}\quad 2z-y=0.$$

因为 $P(x,y,z)$ 点在椭球面上,故所求的 P 点应满足

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz-1=0,\\2z-y=0.\end{cases}$$

这就是所求的 P 点轨迹曲线 C 的方程. 为简化起见,将第二式 $z=\dfrac{y}{2}$ 代入第一式,可得所求轨迹 C 的方程为

$$\begin{cases}x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1,\\2z-y=0.\end{cases}\quad(\text{它是椭圆柱面与平面的交线}.)$$

下求曲面积分 $I=\displaystyle\iint_\Sigma \frac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$,其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

记曲面 Σ 的方程为 $z=z(x,y)$,它在 xy 平面上的投影区域为 D,按第一类曲面积分计算公式

$$I=\iint_D \frac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

为求出它的值,我们必须:

1° 求出投影区域 D. 由前面的分析可知,

$D: x^2+\frac{3}{4}y^2\leqslant 1$,即 $x^2+\frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}\leqslant 1$(它是曲线 C 在 xy 平面上的投影曲线所围成的).

2° 求出 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$.

Σ 的方程即 $z=z(x,y)$ 满足的方程是 $x^2+y^2+z^2-yz=1$,两边分别对 x,y 求偏导数,得

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2x}{2z-y};$$

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}-z-y\frac{\partial z}{\partial y}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(2y-z)}{2z-y},$$

从而

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}&=\sqrt{1+\frac{4x^2}{(2z-y)^2}+\frac{(2y-z)^2}{(2z-y)^2}}\\&=\sqrt{\frac{4(x^2+y^2+z^2-yz)+y^2+z^2-4yz}{(2z-y)^2}}\\&=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|2z-y|}.\end{aligned}$$

3° 现可得 $I=\iint_D (x+\sqrt{3})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\cdot\pi\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi,$

其中 $\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ (D 关于 y 轴对称).

第十二章　无穷级数

习题 12－1　常数项级数的概念和性质

1 写出下列级数的前五项：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

【解】 (1) $1,\quad \frac{3}{5},\quad \frac{2}{5},\quad \frac{5}{17},\quad \frac{3}{13}$.

(2) $\frac{1}{2},\quad \frac{1\cdot3}{2\cdot4},\quad \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6},\quad \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8},\quad \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}$.

(3) $\frac{1}{5},\quad -\frac{1}{5^2},\quad \frac{1}{5^3},\quad -\frac{1}{5^4},\quad \frac{1}{5^5}$.

(4) $1,\quad \frac{2!}{2^2},\quad \frac{3!}{3^3},\quad \frac{4!}{4^4},\quad \frac{5!}{5^n}$.

2 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(2) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$；

(3) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$.

【解】设级数的部分和为 S_n.

(1) 因为　$S_n=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$,

由于　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$,所以根据定义可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 发散.

(2) 由于 $u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,从而

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

由于　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$,所以根据定义可知级数收敛.

(3) 由于 $u_n=\sin\frac{n\pi}{6}=\frac{2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{n\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi}{2\sin\frac{\pi}{12}}$,

从而 $S_n = \dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left[\left(\cos\dfrac{\pi}{12}-\cos\dfrac{3\pi}{12}\right)+\left(\cos\dfrac{3\pi}{12}-\cos\dfrac{5\pi}{12}\right)+\cdots+\left(\cos\dfrac{2n-1}{12}\pi-\cos\dfrac{2n+1}{12}\pi\right)\right]$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right),$$

因为当 $n\to\infty$ 时,$\cos\dfrac{2n+1}{12}\pi$ 的极限不存在,所以 S_n 的极限不存在,即级数发散.

3 判定下列级数的收敛性:

(1) $-\dfrac{8}{9}+\dfrac{8^2}{9^2}-\dfrac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{8^n}{9^n}+\cdots$; (2) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{3n}+\cdots$;

(3) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$; (4) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3^2}{2^2}+\dfrac{3^3}{2^3}+\cdots+\dfrac{3^n}{2^n}+\cdots$;

(5) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

【解】 (1) 此数列为等比数列.公比为 $q=-\dfrac{8}{9}$,由于 $|q|<1$,此级数收敛.设和为 S,则

$$S=\frac{-8/9}{1+\frac{8}{9}}=-\frac{8}{17}.$$

(2) 发散.因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

(3) 发散.因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$.

(4) 发散.此级数是等比数列,公比 $q=\dfrac{3}{2}$,$|q|>1$.

(5) 收敛.$S=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^k}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^k}$,故级数收敛,且 $S=\dfrac{1/2}{1-\frac{1}{2}}+\dfrac{1/3}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$.

4 利用柯西审敛原理判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; (2) $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}$; (4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}+\dfrac{1}{3n+3}\right)$.

【解】 (1) 当 p 为偶数时,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k\right| &= \left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{-1}{n+p}\right|\\ &\leqslant \left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right.\\ &\quad\left.+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}+\left(\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}\right)\right|\\ &=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

同理可证当 p 为奇数时，$\left|\sum_{k=n+1}^{k+p} u_k\right| < \frac{1}{n}$，

所以 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n > N$ 时，$\forall p \in \mathbf{N}$，有 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$.

根据柯西审敛原理 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛.

(2) 所给级数是发散的. 用反证法. 若它收敛，则加括号后仍收敛，即级数

$$\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n}\right) + \cdots$$

收敛，但由柯西审敛法，取 $\varepsilon = \frac{1}{6}$，$\forall n - 1 \in \mathbf{N}$，取 $p_0 = n$，则

$$\left|\left(\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{3(n+p_0)-2} + \frac{1}{3(n+p_0)-1} - \frac{1}{3(n+p_0)}\right]\right|$$

$$\geqslant \frac{1}{3n-2} + \cdots + \frac{1}{3(n+p_0)-2} > \underbrace{\frac{1}{6n} + \cdots + \frac{1}{6n}}_{n\text{个}} = \frac{1}{6}.$$

这与假设级数收敛矛盾，从而级数发散.

(3) $$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| = \left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right|$$

$$\leqslant \frac{|\sin(n+1)x|}{2^{n+1}} + \frac{|\sin(n+2)x|}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{|\sin(n+p)x|}{2^{n+p}}$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k}\right|.$$

因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛，故由柯西审敛原理得，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}$，当 $n > N$ 时，$\forall p \in \mathbf{N}$，都有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k}\right| < \varepsilon\text{，从而有}\left|\sum_{k=n+1}^{k+p} \frac{\sin kx}{2^k}\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k}\right| < \varepsilon.$$

所以根据柯西审敛原理，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ 收敛.

(4) 取 $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$，则不论 n 多大，只要取 $p = n - 1$，就有

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{u+p}|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n}\right)\right|$$

$$\geqslant \left|\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+4} + \cdots + \frac{1}{6n-2}\right|$$

$$> \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n} + \cdots + \frac{1}{6n} = \frac{1}{6} > \varepsilon.$$

故级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+3}\right)$ 发散.

习题 12 - 2　常数项级数的审敛法

1 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$；

(2) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$；

(3) $\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{3\times6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$；

(4) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\cdots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\cdots$；　　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$.

【解】 (1) $\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散.

(2) $\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{n}{n+n^2}=\frac{1}{n+1}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$ 发散.

(3) $\frac{1}{(n+1)(n+4)}<\frac{1}{n^2}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$ 收敛.

(4) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x<x$，从而 $\sin\frac{\pi}{2^n}<\frac{\pi}{2^n}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ 收敛.

(5) 当 $a>1$ 时，$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}$，因为 $\frac{1}{a}<1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 收敛；

当 $a\leqslant1$ 时，$\frac{1}{1+a^n}\geqslant\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}\geqslant\frac{1}{2}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 发散.

2 用比值审敛法判定下列级数的收敛性：

(1) $\frac{3}{1\cdot2}+\frac{3^2}{2\cdot2^2}+\frac{3^3}{3\cdot2^3}+\cdots+\frac{3^n}{n\cdot2^n}+\cdots$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

【解】 (1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot2^{n+1}}\Big/\frac{3^n}{n\cdot2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{3}{2}>1$，故级数发散.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\Big/\frac{n^2}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{1}{3}<1$，故级数收敛.

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{2^n n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{1+n}\right)^n=\frac{2}{\mathrm{e}}<1$，故该级数收敛.

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}\Big/n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1，故该级数收敛.$$

❸ 用根值审敛法判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^{n}}$；　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^{n}$,其中 $a_n \to a(n\to\infty)$,a_n,b,a 均为正数.

【解】 (1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$,故级数收敛.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$,故级数收敛.

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}<1$,故级数收敛.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a}$,

当 $b<a$ 时,因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$,故级数收敛;当 $b>a$ 时,因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}>1$,故级数发散;

当 $b=a$ 时,级数的收敛性不能确定.例如,$b=1,a_n=1$,$\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{b}{a_n}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{n}1$ 发散;又如,$b=1,a_n=n^{\frac{2}{n}}\to 1(n\to\infty)$,$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

❹ 判定下列级数的收敛性：

(1) $\frac{3}{4}+2\left(\frac{3}{4}\right)^{2}+3\left(\frac{3}{4}\right)^{3}+\cdots+n\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+\cdots$；　(2) $\frac{1^4}{1!}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\cdots+\frac{n^4}{n!}+\cdots$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$；　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n}\sin\frac{\pi}{3^n}$；

(5) $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots$；

(6) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\cdots+\frac{1}{na+b}+\cdots(a>0,b>0)$.

【解】 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{u+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}<1$,由比值审敛法知级数收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{4}\cdot\frac{1}{n+1}=0<1$,由比值审敛法知级数收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}\Big/\frac{1}{n}=1$,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,由极限比较审敛法知原级数发散.

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}2^{n}\sin\frac{\pi}{3^n}\Big/\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{3^n}}{\frac{\pi}{3^n}}=\pi$,而几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ 收敛,故由极限比较审敛法知原级数收敛.

(5) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=1\neq 0$,故级数发散.

(6) 因$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{na+b}\Big/\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a+\dfrac{b}{n}}=\dfrac{1}{a}$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,故由极限形式的比较极限审敛法知原级数发散.

5 判定下列级数是否收敛?如果收敛,是绝对收敛还是条件收敛?

(1)$1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$;

(3) $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^4}+\cdots$;

(4) $\dfrac{1}{\ln2}-\dfrac{1}{\ln3}+\dfrac{1}{\ln4}-\dfrac{1}{\ln5}+\cdots$;　　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$.

【解】 (1)$u_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是交错级数,且满足莱布尼兹条件,因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛. 而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$是$p$级数,$p=\dfrac{1}{2}<1$,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散,因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是条件收敛的.

(2) 令$u_n=(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3^n}\cdot\dfrac{3^{n-1}}{n}=\dfrac{1}{3}$,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛.

(3) 因为$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{2^4}+\cdots$绝对收敛,从而所给级数$\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{2^4}+\cdots\right)$也绝对收敛.

(4)$u_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是交错级数,满足莱布尼兹条件,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

考虑　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\dfrac{1}{\ln(n+1)}$,由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\ln(x+1)}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{x+1}}=+\infty,$$

于是　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\ln(n+1)}}{\dfrac{1}{n}}=+\infty$. 所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散,从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{\ln(n+1)}$条件收敛.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n^2}}{n!}=\infty$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$不存在,故原级数发散.

习题 12 - 3　幂级数

1 求下列幂级数的收敛区间:

(1)$x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$;　　(2)$1-x+\dfrac{x^2}{2^2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n^2}+\cdots$;

(3) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2\cdot4}+\dfrac{x^3}{2\cdot4\cdot6}+\cdots+\dfrac{x^n}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}+\cdots$;

(4) $\frac{x}{1\cdot 3}+\frac{x^2}{2\cdot 3^2}+\cdots+\frac{x^n}{n\cdot 3^n}+\cdots$;　　(5) $\frac{2}{2}x+\frac{2^2}{5}x^2+\cdots+\frac{2^n}{n^2+1}x^n+\cdots$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;　　(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

【解】 (1) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$,

当 $x=\pm 1$ 时,原级数都发散.原级数收敛区间为 $(-1,1)$.

(2) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$,

当 $x=\pm 1$ 时,原级数都收敛,故原级数收敛区间为 $[-1,1]$.

(3) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\infty$,故收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

(4) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}\frac{(n+1)3^{n+1}}{1}=3$,

当 $x=3$ 时,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散;当 $x=-3$ 时,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛.故收敛区间为 $[-3,3)$.

(5) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2+1}\cdot\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$,

当 $x=\frac{1}{2}$ 时,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 收敛;当 $x=-\frac{1}{2}$ 时,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+1}$ 也收敛,故原级数收敛区间为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

(6) 按比值审敛法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{x^{2n+1}}\right|=|x|^2,$$

当 $|x|^2<1$,即 $|x|<1$ 时,级数收敛;当 $|x|>1$ 时,级数发散,所以 $R=1$;

当 $x=1$ 时,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛;当 $x=-1$ 时,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{2n+1}$ 也收敛.故原级数收敛区间为 $[-1,1]$.

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{1}{2}|x|^2$,

当 $\frac{1}{2}|x|^2<1$,即 $|x|<\sqrt{2}$ 时,级数收敛;当 $x>\sqrt{2}$ 时,级数发散,所以 $R=\sqrt{2}$.

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时,$x^2=2$,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$,发散,故原级数收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(8) 设 $t=x-5$,则原级数变为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{\sqrt{n}}$.设 $\sum\frac{t^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛半径为 R,所以

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right|=1,$$

当 $t=1$ 时,级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$,发散;当 $t=-1$ 时,级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$,收敛.

即新级数的收敛区间为 $-1\leqslant t<1$,则原级数的收敛区间为 $-1<x<-5<1$,解得 $4\leqslant x<6$.

2 利用逐项求导或逐项积分,求下列级数的和函数:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$;

(3) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$.

【解】 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的收敛区间为 $(-1,1)$,令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$,则

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=s(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

(2) 记 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},x\in(-1,1)$,因为　$s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\frac{x^4}{1-x^4}$,所以

$$s(x)=\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{x^4}{1-x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x\quad(-1<x<1).$$

(3) 记 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\quad(-1<x<1)$,　$s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}$,所以

$$s(x)=\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad(-1<x<1).$$

习题 12－4　函数展开成幂级数

1 求函数 $f(x)=\cos x$ 的泰勒级数,并验证它在整个数轴上收敛于这个函数.

【解】 因为　$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)(n=1,2,\cdots)$,

所以　$f^{(n)}(x_0)=\cos\left(x_0+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)(n=1,2,\cdots)$,则 $f(x)$ 的泰勒级数为

$$\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{\cos\left(x_0+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,$$

又　$|R_n(x)|=\left|\frac{\cos\left[x_0+\theta(x-x_0)+\frac{n+1}{2}\pi\right]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\quad(0<\theta<1)$,

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|=0$,

于是$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，所以有

$$\cos x=\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{\cos\left(x_0+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,x\in(-\infty,+\infty).$$

2 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

(1) $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；　(2) $\ln(a+x)\quad(a>0)$；

(3) a^x；　(4) $\sin^2 x$；

(5) $(1+x)\ln(1+x)$；　(6) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

【解】 (1) 由于 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$，故

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n,x\in(-\infty,+\infty).$$

于是 $$\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) $\ln(a+x)=\ln a+\ln\left(1+\dfrac{x}{a}\right)$，利用 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\ x\in(-1,1]$，

得 $$\ln(a+x)=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^n,x\in(-a,a].$$

(3) 利用 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$，得

$$a^x=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n,x\in(-\infty,+\infty).$$

(4) $\sin^2x=\dfrac{1-\cos2x}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos2x.$

因为 $$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

所以 $$\sin^2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

(5) 因为 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\quad(-1<x\leqslant1)$，所以

$$\begin{aligned}(1+x)\ln(1+x)&=\ln(1+x)+x\ln(1+x)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\\&=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n}\\&=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}\quad(-1<x\leqslant1).\end{aligned}$$

(6) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},x\in[-1,1]$,

所以 $$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},x\in[-1,1].$$

3 将下列函数展开成$(x-1)$的幂级数,并求展开式成立的区间.

(1) $\sqrt{x^3}$;　　　　(2) $\lg x$.

【解】 (1) 因为$(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$,

$(-1<x<1)$,所以

$$\sqrt{x^3}=[1+(x-1)]^{\frac{3}{2}}$$

$$=1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}(x-1)^n+\cdots,$$

$$(-1\leqslant x-1\leqslant 1)$$

即 $$\sqrt{x^3}=1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{3\cdot 1}{2^2\cdot 2!}(x-1)^2+\frac{3\cdot 1\cdot(-1)}{2^3\cdot 3!}(x-1)^3+\cdots$$

$$+\frac{3\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdots(-2n+5)}{2^n\cdot n!}(x-1)^n+\cdots$$

$$=1+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3}{(n+1)(n+2)2^n}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+2}.\ (0\leqslant x\leqslant 2)$$

(2) $\lg x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}=\dfrac{1}{\ln 10}\ln[1+(x-1)]=\dfrac{1}{\ln 10}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n}$, $(-1<x-1\leqslant 1)$

即 $\lg x=\dfrac{1}{\ln 10}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n}$. $(0<x\leqslant 2)$

4 将函数$f(x)=\cos x$展开成$\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的幂级数.

【解】 $\cos x=\cos\left[\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\pi}{3}\right]=\dfrac{1}{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

$$\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1},\left(-\infty<x+\frac{\pi}{3}<+\infty\right)$$

即 $$\cos x=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\times\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}\right].\ (-\infty<x<+\infty)$$

5 将函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$展开成$(x-3)$的幂级数.

【解】 $\frac{1}{x}=\frac{1}{3+x-3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n,\left(-1<\frac{x-3}{3}<1\right)$$

即 $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n.\ (0<x<6)$

6 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

【解】 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$

$$=\frac{1}{-3+(x+4)}-\frac{1}{-2+(x+4)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n,$$

其中 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n,\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n$ 的收敛区间分别为

$$-1<\frac{x+4}{2}<1 \quad 和 \quad -1<\frac{x+4}{3}<1,$$

即 $-6<x<-2$ 和 $-7<x<-1$. 于是

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n\quad(-6<x<-2).$$

习题12－5 函数的幂级数展开式的应用

1 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值：

(1) ln3(误差不超过0.0001)； (2) $\sqrt{e}$(误差不超过0.001)；

(3) $\sqrt[9]{552}$(误差不超过0.00001)； (4) cos2°(误差不超过0.0001).

【解】 (1) 由展开式

$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots,x\in(-1,1]$,

$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\cdots,x\in[-1,1)$,

$\ln\frac{1+x}{1-x}\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right),x\in(-1,1)$, ①

令 $\frac{1+x}{1-x}=3$，则 $x=\frac{1}{2}$，它是收敛域中的一点，以 $x=\frac{1}{2}$ 代入①得

$$\ln3=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}+\cdots\right),$$

如果取前6项作为ln3的近似值，则误差为

$$|r_6| = 2\left(\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}+\cdots\right) < \frac{1}{3\cdot 13\cdot 2^{10}} \approx 0.00003,$$

于是取 $n=6$ 有

$$\ln 3 \approx 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2^{11}}\right) \approx 1.0986.$$

(2) 因为 $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$,令 $x=\frac{1}{2}$,则

$$\sqrt{e} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\cdots+\frac{1}{n!\cdot 2^n}+\cdots,$$

如果取前 5 项的和作为$\sqrt{e}$的近似值,则误差为

$$|r_5| = \frac{1}{5!2^5}+\frac{1}{6!2^6}+\frac{1}{7!2^7}+\cdots = \frac{1}{5!2^5}\left(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{7\times 6\cdot 2^2}+\cdots\right)$$

$$< \frac{1}{5!2^5}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right) = \frac{1}{5!\cdot 2^5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{24\cdot 5!} \approx 0.0003.$$

取 $n=4$,则 $\quad \sqrt{e} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!2^2}+\frac{1}{3!2^3}+\frac{1}{4!\cdot 2^4} \approx 1.6484 \approx 1.648.$

(3) $\sqrt[9]{552} = \sqrt[9]{2^9+10} = 2\sqrt[9]{1+\frac{10}{2^9}} = 2\left(1+\frac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}}$,

因为 $\quad (1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$

$(-1 < x < 1)$

所以 $\quad \sqrt[9]{522} = 2\left(1+\frac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}}$

$$= 2\left[1+\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}+\frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}-1\right)}{2!}\cdot\frac{10^2}{2^{18}}+\cdots+\frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{9}-n+1\right)}{n!}\frac{10^n}{2^{9n}}+\cdots\right]$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}-\frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}}{2!}\cdot\frac{10^2}{2^{18}}+\cdots\right),$$

又 $\quad \frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9} \approx 0.002170,\ \frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}}{2!}\cdot\frac{10^2}{2^{18}} \approx 0.000019,$

故 $\quad \sqrt[9]{522} \approx 2(1+0.002170-0.000019) = 2.00430.$

(4) $\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$,而 $2° = \frac{\pi}{180}\times 2 = \frac{\pi}{90}$(弧度),

则 $\quad \cos 2° = \cos\frac{\pi}{90} = 1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^{2n}+\cdots.$

又 $\quad \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 \approx 6\times 10^{-4},\ \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 \approx 6.186\times 10^{-8},$

故 $\quad \cos 2° \approx 1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 \approx 1-0.00061 \approx 0.9994.$

2 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值：

(1) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx$（误差不超过 0.0001）；　(2) $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx$（误差不超过 0.001）.

【解】 (1) 因为

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx=\int_0^{0.5}(1-x^4+x^8-x^{12}+\cdots)dx$$
$$=\left(x-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{13}x^{13}+\cdots\right)\Bigg|_0^{0.5}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}+\cdots,$$

又 $\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}\approx 0.000009\ll 0.0001$，所以

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}\approx 0.5-0.00625+0.00028\approx 0.4940.$$

(2) 因为 $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,(-1<x<1)$

所以

$$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx=\int_0^{0.5}\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}+\cdots\right)dx$$
$$=\left(x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^5}{25}-\frac{x^7}{49}+\cdots\right)\Bigg|_0^{0.5}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}+\cdots.$$

又 $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}\approx 0.0139,\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}\approx 0.0013,\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}\approx 0.0002\ll 0.001$，

故 $$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}\approx 0.4874\approx 0.487.$$

3 试用幂级数求下列各微分方程的解：

(1) $y'-xy-x=1$；　(2) $y''+xy'+y=0$；　(3) $(1-x)y'=x^2-y$.

【解】 (1) 设方程的解为：$y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$（$C_1$ 为任意常数），则 $y'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$，代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-x=1,$$

即
$$a_1+(2a_2-a_0-1)x+\sum_{n=1}^{\infty}[-a_n+(n+2)a_{n+2}]x^{n+1}=1.$$

所以 $a_1=1,2a_2-a_0-1=0,-a_n+(n+2)a_{n+2}=0,(n\geqslant 1)$，

即 $a_1=1,a_2=\frac{1+a_0}{2},a_{n+2}=\frac{a_n}{n+2},(n\geqslant 1)$.

所以 $a_1=1,a_3=\frac{1}{3},a_5=\frac{1}{3\cdot 5},\cdots,a_{2n-1}=\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$，

$$a_2=\frac{1+a_0}{2},a_4=\frac{1+a_0}{2\cdot 4},a_6=\frac{1+a_0}{2\cdot 4\cdot 6},\cdots,$$

$$a_{2n}=\frac{1+a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}.$$

故 $y = a_0 + \left[x + \frac{x^3}{3!!} + \frac{x^5}{5!!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!} + \cdots \right]$

$$+ \left[\frac{1+a_0}{2}x^2 + \frac{1+a_0}{4!!}x^4 + \cdots + \frac{1+a_0}{(2n)!!}x^{2n} + \cdots \right]$$

$$= a_0 - (1+a_0) + (1+a_0)e^{\frac{x^2}{2}} + \left[x + \frac{x^3}{3!!} + \frac{x^5}{5!!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!} + \cdots \right]$$

$$= ce^{\frac{x^2}{2}} + \left[-1 + x + \frac{x^3}{3!!} + \frac{x^5}{5!!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!} + \cdots \right].$$

(2) 设方程的解为 $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,则 $y' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$,$y'' = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$,代入方程得

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

即

$$a_0 + 2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} [n(n-1)a_n + (n-2)a_{n-2} + a_{n-2}]x^{n-2} = 0.$$

$$a_0 + 2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n-1)(na_n + a_{n-2})x^{n-2} = 0,$$

所以 $a_2 = -\frac{1}{2}a_0, a_n = -\frac{1}{n}a_{n-2} \quad (n \geqslant 3)$.

故 $a_2 = -\frac{1}{2}a_0, a_4 = \frac{1}{2 \cdot 4}a_0, a_6 = -\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}a_0, \cdots, a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{(2n)!!}$,

$$a_1 = a_1, a_3 = -\frac{1}{3}a_1, a_5 = \frac{1}{3 \cdot 5}a_1, \cdots, a_{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{a_1}{(2n-1)!!},$$

所以 $y = a_0\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 4}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!!} + \cdots \right] +$

$$a_1\left[x - \frac{1}{1 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!} + \cdots \right]$$

$$= a_0 e^{-\frac{x^2}{2}} + a_1\left(x - \frac{1}{1 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5}x^5 - \cdots \right).$$

(3) 设方程的解为 $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,则 $y' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$,代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n = x^2 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

即 $a_1 + a_0 + 2a_2 x + (3a_3 - a_2 - 1)x^2 + \sum\limits_{n=4}^{\infty} [na_n - (n-2)a_{n-1}]x^{n-1} = 0.$

则 $a_1 = -a_0, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3}, a_n = \frac{n-2}{n}a_{n-1}, (n \geqslant 4)$.

于是 $a_1 = -a_0, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{6}, a_5 = \frac{1}{10}, a_6 = \frac{1}{15}$.

$$a_{n+3} = \frac{n+1}{n+3}a_{n+2} = \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{(n+2)(n+3)}.$$

故 $y = a_0 - a_0 x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{15}x^6 + \cdots + \frac{2}{(n+2)(n+3)}x^{n+3} + \cdots$

$$= a_0(1-x) + x^3\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{10}x^2 + \cdots + \frac{2}{(n+2)(n+3)}x^n + \cdots \right].$$

4 试用幂级数求下列方程满足所给初始条件的特解：

(1)$y' = y^2 + x^3$, $y\big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$； (2)$(1-x)y' + y = 1 + x$, $y\big|_{x=0} = 0$.

【解】 (1) 设方程的解为 $y = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$,则将 $y' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$,代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x^3 + \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)^2$$

$$= x^3 + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + a_1^2 x^2 + 2a_1 a_3 x^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3)x^4 + \cdots.$$

故有 $a_1 = \dfrac{1}{4}, a_2 = \dfrac{1}{8}, a_3 = \dfrac{1}{16}, a_4 = \dfrac{9}{32}, \cdots$,所以

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \cdots.$$

(2) 设方程的解为 $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$,代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + x,$$

即 $a_1 + 2a_2 x + \sum\limits_{n=2}^{\infty}[(n+1)a_{n+1} - (n-1)a_n]x^n = 1 + x$.

所以 $a_1 = 1, a_2 = \dfrac{1}{2}, a_{n+1} = \dfrac{n-1}{n+1}a_n, (n \geqslant 2)$,

即 $a_1 = 1, a_2 = \dfrac{1}{2}, a_3 = \dfrac{1}{2\cdot 3}, a_4 = \dfrac{1}{3\cdot 4}, \cdots, a_n = \dfrac{1}{(n-1)\cdot n}, \cdots$

所以 $y = x + \dfrac{1}{1\cdot 2}x^2 + \dfrac{1}{2\cdot 3}x^3 + \dfrac{1}{3\cdot 4}x^4 + \cdots$.

5 验证函数 $y(x) = 1 + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots (-\infty < x < +\infty)$ 满足微分方程 $y'' + y' + y = e^x$,并利用此结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

【解】 (1) 因为

$$y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots,$$

$$y'(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \cdots,$$

$$y''(x) = x + \frac{x^2}{4!} + \cdots + \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \cdots,$$

以上三式相加得

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

所以函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y'' + y' + y = e^x$.

(2)$y'' + y' + y = e^x$ 对应的齐次方程 $y'' + y' + y = 0$ 的特征方程为

$r^2 + r + 1 = 0$,

根为 $r_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$,因此齐次方程的通解为

$$Y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

设非齐次微分方程的特解为 $y^*=A\mathrm{e}^x$,代入方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$,得 $A=\frac{1}{3}$,于是 $y^*=\frac{1}{3}\mathrm{e}^x$,且非齐次微分方程的通解为

$$y=Y+y^*=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x.$$

由(1)知,幂级数的和函数 $y(x)$ 满足:$y(0)=1,y'(0)=0$,由此定出上式中的 C_1 与 C_2. 令

$$y(0)=1=C_1+\frac{1}{3},$$

$$y'(0)=0=-\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{1}{3},$$

解得 $C_1=\frac{2}{3},C_2=0$. 于是由微分方程初值问题解的唯一性,可得所求幂级数的和函数为

$$y(x)=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x\ (-\infty<x<+\infty).$$

6 利用欧拉公式将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

【解】 由欧拉公式有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$, $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}=\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin x$.

但 $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}=\mathrm{e}^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots$, $(|z|<\infty)$

其中 $z=x+\mathrm{i}x=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)x$,于是

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}&=1+x+\mathrm{i}x+\frac{1}{2!}(1+\mathrm{i})^2x^2+\cdots+\frac{1}{n!}(1+\mathrm{i})^nx^n+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right)x^n.\ (-\infty<x<+\infty)\end{aligned}$$

取其实部即得 $\mathrm{e}^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\cdot\frac{1}{n!}x^n$. $(-\infty<x<+\infty)$

习题 12－6 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质

1 已知函数序列 $s_n(x)=\sin\frac{x}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛于 0.

(1) 问 $N(\varepsilon,x)$ 取多大,能使当 $n>N$ 时,$s_n(x)$ 与其极限之差的绝对值小于正数 ε;

(2) 证明 $s_n(x)$ 在任一有限区间 $[a,b]$ 上一致收敛.

【解】 (1) $\left[\frac{|x|}{\varepsilon}\right]+1$. 因为 $\forall\varepsilon>0$,

$$|s_n(x)-0|=\left|\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant\frac{|x|}{n}<\varepsilon\Rightarrow\frac{n}{|x|}>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{|x|}{\varepsilon},$$

故令 $N=\left[\frac{|x|}{\varepsilon}\right]+1$,即可.

(2) 令 $l=\max\{|a|,|b|\}$,从而有 $|s_n(x)-0|=\left|\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant\frac{|x|}{n}<\frac{l}{n}$,

因此,$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\frac{l}{\varepsilon}\right]+1$,当 $n>N$ 时,有 $|s_n(x)-0|<\varepsilon$.

所以 $s_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一致收敛的.

2 已知级数 $x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛.

(1) 求出该级数的和;

(2) 问 $N(\varepsilon,x)$ 取多大,能使当 $n>N$ 时,级数的余项 r_n 的绝对值小于正数 ε;

(3) 分别讨论级数在区间 $[0,1]$,$\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上的一致收敛性.

【解】 (1) 该级数为几何级数,所以当 $x\neq0$ 时,

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^2}{(1+x^2)^{k-1}}=1+x^2-\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\to1+x^2=s(x)\ (n\to\infty),$$

当 $x=0$ 时,$s_n(0)\to s(0)=0\ (n\to\infty)$,即 $s(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1+x^2, & x\neq0.\end{cases}$

(2) $\left[\frac{\left|\ln\frac{1}{\varepsilon}\right|}{\ln(1+x^2)}\right]+1$. 因为当 $x\neq0$ 时,

$$r_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}+\cdots=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

因此,$\forall\varepsilon>0$,要使 $|r_n(x)|<\varepsilon$,只需

$$\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}<\varepsilon\quad\Rightarrow\quad n>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+x^2)}+1.$$

故令 $N\geqslant\left[\frac{\left|\ln\frac{1}{\varepsilon}\right|}{\ln(1+x^2)}\right]+1$ 即可.

(3) 由本题(1) 知 $s(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1+x^2, & x\neq0.\end{cases}$

因此,$s(x)$ 在 $x=0$ 点不连续,故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

由于在 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上有 $|r_n(x)|=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\leqslant\left|r_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$,

故对任给 $0<\varepsilon<1$,取 $N=[1-\ln\varepsilon]$,当 $n>N$ 和 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 时便有

$$|r_n(x)|\leqslant\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}<\varepsilon\quad\left(这里利用 \ln\frac{4}{5}<-1\right).$$

所以该级数在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上一致收敛.

3 按定义讨论下列级数在所给区间上的一致收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $-\infty<x<+\infty$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$, $0<x<1$.

【解】 (1) 因为此级数是交错级数,所以余项的绝对值不会超过其余项的第一项绝对值,即

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\leqslant\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=\frac{x^2}{1+nx^2+\cdots+(x^2)^n}<\frac{x^2}{nx^2}=\frac{1}{n},$$

因此 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.则当 $n>N$ 时,有　$|r_n(x)|<\varepsilon$.

故级数在$(-\infty,+\infty)$上是一致收敛的.

(2) 设该级数的部分和函数为 $s_n(x)$,和函数为 $s(x)$,显然

$$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)x^k=1-x^n,\quad s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=1, 0<x<1,$$

由　$|s_n(x)-s(x)|=x^n$, $0<x<1$,可见,$\forall n\in\mathbf{N}$,取 $x_n=1-\frac{1}{n}$,则

$$|s_n(x_n)-s(x_n)|=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{1}{\mathrm{e}}(n\to\infty).$$

因此,级数在(0,1)内不一致收敛.

4 利用魏尔斯特立斯判别法证明下列级数在所给区间上的一致敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}$, $-\infty<x<+\infty$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $-\infty<x<+\infty$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$, $0\leqslant x<+\infty$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n!}$, $|x|<10$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-\mathrm{e}^{-nx})}{n^2+x^2}$, $0\leqslant x<+\infty$.

【证】 (1) 因为$\left|\frac{\cos nx}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}$, $x\in(-\infty,+\infty)$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛,由魏尔斯特立斯判别法,知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(2) 因为$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\leqslant\frac{1}{n^{4/3}}$, $x\in(-\infty,+\infty)$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$收敛,由魏尔斯特立斯判别法,知级数是一致收敛的.

(3) 因为 $x^2\mathrm{e}^{-nx}\leqslant\dfrac{x^2}{1+nx+\frac{n^2x^2}{2}}<\dfrac{2}{n^2}(x\geqslant0)$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$收敛,由魏尔斯特立斯判别法,知级数在 $0\leqslant x<+\infty$ 上一致收敛.

(4) 令 $N=3^{10}-1$,于是当 $n>3^{10}$ 时,有 $n!>(3^{10})^{n-N}$,从而

$$\frac{\mathrm{e}^{10n}}{n!}<\frac{(\mathrm{e}^{10})^n}{(3^{10})^n}\cdot(3^{10})^N=(3^{10})^N\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^{10}}{3^{10}}\right)^n.$$

因为 $\sum_{n=N+1}^{\infty}(3^{10})^N\cdot\left(\frac{e^{10}}{3^{10}}\right)^n$ 收敛(因为公比 $q=\frac{e^{10}}{3^{10}}<1$),所以 $\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{e^{10n}}{n!}$ 收敛,从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{10n}}{n!}$ 收敛.

又注意到 $\forall x\in(-10,10)$, $\frac{e^{-nx}}{n!}\leqslant\frac{e^{10n}}{n!}$,故所给级数在 $(-10,10)$ 上一致收敛.

(5) 注意到 $\forall x\in[0,+\infty)$ 有 $0\leqslant 1-e^{-nx}<1$,故 $\left|\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$,而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛. 由魏尔斯特立斯判别法,知级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

习题 12－7　傅里叶级数

1 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π,试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数,如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

(1) $f(x)=3x^2+1\quad(-\pi\leqslant x<\pi)$;　(2) $f(x)=e^{2x}\quad(-\pi\leqslant x<\pi)$;

(3) $f(x)=\begin{cases}bx, & -\pi\leqslant x<0,\\ ax, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$　(a,b 为常数,且 $a>b>0$).

【解】 (1) $f(x)$ 的傅里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)dx=2(\pi^2+1),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nx dx=(-1)^n\frac{12}{n^2},\ (n=1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\sin nx dx=0.\ (n=1,2,3,\cdots)$$

由于 $f(x)$ 连续,因此 $f(x)=\pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.\ (-\infty<x<+\infty)$

(2) $f(x)$ 的傅里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}dx=\frac{1}{2\pi}(e^{2\pi}-e^{-2\pi}),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\cos nx dx=\frac{2}{\pi}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})\frac{(-1)^n}{n^2+4},\ (n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\sin nx dx=\frac{1}{\pi}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+4}.\ (n=1,2,\cdots)$$

因此 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{4}\left[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx-n\sin nx)\right].\ (x\neq(2n+1)\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(3) $f(x)$ 的傅里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}ax dx=\frac{\pi}{2}(a-b),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\cos nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}ax\cos nx dx$$

$$=\frac{b}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)+\frac{a}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=\frac{b-a}{\pi n^2}[1-(-1)^n],\ (n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}ax\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{b}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right)+\frac{a}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right)=(a+b)\frac{(-1)^{n+1}}{n}.\quad(n=1,2,\cdots)$$

因此 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{\pi}{4}(a-b)+\frac{2(b-a)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+(a+b)\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

$(x\neq(2n+1)\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

2 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数：

(1) $f(x)=2\sin\frac{x}{3}(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}e^x, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

【解】 (1) 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 作周期延拓后得到的以 2π 为周期的周期函数，则 $F(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上连续，$x=\pm\pi$ 是 $F(x)$ 的间断点，且

$$[F(-\pi-0)+F(-\pi+0)]/2\neq f(-\pi),$$
$$[F(\pi-0)+F(\pi+0)]/2\neq f(\pi).$$

故在 $(-\pi,\pi)$ 中，$f(x)$ 的傅里叶级数收敛于 $f(x)$，在 $x=\pm\pi$ 处，$f(x)$ 的傅里叶级数不收敛于 $f(x)$.

又因为 $2\sin\frac{x}{3}(-\pi<x<\pi)$ 是奇函数，所以其傅里叶系数为

$$a_n=0,(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2\sin\frac{x}{3}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(\frac{1}{3}-n\right)x-\cos\left(\frac{1}{3}+n\right)x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n-\frac{1}{3}\right)\pi}{n-\frac{1}{3}}-\frac{\sin\left(n+\frac{1}{3}\right)x}{n+\frac{1}{3}}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{6}{\pi}\left(\frac{-\cos n\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3n-1}-\frac{\cos n\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3n+1}\right)$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{n}{9n^2-1}.\quad(n=1,2,\cdots)$$

因此所求傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{9n^2-1}\sin nx.\quad(-\pi<x<\pi)$$

(2)(以下略去周期延拓的陈述) 所求 $f(x)$ 的傅里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}e^x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\pi}(1-e^{-\pi})+1,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}e^x\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right)=\frac{1-(-1)^ne^{-\pi}}{\pi(1+n^2)},\ (n=1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}e^x\sin nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{n[(-1)^ne^{-\pi}-1]}{1+n^2}-\frac{1-(-1)^n}{n}\right\}.$$

$(n=1,2,3,\cdots)$

因此$f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx\right.$$
$$\left.+\left[\frac{n(-1)^n e^{-\pi}-n}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\sin nx\right\}.\ (-\pi<x<\pi)$$

3 将函数$f(x)=\cos\frac{x}{2}$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$展开成傅里叶级数.

【解】 因$f(x)=\cos\frac{x}{2}$是偶函数,故$f(x)$的傅里叶级数为余弦级数,且其傅里叶系数为

$$b_n=0(n=1,2,\cdots);\quad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{4}{\pi};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x+\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{n-\frac{1}{2}}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos n\pi}{2n-1}+\frac{\cos n\pi}{2n+1}\right)=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

又因为$f(x)=\cos\frac{x}{2}$在$[-\pi,\pi]$上连续,故所求傅里叶级数为

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos nx\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

4 设$f(x)$是周期为2π的周期函数,它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\pi/2 & -\pi\leqslant x<-\pi/2,\\ x, & -\pi/2\leqslant x<\pi/2,\\ \pi/2, & \pi/2\leqslant x<\pi,\end{cases}$$

试将$f(x)$展开成傅里叶级数.

【解】 因为$f(x)$是奇函数,所以$f(x)$的傅里叶级数是正弦级数,且其傅里叶系数为

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nx dx\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi}{2n}\cos nx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}.\quad(n=1,2,\cdots)$$

因为$f(x)$的间断点为$x=(2n+1)\pi,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,故所求傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin nx\quad(x\neq(2n+1)\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

5 将函数$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$展开成正弦级数.

【解】 对 $f(x)$ 作奇延拓得 $F(x)$,则 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2}, & 0<x\leqslant\pi,\\ 0, & x=0,\\ -\dfrac{\pi+x}{2}, & -\pi<x<0.\end{cases}$

再对 $F(x)$ 作周期延拓得 $G(x)\ (-\infty<x<+\infty)$,则

$$G(x)\equiv f(x)\ (0<x\leqslant\pi),\text{且 } G(0)=F(0)=0\neq\frac{\pi}{2}=f(0).$$

下面求傅里叶系数为:

$$a_0=0;\quad a_n=0\ (n=1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x-\pi}{2n}\cos nx-\frac{1}{2n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots).$$

因此所求正弦级数为 $\dfrac{\pi-x}{2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx\ (0<x<\pi)$.

上述级数在 $x=0$ 处收敛于 $\dfrac{1}{2}[G(0-0)+G(0+0)]=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

6 将函数 $f(x)=2x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

【解】 (1) 将 $f(x)$ 展开为正弦级数,对 $f(x)$ 作奇延拓得:

$$F(x)=\begin{cases}2x^2, & 0\leqslant x<\pi,\\ -2x^2, & -\pi<x<0.\end{cases}$$

再将 $F(x)$ 作周期延拓,得 $G(x)(-\infty<x<+\infty)$,易见 $x=\pi$ 是 $G(x)$ 的一个间断点.

计算 $G(x)$ 的傅里叶系数如下:

$$a_0=0;\quad a_n=0\ (n=1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}G(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x^2\cos nx+\frac{2}{n^2}x\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{n}\cos n\pi+\frac{2}{n^3}\cos n\pi-\frac{2}{n^3}\right)$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[(-1)^n\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)-\frac{2}{n^3}\right](n=1,2,\cdots).$$

由于在 $x=\pi$ 处有 $f(\pi)=2\pi^2\neq\dfrac{1}{2}[G(\pi-0)+G(\pi+0)]$,

因此所求傅里叶级数展开式为

$$2x^2=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)-\frac{2}{n^3}\right]\sin nx\ (0\leqslant x<\pi).$$

(2) 将 $f(x)$ 展开为余弦级数,对 $f(x)$ 作偶延拓,得 $F(x)=2x^2\ (-\pi<x\leqslant\pi)$.

再对 $F(x)$ 作周期延拓,得 $G(x),x\in(-\infty,+\infty)$,易见 $G(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续,且

$$G(x)\equiv f(x)=2x^2,x\in[0,\pi].$$

计算其傅里叶系数如下：

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x^2 \mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi^2;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x^2 \cos nx \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{n}x^2 \sin nx + \frac{2}{n^2}x\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right]_0^{\pi} \\ &= (-1)^n \frac{8}{n^2}, (n = 1,2,\cdots); \end{aligned}$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1,2,\cdots).$$

因此所求余弦级数为 $2x^2 = \frac{2}{3}\pi^2 + 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

7 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，证明：

(1) 若 $f(x-\pi) = -f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0 = 0, a_{2k} = 0, b_{2k} = 0 \quad (k = 1,2,\cdots)$；

(2) 若 $f(x-\pi) = f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2k+1} = 0, b_{2k+1} = 0 \quad (k = 0,1,2,\cdots)$.

【证】 (1) 傅里叶系数

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} f(x-\pi)\mathrm{d}x\right], \end{aligned}$$

在 $\int_0^{\pi} f(x-\pi)\mathrm{d}x$ 中令 $x = u + \pi$，则

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{0} f(u)\mathrm{d}u\right] = 0;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx \mathrm{d}x - \int_0^{\pi} f(x-\pi)\cos nx \mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx \mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{0} f(u)\cos(n\pi + nu)\mathrm{d}u\right]. \end{aligned}$$

当 $n = 2k$ 时，$\cos(n\pi + nu) = \cos nu$. 代入上式即知

$$a_{2k} = 0 \quad (k = 1,2,\cdots);$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx \mathrm{d}x - \int_0^{\pi} f(x-\pi)\sin nx \mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx \mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{0} f(u)\sin(n\pi + nu)\mathrm{d}u\right]. \end{aligned}$$

当 $n = 2k$ 时，$\sin(n\pi + nu) = \sin nu$，代入上式亦有 $b_{2k} = 0 \quad (k = 1,2,\cdots)$.

(2) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{0} f(u)\cos(n\pi + nu)\mathrm{d}u\right]$;

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{0} f(u)\sin(n\pi + nu)\mathrm{d}u\right]$.

当 $n = 2k+1$ 时，$\cos(n\pi + nu) = -\cos nu, \sin(n\pi + nu) = -\sin nu$.

代入上述二式即知 $a_{2k+1} = 0, \quad b_{2k+1} = 0 \quad (k = 0,1,2,\cdots)$.

习题 12－8　一般周期函数的傅里叶级数

1 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表达式)：

(1) $f(x)=1-x^2\left(-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}\right)$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ -1 & \frac{1}{2}\leqslant x<1;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<3.\end{cases}$

【解】 (1) 函数 $f(x)$ 是半周期 $l=\frac{1}{2}$ 的偶函数,故

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots);\quad a_0=\frac{2}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{11}{6};$$

$$a_n=\frac{2}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos\frac{n\pi x}{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos 2n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=4\left[\frac{1-x^2}{2n\pi}\sin 2n\pi x-\frac{2x}{4n^2\pi^2}\cos 2n\pi x+\frac{2}{8n^3\pi^3}\sin 2n\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}(n=1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件且处处连续,故有

$$f(x)=\frac{11}{12}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(2n\pi x),x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) 函数 $f(x)$ 的半周期 $l=1$.

$$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2};$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\cos n\pi x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}\cos n\pi x\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\cos n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_1^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\sin n\pi x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}\sin n\pi x\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sin n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n\pi}\quad(n=1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件,其间断点为 $x=2k,2k+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}$,故有

$$f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\cos n\pi x+\frac{1}{n\pi}\left(1-2\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin n\pi x\right\},$$

$$x\in\mathbf{R}\Big\backslash\left\{2k,2k+\frac{1}{2}\ \Big|\ k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

(3) 函数$f(x)$的半周期$l=3$.

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\mathrm{d}x\right]=-1;$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

因$f(x)$满足收敛定理的条件,其间断点为$x=3(2k+1),k\in\mathbf{Z}$,故有

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{3}+(-1)^{n+1}\frac{6}{nx}\sin\frac{n\pi x}{3}\right\},$$

$$x\in\mathbf{R}\backslash\{3(2k+1)\ |\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

2 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数:

(1)$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<l/2,\\ l-x, & l/2\leqslant x\leqslant l;\end{cases}$　　(2)$f(x)=x^2\quad(0\leqslant x\leqslant 2)$.

【解】 (1) 先将$f(x)$展开成正弦级数. 注意到$f(0)=0$,作奇延拓得奇函数$F(x),x\in[-l,l]$,且使　$F(x)\equiv f(x),x\in[0,l]$.

再将$F(x)$作周期延拓,然后展开为傅里叶级数. 其傅里叶系数为

$$a_n=0,(n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\quad(n=1,2,\cdots),$$

故所求正弦级数为　$f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}\quad(0\leqslant x\leqslant l)$.

再将$f(x)$展开成余弦级数.

对$f(x)$在$[-l,l]$上作偶延拓得偶函数$G(x)$,且使　$G(x)\equiv f(x),x\in[0,l]$.

再将$G(x)$作周期延拓,然后展开成傅里叶级数其系数为

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}x\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\,\mathrm{d}x\right]=\frac{l}{2};$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{l}\left(\frac{2l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{l^2}{n^2\pi^2}-\frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos n\pi\right)$$

$$= \frac{2l}{\pi^2 n^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n\right](n = 1,2,\cdots);$$

$$b_n = 0(n = 1,2,\cdots).$$

故所求余弦级数为

$$f(x) = \frac{l}{4} + \frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n\right]\cos\frac{n\pi x}{l} \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

(2) 先将 $f(x)$ 展开成正弦级数.

对 $f(x)$ 作奇延拓,得奇函数 $F(x)$,即 $F(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,2], \\ -x^2, & x \in (-2,0). \end{cases}$

再将 $F(x)$ 作周期延拓得 $G(x)$,$x \in (-\infty, +\infty)$,易见 $x = 2$ 是 $G(x)$ 的间断点.计算 $G(x)$ 的傅里叶系数如下:

$$a_n = 0 \quad (n = 0,1,2,\cdots);$$

$$b_n = \int_0^2 x^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx = \left[-\frac{2x^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{8x}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{16}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{\pi}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n - 1]\right\} (n = 1,2,\cdots).$$

故所求正弦级数为

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n - 1)]\right\}\sin\frac{n\pi x}{2}, x \in [0,2).$$

再将 $f(x)$ 展开成余弦级数.

将 $f(x)$ 作偶延拓,得偶函数 $F(x)$,即 $F(x) = x^2, x \in (-2,2]$,

再作 $F(x)$ 的周期延拓得 $G(x)$,$x \in (-\infty, +\infty)$,显然 $G(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续.计算 $G(x)$ 的傅里叶系数如下:

$$a_0 = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3};$$

$$a_n = \int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \left[\frac{2x^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{8x}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} - \frac{16}{n^3\pi^3}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{16(-1)^n}{\pi^2 n^2}, (n = 1,2,3,\cdots);$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1,2,3,\cdots),$$

故所求余弦级数为 $f(x) = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}, x \in [0,2].$

3 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,它在区间 $[-1,1)$ 上的表达式为 $f(x) = e^{-x}, x \in [-1,1)$,将 $f(x)$ 展开成复数形式的傅里叶级数.

【解】 傅里叶系数的复数形式为

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-in\pi x}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-x}e^{-in\pi x}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-(1+in\pi)x}dx$$

$$= -\frac{1}{2(1+in\pi)}\left[e^{-(1+in\pi)x}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2(1+in\pi)}\left[e^{(1+in\pi)} - e^{-(1+in\pi)}\right]$$

$$= \frac{1 - in\pi}{2(1+n^2\pi^2)}(e - e^{-1})\cos n\pi$$

$$= (-1)^n \frac{1-\mathrm{i}n\pi}{1+n^2\pi^2}\mathrm{sh}1, n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

因此 $f(x)$ 的傅里叶级数的复数形式为

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{1-\mathrm{i}n\pi}{1+n^2\pi^2}\mathrm{sh}1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x}, (x \neq 2k+1, k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

4 设 $u(t)$ 是周期为 T 的周期函数,已知它的傅里叶级数的复数形式为

$$u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}} \quad (-\infty < t < +\infty).$$

试写出 $u(t)$ 的傅里叶级数的实数形式(即三角形式).

【解】 由欧拉公式,有

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}} - \frac{1}{n}\sin\frac{-n\pi\tau}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-2n\pi t}{T}}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\cos\frac{2n\pi t}{T}.$$

因此 $u(t)$ 的傅里叶级数的实数形式为

$$u(t) = \frac{ht}{T} + \frac{2h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi t}{T}\cos\frac{2n\pi t}{T} \quad (-\infty < t < +\infty).$$

总习题十二

1 填空:

(1) 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 是它收敛的________条件,不是它收敛的________条件;

(2) 部分和数列 $\{s_n\}$ 有界是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的________条件;

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定________;若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 必定________.

【解】 (1) 必要,充分; (2) 充要; (3) 收敛,发散.

2 下题中给出了四个结果,从中选出一个正确的结果.

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数,它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $|x|$,则 $f(x)$ 的傅里叶级数为( ).

(A) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \cdots\right]$

(B) $\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2^2}\sin 2x + \frac{1}{4^2}\sin 4x + \frac{1}{6^2}\sin 6x + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\sin 2nx + \cdots\right]$

(C) $\frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \cdots\right]$

(D) $\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2^2}\cos 2x+\frac{1}{4^2}\cos 4x+\frac{1}{6^2}\cos 6x+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\cos 2nx+\cdots\right]$

【解】 偶函数 $f(x)$ 的傅里叶级数是余弦级数，故排除(B).

又因为 $\qquad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\pi\neq 0,$

所以排除(C)与(D)，从而选(A).

3 判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2}$； (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$；

(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{10}n}$； (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}(a>0,s>0)$.

【解】 (1) $u_n=\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故由比较极限审敛法知原级数发散.

(2) $u_n=\frac{(n!)^2}{2n^2}=\frac{[(n-1)!]^2}{2}\to+\infty\ (n\to\infty)$，由于一般项不趋于零，故该级数发散.

(3) $u_n=\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}\leqslant\frac{n}{2^n}=v_n$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 是收敛的 $\left(\text{事实上}, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1, \text{据比值审敛法知} \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} \text{收敛}\right)$，故由比较审敛法知原级数收敛.

(4) $u_n=\frac{1}{\ln^{10}n}$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{10}n}=+\infty$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故由比较极限审敛法知原级数发散.

(5) $u_n=\frac{a^n}{n^s}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{(\sqrt[n]{n})^s}=a$. 由根值审敛法知，当 $a<1$ 时级数收敛，当 $a>1$ 时级数发散.

当 $a=1$ 时，原级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$，由 p-级数的结论知，当 $s>1$ 时级数收敛，当 $s\leqslant 1$ 时级数发散.

4 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 也收敛.

【证】 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0$，根据极限的定义有 $\forall\varepsilon>0$(不妨取 $\varepsilon=1$)，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，必有 $u_n+v_n<1$，于是

$$(u_n+v_n)^2<u_n+v_n\ (n>N).$$

由比较原理知 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛.

5 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,且 $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$,问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是否也收敛?试说明理由.

【解】 不一定.例如 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛,

令 $v_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$,则 $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$,

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right]$发散.

【注】 之所以 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛性不同,因为它们不一定是正项级数.

6 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$.

【解】 (1) 令 $u_n = (-1)^n \frac{1}{n^p}$.

若 $p > 1$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛,从而原级数绝对收敛;当 $p \leqslant 0$,$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$,故原级数发散;

若 $0 < p < 1$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散,另外,由于 $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p}$,且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$,由莱布尼兹判别法

知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

(2) 令 $u_n = (-1)^{n+1} \dfrac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$,则 $|u_n| \leqslant \frac{1}{\pi^{n+1}}$,由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{n+1}}$ 收敛,从而原级数绝对收敛.

(3) 令 $u_n = (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$,则 $|u_n| = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,从而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足莱布尼兹条件,从而原级数条件收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 \times e^{-1} < 1.$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 收敛,于是原级数绝对收敛.

7 求下列极限:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$; (2) $\lim_{n\to\infty}[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdots(2^n)^{1/3^n}]$.

【解】 (1) 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$,由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1$,

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛,设其和为 s,于是 $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} = s$,

从而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{s}{n} = 0.$$

(2) 原式 $= 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}+\cdots}$,

设 $s = \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}+\cdots$,则 $\frac{1}{3}s = \frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^{n+1}}+\cdots$,

两式相减得 $$\frac{2}{3}s = \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots = \frac{1/3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2},$$

从而 $s = \frac{3}{4}$,所以原式 $= 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8}$.

8 求下列幂级数的收敛区间:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{n}x^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$.

【解】 (1) $$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n+5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}{3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+5}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{5}.$$

当 $x = \frac{1}{5}$ 时,原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right]$,由于 $\frac{1}{n}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right] > \frac{1}{n}$,故发散;

当 $x = -\frac{1}{5}$ 时,原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left[1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$,显然满足莱布尼兹判别法的条件,故收敛.

所以,原级数的收敛区间为 $\left[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$.

(2) 因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$,故 $R = \frac{1}{e}$.

当 $x = \frac{1}{e}$ 时,级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n$;

当 $x=-\frac{1}{e}$ 时，级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n$.

又 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n=\frac{1}{\sqrt{e}}\neq 0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right]^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n$ 均发散. 于是原级数的收敛区间为 $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

(3) 令 $t=x+1$. 原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}nt^n$. 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，所以，收敛半径为 1.

当 $t=\pm 1$ 时，级数分别成为 $\sum_{n=1}^{\infty}n$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 都发散，因此收敛区间为 $-1<t<1$，即 $-1<x+1<1$ 或 $-2<x<0$，所以原级数的收敛区间为 $(-2,0)$.

(4) 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}}x^{2n+2}\Big/\frac{n}{2^n}x^{2n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}x^2=\frac{1}{2}x^2$.

当 $\frac{1}{2}x^2<1$ 即 $|x|<\sqrt{2}$ 时级数收敛；当 $\frac{1}{2}x^2>1$ 即 $|x|>\sqrt{2}$ 时级数发散，当 $|x|=\sqrt{2}$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}n$ 发散. 故原级数的收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

9 求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

【解】 (1) 可求得收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. 设

$$s(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}\right]'$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\left[\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]'=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$，$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(2) 可求得收敛域为 $[-1,1]$，设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，则

$$s'(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2},x\in(-1,1),$$

故 $\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x$，$s(x)=s(0)+\arctan x=\arctan x$.

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=\arctan x$，$x\in(-1,1)$.

(3) 可求得收敛域为(0,2),设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$,则

$$\frac{s(x)}{x-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n\right]'=\left[\frac{x-1}{1-(x-1)}\right]'=\frac{1}{(2-x)^2},$$

故 $s(x)=\frac{x-1}{(2-x)^2},x\in(-1,1)$.

(4) 易得收敛域为$[-1,1]$,设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$,则

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n,$$

令 $s_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $s_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$,则

$s'_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},x\in(-1,1)$,

$s_1(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x),x\in(-1,1)$,

$[xs_2(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},x\in(-1,1)$,

$xs_2(x)=\int_0^x\frac{x}{1-x}\mathrm{d}x=-x-\ln(1-x),x\in(-1,1)$,

$$s_2(x)=\begin{cases}-1-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in(-1,0)\cup(0,1),\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

故 $s(x)=s_1(x)-s_2(x)=\begin{cases}-\ln(1-x)+1+\frac{\ln(1-x)}{x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1),\\ 0, & x=0.\end{cases}$

10 求下列数项级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}$.

【解】 (1) 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}$,又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\mathrm{e},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\mathrm{e},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=2\mathrm{e}$.

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2}[(2n+1)+1]\frac{1}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]=\frac{1}{2}(\cos1+\sin1).$$

11 将下列函数展开成 x 的幂级数：

(1) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　(2) $\dfrac{1}{(2-x)^2}$.

【解】 (1) 因为 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\ (-1<x<1)$$

所以 $f(x)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$,此级数在 $(-1,1)$ 内收敛.

当 $x=\pm1$ 时,级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{1}{2n+1}$.

利用莱布尼兹判别法知,该级数收敛,所以展开区间为 $[-1,1]$.

(2) $\dfrac{1}{(2-x)^2}=\left(\dfrac{1}{2-x}\right)'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\right]'=\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\dfrac{x^{n-1}}{2^n}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}x^{n-1},\ -2<x<2.$$

12 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ \mathrm{e}^x, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

【解】 由于傅里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi}-1),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi(1+n^2)}\left[\mathrm{e}^x\cos nx+n\mathrm{e}^x\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi(1+n^2)}\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi(1+n^2)}[\mathrm{e}^x\sin nx-n\mathrm{e}^x\cos nx]_0^{\pi}$$

$$=\frac{n}{\pi(1+n^2)}[1-\mathrm{e}^x(-1)^n]\quad(n=1,2,\cdots).$$

因此 $f(x)$ 的傅里叶系数展开式为

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx),$$

其中 $-\infty<x<+\infty$,且 $x\neq n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

13 将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant h,\\ 0, & h<x\leqslant\pi\end{cases}$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

【解】 (1) 将 $f(x)$ 展开成正弦级数. 对 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上作奇延拓得奇函数 $F(x)$,且

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(0,\pi],\\ 0, & x=0,\\ -f(-x), & x\in[-\pi,0).\end{cases}$$

于是傅里叶系数为

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^h$$

$$=\frac{2}{\pi n}(1-\cos nh)\quad(n=1,2,\cdots).$$

因为 $F(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足狄利克雷条件,但是 $f(x)$ 在 $x=0$ 及 $x=h$ 两点处不连续,故所求正弦级数为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nh}{n}\sin nx,x\in(0,h)\cup(h,\pi].$$

在 $x=0$ 及 $x=h$ 两点处级数分别收敛于 0 和 $\frac{1}{2}$.

(2) 将 $f(x)$ 展开成余弦级数. 对 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上作偶延拓得偶函数 $G(x)$,且在 $[0,\pi]$ 上使 $G(x)\equiv f(x)$,则傅里叶系数为

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\mathrm{d}x=\frac{2h}{\pi};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi n}\sin nx\Big|_0^h$$

$$=\frac{2}{\pi n}\sin nh\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

于是所求余弦级数为

$$f(x)=\frac{h}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx,x\in[0,h)\cup(h,\pi].$$

在 $x=h$ 点处 $f(x)$ 不连续,故级数在 $x=h$ 点处收敛于 $\frac{1}{2}$.

考研试题选解

1 设 $p_n=\frac{a_n+|a_n|}{2}$, $q_n=\frac{a_n-|a_n|}{2}$, $n=1,2,\cdots$,则下列命题中正确的是

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定.

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定.

【分析】 利用正项级数的比较判别法，由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛以及

$$0 \leqslant p_n \leqslant |a_n|, \quad 0 \leqslant -q_n \leqslant |a_n|$$

可知，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-q_n)$ 都收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛，故应选(B).

2 设 $a_n > 0, n = 1,2,\cdots$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则下列结论正确的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散.　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛.　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛.

【分析】 注意，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} - a_{2n})$ 是把收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 各项不改变顺序且相邻两项合并为一项构成的新级数，由收敛级数的性质知该级数必收敛，故应选(D).

【评注】 由题设知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 条件收敛，从而由其正项组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 与由其负项组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_{2n}) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 都是发散的，进而由正项级数的比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ 也是发散的，这表明结论(A),(B),(C) 都不正确.

3 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = \lambda$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 a_n = 0$.

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = \lambda$.

【分析一】 这实质上是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性与无穷小 a_n 的阶的关系问题.

结论(B) 中，$\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = \lambda$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\dfrac{1}{n}} = \lambda \neq 0$，亦即 a_n 与 $\dfrac{1}{n}$ 同阶，故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

应选(B).

【分析二】 举反例说明(A)、(C)、(D) 不正确.

关于(A)，若 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$，即 $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)(n \to +\infty)$. 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 不一定收敛. 如 $a_n = \dfrac{1}{n\ln n} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$，但 $\sum_{n=3}^{\infty} a_n = \sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$ 发散. 故(A) 不成立.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 a_n = 0$,即 $a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,不一定有 $a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,如 $a_n = \frac{1}{n^{3/2}}$,故(C)不成立.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,不一定有 a_n 与 $\frac{1}{n}$ 同阶(即 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = \lambda \neq 0$),如 $a_n = \frac{1}{n\ln n}$,$\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 发散,但 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$,即 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$,因此(D)也不成立.应选(B).

4 设有两个数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,则

(A)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.　　(B)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.　　(D)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

【分析一】 考察(C).由 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \Rightarrow \{a_n\}$ 有界,由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |b_n| = 0 \Rightarrow \{|b_n|\}$ 有界 $\Rightarrow 0 \leqslant a_n^2 b_n^2 = a_n^2 |b_n||b_n| \leqslant M|b_n|$($\forall n$,$M$ 为某常数).再由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M|b_n|$ 收敛及比较原理 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.选(C).

【分析二】 举例说明(A),(B),(D)不正确.

设 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.(A)不正确.

设 $a_n = \frac{1}{n}$,$b_n = \frac{1}{n}$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.(B)不正确.

设 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$,$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,(D)不正确.

因此选(C).

5 设 $u_n \neq 0$($n = 1,2,3,\cdots$),且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{u_n} = 1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right)$

(A)发散.　　(B)绝对收敛.

(C)条件收敛.　　(D)收敛性根据所给条件不能判定.

【分析】 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{u_n}}{\frac{1}{n}} = 1 > 0 \Rightarrow n$ 充分大时即 $\exists N, n > N$ 时 $\frac{1}{u_n} > 0$,且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$,不妨认为 $\forall n, u_n > 0$,因而所考虑级数是交错级数,但不能保证 $\frac{1}{u_n}$ 的单调性.

按定义考察部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_{k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{u_k} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{u_{k+1}}$$
$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{u_k} + \sum_{l=2}^{n+1} (-1)^l \frac{1}{u_l} = \frac{1}{u_1} + \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}} \to \frac{1}{u_1}\ (n \to +\infty),$$

$\Rightarrow$ 原级数收敛 .

再考察取绝对值后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$. 注意 $\dfrac{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{u_n}+\frac{n+1}{u_{n+1}}\cdot\frac{n}{n+1}\to 2$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$发散 . 因此选(C).

6 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为$\frac{\sqrt{5}}{3}$与$\frac{1}{3}$,则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{b_n^2}x^n$ 的收敛半径为

(A)5 . (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{5}$.

【分析】 设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$和$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$都存在,由题设知

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{3}{\sqrt{5}},\qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=3.$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}^2}\cdot\frac{b_n^2}{a_n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2\cdot\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right)^2=\frac{1}{5}.$$

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{b_n^2}x^n$ 的收敛半径是 5 . 故应选(A).

【评注】 利用正项级数的比值判别法得出的求幂级数收敛半径 R 的方法是:设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 满足$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$,则有(1) 当 $0<\rho<+\infty$ 时,$R=\frac{1}{\rho}$;(2) 当 $\rho=0$ 时,$R=+\infty$;(3) 当 $\rho=+\infty$ 时,$R=0$. 这种方法的前提是$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$存在或是无穷大量 . 因而本题应当增加“设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$和$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$都存在”的条件 .

7 已知$f_n(x)$ 满足

$$f'_n(x)=f_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x\quad (n\text{ 为正整数}),$$

且$f_n(1)=\frac{\mathrm{e}}{n}$,求函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和 .

【解】 由已知条件可知$f_n(x)$ 满足一阶线性微分方程

$$f'_n(x)-f_n(x)=x^{n-1}\mathrm{e}^x\Rightarrow\text{其通解为}\quad f_n(x)=\mathrm{e}^x\left(\frac{x^n}{n}+C\right).$$

由条件$f_n(1)=\frac{\mathrm{e}}{n}$,得 $C=0$,故$f_n(x)=\frac{x^n\mathrm{e}^x}{n}$. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\mathrm{e}^x}{n}=\mathrm{e}^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$,其收敛域为$[-1,1)$,且 $S(0)=0$,当 $x\in(-1,1)$ 时,有

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

故 $$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = -\ln(1-x).$$

由 $S(x)$ 与 $-\ln(1-x)$ 在 $x=-1$ 的连续性知,上述和函数公式在 $x=-1$ 处也成立.于是,当 $-1 \leqslant x < 1$ 时,有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^x S(x) = -\mathrm{e}^x \ln(1-x)$.

8 (1) 验证函数 $y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots (-\infty < x < +\infty)$ 满足微分方程 $y'' + y' + y = \mathrm{e}^x$;

(2) 利用(1)的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

【解】 (1) 因为幂级数

$$y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots$$

的收敛域是$(-\infty, +\infty)$,因而可在$(-\infty, +\infty)$上逐项求导数,得

$$y'(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \cdots,$$

$$y''(x) = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \cdots,$$

所以 $$y'' + y' + y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \mathrm{e}^x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

(2) 与 $y'' + y' + y = \mathrm{e}^x$ 相应的齐次微分方程为 $y'' + y' + y = 0$,

其特征方程为 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$,特征根为 $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

因此齐次微分方程的通解为 $Y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

设非齐次微分方程的特解为 $y^* = A\mathrm{e}^x$,将 y^* 代入方程 $y'' + y' + y = \mathrm{e}^x$ 可得

$$A = \frac{1}{3},\text{即有} \quad y^* = \frac{1}{3}\mathrm{e}^x.$$

于是,方程通解为 $y = Y + y^* = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{3}\mathrm{e}^x$.

当 $x=0$ 时,有 $\begin{cases} y(0) = 1 = C_1 + \frac{1}{3}, \\ y'(0) = 0 = -\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 + \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = 0.$

于是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数为 $y(x) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}\mathrm{e}^x \quad (-\infty < x < +\infty)$.

9 求幂级数 $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$ $(|x| < 1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值.

【解】 将等式 $f(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$ $(|x| < 1)$ 逐项求导,得

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1} = -\frac{x}{1+x^2}\ (|x| < 1).$$

上式两边从 0 到 x 积分,有

$$f(x) - f(0) = -\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\ (|x| < 1).$$

由于 $f(0) = 1$,故得到了和函数 $f(x)$ 的表达式

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\ (|x| < 1).$$

令 $f'(x) = 0$,可求出函数 $f(x)$ 有唯一驻点 $x = 0$,因为

$$f''(x) = -\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = -1 < 0,$$

可见 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处取得极大值,且极大值为 $f(0) = 1$.

10 设级数

$$\frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

的和函数为 $S(x)$. 求:(Ⅰ)$S(x)$ 所满足的一阶微分方程; (Ⅱ)$S(x)$ 的表达式.

【解】 (Ⅰ) $S(x) = \dfrac{x^4}{2\cdot 4} + \dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \dfrac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots$,

易见 $S(0) = 0$,且幂级数的收敛域为$(-\infty, +\infty)$,在$(-\infty, +\infty)$上逐项求导,得

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} + \frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots \\ &= x\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots\right) = x\left[\frac{x^2}{2} + S(x)\right]. \end{aligned}$$

因此 $S(x)$ 是初值问题 $y' = xy + \dfrac{x^3}{2}$, $y(0) = 0$ 的解.

(Ⅱ)方程 $y' = xy + \dfrac{x^3}{2}$ 的通解为 $y = \mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\left(\int \dfrac{x^3}{2}\mathrm{e}^{-\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) = -\dfrac{x^2}{2} - 1 + C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$,

由初始条件 $y(0) = 0$,求得 $C = 1$.

故 $y = -\dfrac{x^2}{2} + \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} - 1$,因此和函数 $S(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} - 1 \quad (-\infty < x < +\infty)$.

11 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

【解】 当 $x = 0$ 时幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 显然收敛. 当 $x \neq 0$ 时,因为

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)}\right|\cdot\left|\frac{n(2n-1)}{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}\right| = x^2,$$

故当 $x^2 < 1$ 即 $|x| < 1$ 时幂级数收敛,当 $x^2 > 1$ 即 $|x| > 1$ 时幂级数发散,又当 $x = 1$ 时幂级数变为收敛的交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$,当 $x = -1$ 时幂级数变为收敛的交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(2n-1)}$.
从而幂级数的收敛域为$[-1,1]$.

令 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$, $|x| \leqslant 1$, 又设 $S_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$, $|x| \leqslant 1$, 则

$S(x) = xS_1(x)$. 注意 $S_1(0) = 0, S_1'(0) = 0$,又

$$S_1''(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1} = \frac{2}{1+x^2}, \ |x| < 1,$$

逐项积分得

$$S_1'(x) = S_1'(0) + \int_0^x \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\arctan x, \ |x| < 1.$$

再逐项积分得

$$S_1(x) = S_1(0) + 2\int_0^x \arctan t\mathrm{d}t = 2\left(t\arctan t\Big|_0^x - \int_0^x \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^2}\right)$$

$$= 2\left[x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right], \ |x| < 1.$$

由于幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$ 在 $x = \pm 1$ 收敛,又上面所得函数在 $x = \pm 1$ 连续,故有和函数公式

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)} = 2x\arctan x - \ln(1+x^2), \ |x| \leqslant 1.$$

代入即得 $\quad S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)} = 2x^2\arctan x - x\ln(1+x^2), \ |x| \leqslant 1.$

12 设银行存款的年利率为 $r = 0.05$,并依年复利计算. 某基金会希望通过存款 A 万元实现第一年提取 19 万元,第二年提取 28 万元,…,第 n 年提取$(10+9n)$万元,并能按此规律一直提取下去,问 A 至少应为多少万元?

【解】 设开始时刻为 $t = 0$,记 $0.05 = r$. 由题设知 A(单位:万元)应满足:

在第 1 年年末时存款余额

$$A(1+r) - 19 > 0 \ \Leftrightarrow \ A > \frac{19}{1+r},$$

在第 2 年年末时存款余额

$$[A(1+r) - 19](1+r) - 28 > 0 \ \Leftrightarrow \ A > \frac{19}{1+r} + \frac{28}{(1+r)^2},$$

如此继续下去,在第 n 年末时存款余额

$$A(1+r)^n - 19(1+r)^{n-1} - 28(1+r)^{n-2} - \cdots - (10+9n) > 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad A > \frac{19}{1+r} + \frac{28}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{10+9n}{(1+r)^n}.$$

不难看出,能够使取款一直继续下去的 A 应满足

$$A \geqslant \frac{19}{1+r} + \frac{28}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{10+9n}{(1+r)^n} + \cdots$$

$$\Leftrightarrow \qquad A \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(10+9n)}{(1+r)^n} = 10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^n} + 9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+r)^n}.$$

在已知的幂级数和函数公式

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = \frac{1}{1-x}(|x| < 1), \quad \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}(|x| < 1)$$

中，令 $x = \dfrac{1}{1+r}$ 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^n} = \frac{\dfrac{1}{1+r}}{1-\dfrac{1}{1+r}} = \frac{1}{r},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+r)^n} = \frac{\dfrac{1}{1+r}}{\left(1-\dfrac{1}{1+r}\right)^2} = \frac{1}{r}+\frac{1}{r^2},$$

故 $A \geqslant \dfrac{10}{r} + 9\left(\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r^2}\right) = \dfrac{19}{r}+\dfrac{9}{r^2} = 3980$(万元)，即 A 至少应为 3980 万元．

13 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\dfrac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$．

【分析与求解】 这是缺项幂级数．令 $t = x^2$，考察 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n t^n$，其中 $a_n = (-1)^{n-1}\left[1+\dfrac{1}{n(2n-1)}\right]$.

由 $$1 < \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \sqrt[n]{2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n t^n$ 的收敛半径为 1 $\Rightarrow$ 原幂级数收敛半径为 1，收敛区间为 $(-1,1)$．

下面求和函数：

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n} = x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$
$$= \frac{x^2}{1+x^2}\ (|x|<1),$$

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n},$$

$$\Rightarrow\qquad f_2'(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

$$f_2''(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)} = \frac{2}{1+x^2}\quad(|x|<1).$$

注意 $f_2'(0) = 0, f_2(0) = 0$，积分两次得

$$f_2'(x) = \int_0^x f_2''(t)\,dt = 2\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt = 2\arctan x,$$

$$f_2(x) = \int_0^x f_2'(t)\,dt = 2\int_0^x \arctan t\,dt = 2x\arctan x - 2\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt$$
$$= 2x\arctan x - \ln(1+x^2)\quad(|x|<1).$$

因此，$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2} + 2x\arctan x - \ln(1+x^2)\ (|x|<1)$．

【评注】 求 $S(x)$ 的表达式可以有多种方法，但本质上是相同的．例如下述方法：

记 $$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n},x\in(-1,1)，则\ S(0) = 0,\quad \lim_{x\to0}\frac{S(x)}{x} = 0\ .$$

当 $x \neq 0$ 时，$\left[\dfrac{S(x)}{x}\right]' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}x^{2n-2} = \dfrac{1}{2x^2}\ln(1+x^2)$，

故 $$\frac{S(x)}{x}=\int_0^x\frac{\ln(1+t^2)}{2t^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2x}\ln(1+x^2)+\arctan x\ .$$

所以 $$S(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),x\in(-1,1)\ .$$

14 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛,其和函数 $y(x)$ 满足

$$y''-2xy'-4y=0,y(0)=0,y'(0)=1.$$

(Ⅰ)证明 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots$; (Ⅱ)求 $y(x)$ 的表达式.

【证明与求解】 (Ⅰ)幂级数 $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在收敛区间 $(-\infty,+\infty)$ 内可逐项求导任意次,

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\qquad y''-2xy'-4y&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n\\&=2a_2-4a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+2)a_n\Big]x^n\\&=0.\end{aligned}$$

由 $y(0)=a_0=0\ \Rightarrow\ a_2=0,(n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+2)a_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$

$$\Rightarrow\qquad a_0=0,a_2=0,\quad a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

(Ⅱ)由 $a_2=0$,及 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$

$$\Rightarrow\qquad a_2=a_4=a_6=\cdots=a_{2n}=0\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

由初值 $y'(0)=a_1=1$ 及 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$

$$\Rightarrow\qquad a_3=\frac{2}{2}a_1=1,\quad a_5=\frac{2}{4}a_3=\frac{1}{2},\quad a_7=\frac{1}{3}a_5=\frac{1}{3!},\quad a_9=\frac{1}{4!}.$$

易归纳证得 $\quad a_{2n+1}=\dfrac{1}{n!}\quad(n=0,1,2,\cdots)(0!=1)$.

$$\Rightarrow\qquad y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=x\mathrm{e}^{x^2}.$$

【评注】 ① 本题考查幂级数的运算以及利用重要的初等函数展开式求幂级数的和函数.

已知某幂级数满足给定的微分方程,求此幂级数的系数及和函数,其方法是,按逐项求导将该幂级数代入微分方程,并用幂级数的加、减、乘等运算法则,将同次幂系数整理在一起,令各同次幂的系数之和为零,推出系数的递推公式,求出系数,从而得到该幂级数.如果题目还要求收敛半径、收敛区间、收敛域以及和函数的话,按通常的方法去做即可.这种题的侧重点是幂级数,不涉及用初等方法去解微分方程.

② 在(Ⅰ)的证明中,不能正确地进行下标变换是最常见的错误.而有的考生将 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n,y'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 和 $y''=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$ 代入 $y''-2xy'-4y=0$ 后,不进行整理和化

简就直接说结论成立.

15 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

【分析与求解】 求和函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1}=xS_1(x),$$

转化为求 $$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}.$$

易逐项求导得

$$S'_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}\quad(|x|<1).$$

又 $S_1(0)=0$,于是

$$S_1(x)=\int_0^x S'_1(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\arctan x.$$

因此 $S(x)=x\arctan x$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1}=x\arctan x,\ x\in[-1,1].\tag{*}$$

$[-1,1]$ 就是左端幂级数的收敛域.

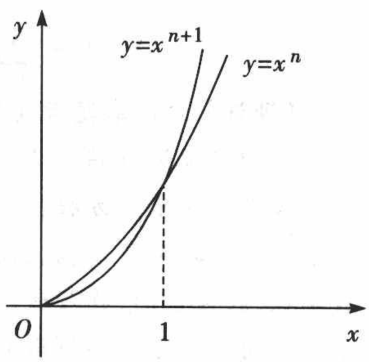
由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$ 有相同的收敛域,又逐项求导保持收敛半径不变,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1}$ 的收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=\pm1$ 时 $(*)$ 式左端级数收敛,右端函数 $x\arctan x$ 连续,故 $(*)$ 式在 $x=\pm1$ 处也成立.

16 设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 所围成区域的面积,记 $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$,求 S_1 与 S_2 的值.

【分析与求解】

(Ⅰ) 先求 a_n. 易求得 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}$ 的交点为 $(0,0)$,$(1,1)$,于是曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}$ 所围区域的面积为(如图)

$$a_n=\int_0^1(x^n-x^{n+1})\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.$$



第 16 题图

(Ⅱ) 按定义求 $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,即求部分和的极限

$$\begin{aligned}S_1&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k+1}\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(Ⅲ) 求 S_2.

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)+1} - \frac{1}{(2n-1)+2}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \cdots$$

$$= 1 - \left[1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \cdots\right]$$

$$= 1 - \ln 2,$$

其中用到了 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad (-1 < x \leqslant 1)$,

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \cdots$$（收敛级数的结合律）.

【评注】 若想不到用 $\ln(1+x)(x=1)$ 的展开式，就要引进幂级数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$，将求 $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}$ 转化为求幂级数的和函数. 由

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} x^{2(n-1)} = x\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{x}{1-x^2}(|x| < 1)$$

$$\Rightarrow \quad S'(x) = S'(0) + \int_0^x S''(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t}{1-t^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}(1-t^2)}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

$$\Rightarrow \quad S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x \frac{1}{2}\ln(1-t^2)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{x}{2}\ln(1-x^2) + \int_0^x \frac{1}{2}\,\frac{-2t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t = -\frac{x}{2}\ln(1-x^2) - \int_0^x \frac{t^2-1+1}{1-t^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{x}{2}\ln(1-x^2) + x + \frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{x}{2}\ln(1-x^2) + x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|$$

$$= \frac{1}{2}(1-x)\ln(1-x) - \frac{1}{2}(x+1)\ln(x+1) + x \quad (|x| < 1).$$

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$ 在 $x=1$ 收敛，又

$$\lim_{x\to 1-0} S(x) = \lim_{x\to 1-0}\left[\frac{1}{2}(1-x)\ln(1-x) - \frac{1}{2}(x+1)\ln(x+1) + x\right]$$

$$= 1 - \ln 2,$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} = 1 - \ln 2$.

17 将函数 $f(x) = \arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

【分析与求解】 (1) 因为 $f'(x)$ 简单，先求 $f'(x)$ 的展开式，然后逐项积分得 $f(x)$ 的展开式

. 因

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^2}\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)' = \frac{-2}{1+4x^2} = -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n},\ x \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

又 $f(0) = \frac{\pi}{4}$,两边积分得

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - 2\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n t^{2n}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1},\ x \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

因为 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 连续,$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛,所以

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1},\ x \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

(2) 令 $x = \frac{1}{2}$,得 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}\frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

又 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,因此 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

【评注】 ① 将函数展开成指定点的幂级数是级数部分的一类重要问题,一般地都是利用几个简单函数的麦克劳林级数作间接展开.在展开过程中会用到幂级数的有关性质,如线性运算性质及逐项积分和逐项求导的性质等.求数项级数的和一般则是将此数项级数看成是某个函数项级数在一点的值,先求函数项级数的和函数,再求和函数在指定点的值.

② 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和也可用其他方法求得,如:

考虑 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, x \in [-1,1]$,则

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}, x \in (-1,1),$$

且 $S(0) = 0$,所以

$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \arctan x, x \in [-1,1],$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = S(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

18 设 $x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$,则 $a_2 =$ ________.

【分析】 这是求傅氏系数的问题.

已知 $f(x) = x^2(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ 是以 2π 为周期的偶函数,按傅氏系数计算公式得

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}(\sin 2x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2x\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}(\cos 2x) = \frac{1}{\pi}x\cos 2x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x = 1.$$

【评注】 求傅里叶系数首先应弄清楚此傅里叶级数的周期是多少?是否有奇、偶性?这两个问题弄清楚了,那么只要套用相应的公式即可.