一、求方程 $x^3-x^2-0.8=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的一个根，建立以下两种迭代格式：

(a) $x_{k+1}=\sqrt[3]{0.8+x_k^2}$　　(b) $x_{k+1}=\sqrt{x_k^3-0.8}$

(1) 判断这两个迭代格式的敛散性

(2) 对收敛的迭代格式取 $\varepsilon=10^{-3}$ 进行计算（保留小数点后四位）

二.(1) 计算如下矩阵A的Cholesky(LL^T)分解

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & 3.25 & -3 & 4 \\ -6 & -3 & 11.5 & 0.5 \\ 2 & 4 & 0.5 & 0.75 \end{pmatrix}$$

(2). 设 $a_{ii}\neq 0$ $(i=1,2)$. 写出方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$ 的Jacobi迭代格式，并试证明其收敛的充要条件是 $\left|\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|<1$

本题分数	20 分
得　　分	

三、给定数据表

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0.25	0.75	2	5	15

用三次拉格朗日插值计算 $f(0.5)$ 的近似值。

本题分数	16分
得　分	

四、已知 $S = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin^2\theta}\,d\theta$，其中 $a=(2R+H+h)/2$，$c=(H-h)/2$，$R=6371$，$h=439$，$H=2384$，试将区间4等分，计算分点的函数值，利用复化辛普森公式计算S。

本题分数	17分
得　分	

五、用梯形公式解常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y' = 8-3y, & 1 \le x \le 1.8, \\ y(1) = 2, \end{cases}$$

取步长 $h = 0.2$，计算 $y(1.2)$，$y(1.4)$，$y(1.6)$ 和 $y(1.8)$ 的近似值（保留小数点后5位）。

已知$x_0, x_1, \cdots x_n$是互异的节点，$l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$是拉格朗日插值基函数，证明：(1) $\sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x)=x^k \quad k=0,1,\cdots n$

(2) $\sum_{i=0}^{n}(x_i-x)^k l_i(x)=0 \quad k=0,1,\cdots n$

一、解：(1) $\varphi_1(x)=(0.8+x^2)^{\frac{1}{3}}$ $x^*\approx 1.5$ $x_0=1.5$

$$\varphi_1'(x)=\frac{1}{3}\cdot(0.8+x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x$$

$$|\varphi_1'(1.5)|=\frac{1}{(0.8+1.5^2)^{\frac{2}{3}}}<1$$ ∴收敛

$$\varphi_2(x)=(x^3-0.8)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_2'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2}{\sqrt{x^3-0.8}}$$

$$|\varphi_2'(1.5)|=\frac{3}{2}\times 1.5^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1.5^3-0.8}}=\frac{1.5^3}{\sqrt{1.5^3-0.8}}>1$$ ∴发散.

(2) $x_0=1.5000$

$x_1\approx 1.4502$ $x_3\approx 1.4153$ $x_6\approx 1.4063$ $x_9\approx 1.4053$

$x_2\approx 1.4265$ $x_4\approx 1.4100$ $x_7\approx 1.4057$ $x_{10}\approx 1.4052$

$x_5\approx 1.4075$ $x_8\approx 1.4054$ 取 $x^*=1.4052$

二. 解:

$$(A\vdots I)=\left(\begin{array}{cccc:cccc}4&3&-6&2&1&&&\\3&3.25&-3&4&&1&&\\-6&-3&11.5&0.5&&&1&\\2&4&0.5&0.75&&&&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:cccc}4&3&-6&2&1&&&\\0&1&1.5&2.5&-\frac{3}{4}&1&&\\0&1.5&2.5&3.5&\frac{3}{2}&0&1&\\0&2.5&3.5&-0.25&-\frac{1}{2}&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:cccc}4&3&-6&2&1&&&\\0&1&1.5&2.5&-\frac{3}{4}&1&&\\0&0&0.25&-0.25&\frac{21}{8}&-\frac{3}{2}&1&\\0&0&-0.25&-6.5&\frac{45}{8}&-\frac{5}{2}&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:cccc}4&3&-6&2&1&&&\\&1&1.5&2.5&-\frac{3}{4}&1&&\\&&0.25&-0.25&\frac{21}{8}&-\frac{3}{2}&1&\\&&&-6.75&4&-4&1&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&&&&1&&&\\-\frac{3}{4}&1&&&&1&&\\\frac{21}{8}&-\frac{3}{2}&1&&&&1&\\4&-4&1&1&&&&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&&&&1&&&\\&1&&&\frac{3}{4}&1&&\\&-\frac{3}{2}&1&&-\frac{21}{8}&0&1&\\&-4&1&1&-4&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&&&&1&&&\\&1&&&\frac{3}{4}&1&&\\&&1&&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&1&\\&&1&1&-1&4&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&&&&1&&&\\&1&&&\frac{3}{4}&1&&\\&&1&&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&1&\\&&&1&\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&-1&1\end{array}\right)$$

$$A=LU=\begin{pmatrix}1&&&\\\frac{3}{4}&1&&\\-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&1&\\\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&-6&2\\&1&1.5&2.5\\&&0.25&-0.25\\&&&-6.75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&\\\frac{3}{4}&1&&\\-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&1&\\\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&&&\\&1&&\\&&0.25&\\&&&-6.75\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{4}&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\&1&1.5&2.5\\&&1&-1\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{L}=L\begin{pmatrix}2&&&\\&1&&\\&&0.5&\\&&&\sqrt{6.75}\,i\end{pmatrix}\qquad A=\tilde{L}\tilde{L}^{T}$$

二.(2) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & \\ -a_{21} & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ & 0 \end{pmatrix}$

$$B_J=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \\ & \frac{1}{a_{22}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ -a_{21} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f_J}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \\ & \frac{1}{a_{22}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^{(k+1)}=B_J\vec{x}^{(k)}+\vec{f_J} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

$$|\lambda I-B_J|=\begin{vmatrix} \lambda & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22}}$$

$\rho(B_J)=\left|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|<1$ 时 该迭代法收敛.

三. 解: $0<0.5<1$

选取 $x=-2,-1,0,1$ 这4个节点...

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0.25	0.75	2	5

$$l_0(x)=\frac{(x+1)x(x-1)}{(-2+1)(-2)(-2-1)}=-\frac{1}{6}x(x^2-1)=-\frac{1}{6}(x^3-x)$$

$$l_1(x)=\frac{(x+2)x(x-1)}{(-1+2)(-1)(-2)}=\frac{1}{2}x(x-1)(x+2)$$

$$l_2(x)=\frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{2\cdot 1\cdot(-1)}=-\frac{1}{2}(x+2)(x+1)(x-1)$$

$$l_3(x)=\frac{(x+2)(x+1)x}{6}=\frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$$

$$L_3(x)=0.25\,l_0(x)+0.75\,l_1(x)+2\cdot l_2(x)+5\cdot l_3(x)$$

$$f(0.5)\approx L_3(0.5)\approx 3.22$$

15. 解: $R=6371$ $h=439$ $H=2384$

$$a=\frac{1}{2}(2R+H+h)=\frac{1}{2}(2\times 6371+2384+439)=7782.5$$

$$c=\frac{H-h}{2}=972.5$$

$$S=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin^2\theta}\,d\theta=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-0.015615\sin^2\theta}\,d\theta$$

区间4等分 0 $\frac{\pi}{8}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{3}{8}\pi$ $\frac{\pi}{2}$

1.0000 0.99886 0.99609 0.99331 0.99216

复化Simpson公式

$$S=4a\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{6}\left(f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+2f\left(\frac{\pi}{4}\right)+4f\left(\frac{\pi}{8}\right)+4f\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)\right)$$

≈ 48709

五. 解: $y' = f(x,y) = 8-3y \quad y_0 = y(1) = 2 \quad 1 \le x \le 1.8$

梯形公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

$$= y_n + 0.1(8 - 3y_n + 8 - 3y_{n+1})$$

$$= 1.6 + 0.3y_n - 0.3y_{n+1}$$

$$y_{n+1} = \frac{1.6}{1.3} + \frac{0.3}{1.3}y_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$y(1.2) \approx y_1 = \frac{1.6}{1.3} + \frac{0.3}{1.3} \times 2 \approx 1.69231$$

$$y(1.4) \approx y_2 = \frac{1.6}{1.3} + \frac{0.3}{1.3} \times 1.69231 \approx 1.62130$$

$$y(1.6) \approx y_3 = \frac{1.6}{1.3} + \frac{0.3}{1.3} \times 1.62130 \approx 1.60482$$

$$y(1.8) \approx y_4 = \frac{1.6}{1.3} + \frac{0.3}{1.3} \times 1.60482 \approx 1.60114$$

、(1) $l_i(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$

为 n 次多项式

令 $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x) - x^k \quad (k=0,1,2\cdots n)$

为不超过 n 次多项式

具有 $x=x_0, x_1 \cdots x_n$ 共 $n+1$ 个零点，

$\therefore \varphi(x) \equiv 0 \quad \sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x) = x^k$

(2) $\sum_{i=0}^{n} (x_i - x)^k l_i(x) \quad k = 1, 2, \cdots n$

$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} C_k^m x_i^{(k-m)} (-x)^m l_i(x)$

$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m \sum_{i=0}^{n} x_i^{(k-m)} (-x)^m l_i(x)$

$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m (-x)^m x^{k-m} = (x-x)^k = 0$