南京航空航天大学《线性代数》

2019-2020 学年第一学期期末考试 A 卷

一、填空题

1. 若三阶行列式$\begin{vmatrix}3&1&x\\2&x&0\\1&0&x\end{vmatrix}=0$，则$x$满足条件：________

2. 设向量组$(a,2,1)^T,(2,b,3)^T,(1,2,1)^T,(2,3,1)^T$的秩为 2，则$a=$______，$b=$______

3. 设三阶矩阵A，$|A|=2$，则$|A^*|=$____，$\left|A^*+\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}\right|=$____，$A$的列向量组线性____（有关、无关）

4. 在R^3中，向量$\alpha=(2,3,4)^T$在一组基$\beta_1=(-1,0,0)^T,\beta_2=(1,1,0)^T,\beta_3=(1,1,1)^T$下的坐标是________

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

5. 设三阶矩阵A的特征值为$1,-2,3$，则A^{-1}的特征值为________，$|A^2-E|=$________

6. 已知$f(x_1,x_2,x_3)=kx_1^2+kx_2^2+2x_3^2+4x_1x_3$为正定二次型，则$k$的取值范围为________。此二次型的规范型是________，正惯性指数是________

7. $\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{2019}\begin{bmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&2&0\end{bmatrix}=$________，$\begin{bmatrix}4&8&-2\\-2&-4&1\\2&4&-1\end{bmatrix}^{10}=$________

二、计算题

1. 计算行列式$D=\begin{vmatrix}a&0&0&b\\0&a&b&0\\0&b&a&0\\b&0&0&a\end{vmatrix}$

2. 已知$A=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$，满足$AX=A+2X$，求$X$

3. 设$\mathscr{A}$为R^3的一个线性变换，满足

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_3\\x_1\\x_2+x_3\end{pmatrix}$$

求$\mathscr{A}$在一组基$\beta_1=(1,0,0)^T,\beta_2=(1,1,0)^T,\beta_3=(1,1,1)^T$下的矩阵

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

4. 设下面两个向量组等价

（I）$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\b\end{pmatrix}$　　（II）$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}2\\2\\c\end{pmatrix}$

（1） 求向量组β_1,β_2,β_3的秩

（2） 求a,b,c的值

三、已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ 3x_1-x_2-ax_3+15x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=b \end{cases}$

（1） 当a,b为何值时，此方程组无解，有唯一解，有无穷多解？

（2） 当有无穷多解时，求出通解

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

四、求一个正交变换$X=UY$化下面的二次型为标准型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

五、证明

1.（1）设X为n维列向量，$X^T X=1$，令$H=E-2XX^T$

证明：H 是对称的正交矩阵

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

（2） 设A,B都为正交矩阵，证明：AB也是正交矩阵

2. 设A是n阶可逆矩阵，证明：A的伴随矩阵A^*也可逆，且$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$

南京航空航天大学《线性代数》

2019-2020 学年第二学期期末考试 A 卷

一、填空题(每空 2 分，共 28 分)

1、设$\begin{vmatrix} x & 1 & y \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2$,则$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ x & 1 & y \end{vmatrix}=$________.

2、已知矩阵A满足$A^2+3A=5E$,则$(A+2E)^{-1}=$________.

3、设A为3阶矩阵,$|A|=3$,则$||A|A^{-1}|=$______齐次线性方程组$AX=0$的解为________.

4、设$\alpha_1=(1,-1,2,-1)^T,\alpha_2=(2,0,1,-2)^T,\alpha_3=(3,1,a,-3)^T$,则$a$满足______时,

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，一个极大线性无关组是________.

5、 设A是3阶实对称矩阵,满足$A^2+A=2E$,且$|A|=4$,则A的所有特征值为_______,$|A^2+E|$=

____.

6、$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{13}\begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}=$______,$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}^{14}=$______.

7、已知$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+kx_2x_3$是正定的,则$k$的取值范围是______,此二次型的

范形是__________.

8、设A是5×3的矩阵,则线性方程组$AX=b$的有无穷解的充要条件是__________;

若$r(A)=2$,则$AX=0$的基础解系中有几个线性无关的解向量:__________.

二、计算题(每小题 8 分，共 32 分)

1、求行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$的值.

2、设$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,$X$满足矩阵方程$AX=B+X$,求$X$.

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

3、设$\mathscr{A}$为R^3上的线性变换,满足$\mathscr{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$,

求$\mathscr{A}$在一组基$\beta_1=(1,0,0)^T$,$\beta_2=(1,1,0)^T$,$\beta_3=(1,1,1)^T$下的矩阵.

4、已知矩阵$A=\begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{bmatrix}$的一个二重特征值是$\lambda_1=3$，

(1)求参数x和另一特征值λ_2；　(2)问A能否对角化?并说明理由.

三、（14 分）

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$，问:当$a,b$为何值时，方程组无解，有唯一解，有无穷多解？当有无穷多解时,求通解.

四、（14 分）利用正交变换法$X=UY$将化下面的二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$，为标准形，并求出所用的正交变换.

五、证明题（每题 6 分，共 12 分）

1、设λ_1,λ_2为矩阵A的两个不同的特征值,对应的特征向量分别为α_1,α_2,证明:$\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充要条件是:$\lambda_2\neq 0$.

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

2、设A,B为n阶正交矩阵,且$|AB|=-1$,证明:$|A+B|=0$.

2019-2020 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题

1. 【正解】$x=1$ 或 0

【学解】$\begin{vmatrix}3&1&x\\2&x&0\\1&0&x\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}2&x\\1&0\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}3&1\\2&x\end{vmatrix}=-x^2+x(3x-2)=2x^2-2x=0\Longrightarrow x_1=1,x_2=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2：行列式的展开

2. 【正解】1,5

【学解】由题意知矩阵$\begin{bmatrix}a&2&1&2\\2&b&2&3\\1&3&1&1\end{bmatrix}$的秩为 2，从而得到$\begin{vmatrix}a&1&2\\2&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}2&1&2\\b&2&3\\3&1&1\end{vmatrix}=0$

经计算得$\begin{vmatrix}a&1&2\\2&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-2&-1&2\\-1&-1&3\\0&0&1\end{vmatrix}=-a+1=0\Longrightarrow a=1$

$\begin{vmatrix}2&1&2\\b&2&3\\3&1&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}b&3\\3&1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}b&2\\3&1\end{vmatrix}=b-5=0\Longrightarrow b=5$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 11：向量组的线性相关和线性表示

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

3. 【正解】4,32,无关

【学解】由$AA^*=|A|E=2E\Longrightarrow|AA^*|=2^3=8\Longrightarrow|A^*|=4$

$\left|A^*+\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}\right|=|2A^{-1}+2A^{-1}|=4^3\times\frac{1}{2}=32$

因为A是可逆的，所以列向量组线性无关

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4-9【重要题型】题型 1：矩阵的运算与矩阵行列式的计算

4. 【正解】$(1,-1,4)$

【学解】考虑矩阵$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha)=\begin{bmatrix}-1&1&1&2\\0&1&1&3\\0&0&1&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&-2\\0&1&0&-1\\0&0&1&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&4\end{bmatrix}$

所以坐标为$(1,-1,4)$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 10-15【重要题型】题型 4：向量坐标与坐标变换

5. 【正解】特征值：$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$，后面一个空为 0

扫描全能王 创建

【学解】A^{-1}的特征值即对应于A的特征值取倒数即可。

因为1是A的一个特征值，所以1^2-1是A^2-E的一个特征值，即0是它的特征值

所以$|A^2-E|=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点19-24【重要题型】题型1：求特征值

6. 【正解】$k>2, y_1^2+y_2^2+y_3^2, 3$

【学解】该二次型对应的矩阵$A=\begin{bmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

因为二次型正定，所以$k>0, \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix}>0, \begin{vmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}>0$，即$\begin{cases} k>0 \\ k^2>0 \\ k(2k-4)>0 \end{cases} \Longrightarrow k>2$

因为正定，所以规范型为$y_1^2+y_2^2+y_3^2$，正惯性指数为3

【考点延伸】《考试宝典》知识点22：二次型

7. 【正解】$\begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

本资源免费共享收集网站 nuan.store

【学解】$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E \Longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{2019}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

从而$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{2019}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}^{10}=\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}\right)^{10}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}(-1)^9\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点19-24【重要题型】题型4：求矩阵的高次幂

二、计算题

1. 【学解】将第四行与第三行对调，再将第三行与第二行对调。接着将第四列与第三列对调，再将第三列与第二列对调，共经历4次对换。所以$D=(-1)^4\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}=(a^2-b^2)^2$

【考点延伸】《考试宝典》知识点3：几种特殊的行列式

2. 【学解】由$AX=A+2X \Longrightarrow (A-2E)X=A$

扫描全能王 创建

考虑矩阵 $(A-2E,A)=\begin{bmatrix}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&-2&0&1&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&1&-2&0&1&0\end{bmatrix}$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&3&0&1\\0&1&1&2&-1&1\\0&0&-3&-2&2&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&3&0&1\\0&1&1&2&-1&1\\0&0&1&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{7}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&0&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&1&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\Longrightarrow X=\begin{bmatrix}\frac{7}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4：矩阵的概念和基本运算

3. **【学解】** $\mathscr{A}\beta_1=\mathscr{A}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\beta_2-\beta_1,\mathscr{A}\beta_2=\mathscr{A}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta_3$

$$\mathscr{A}\beta_3=\mathscr{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=-\beta_1-\beta_2+2\beta_3$$

本资源免费共享 收集网站

所以 $\mathscr{A}$ 在一组基 $\beta_1=(1,0,0)^T,\beta_2=(1,1,0)^T,\beta_3=(1,1,1)^T$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix}-1&0&-1\\1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$

【考点延伸】线性变换的定义

4. **【学解】**（1）记 $C=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1&-1&2\\1&1&2\\1&2&c\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&2&0\\0&3&c-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&0\\0&0&c-2\end{bmatrix}$

因为向量组（I）与向量组（II）等价，从而两个向量组的极大无关组的向量个数相同，又因为向量组（I）是线性无关的，从而可以知 $R(C)=2$，并且 $c-2=0\Longrightarrow c=2$

（2）考虑矩阵 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2]=\begin{bmatrix}1&-1&2&1&0\\1&1&2&0&1\\1&2&2&a&b\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&2&1&0\\0&2&0&-1&1\\0&3&0&a-1&b\end{bmatrix}$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&2&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&a+\frac{1}{2}&b-\frac{3}{2}\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}a+\frac{1}{2}=0\\b-\frac{3}{2}=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=\frac{3}{2}\end{cases}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 13：等价向量组

扫描全能王 创建

三、【学解】(1)

$$\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\1&3&6&1&3\\3&-1&-a&15&3\\1&-5&-10&12&b\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&-4&-a-6&6&0\\0&-6&-12&9&b-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&0&-a+2&2&4\\0&0&0&3&b+5\end{bmatrix}$$

当$a=2,b\neq1$时，方程组无解；

当$a\neq2$时，方程组有唯一解；

当$a=2,b=1$时，方程组有无穷多组解。

(2) 当$a=2,b=1$时，初等变换为$\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&0&0&2&4\\0&0&0&3&6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&-8\\0&1&2&0&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=-8\\x_2+2x_3=3\\x_4=2\end{cases}$

再令$x_3=c$，那么通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\3-2c\\c\\2\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8\\3\\0\\2\end{bmatrix}$，其中$c$为任意常数

【考点延伸】《考试宝典》知识点17：非齐次线性方程组

资源免费共享 收集网站 nuaa.store

四、【学解】二次型对应的矩阵为$A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0$，解得特征值$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$

对于$\lambda_1=-2$，$A+2E=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&1&2\end{bmatrix}$，解得一个单位特征向量$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$

对于$\lambda_2=\lambda_3=1$，$A-E=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，解得两个正交的单位特征向量

扫描全能王 创建

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

所以令$U=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$，可化二次型为$f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 22：二次型

五、证明

1. (1)【学解】先证明H是对称的：$H^T=(E-2XX^T)^T=E-2XX^T=H$

再证H是正交的：$HH^T=(E-2XX^T)^2=E^2-4XX^T+4X(X^TX)X^T=E$

此命题得证

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19-24【重要题型】题型 8：正交矩阵的性质和证明

(2)　【学解】由题意知$AA^T=E,BB^T=E$

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

从而$(AB)(AB)^T=A(BB^T)A^T=AA^T=E$，命题得证

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19-24【重要题型】题型 8：正交矩阵的性质和证明

2.【学解】因为$AA^*=|A|E$，A可逆则$A^*=|A|A^{-1}$，$|A|\neq 0$，故A^*可逆，且$(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$

又因为$A^{-1}(A^{-1})^*=|A^{-1}|E\Longrightarrow(A^{-1})^*=\frac{A}{|A|}$

所以$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$，命题得证

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5：矩阵的逆

扫描全能王 创建

2019-2020 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题(每空 2 分，共 28 分)

1、【正解】1

【学解】$2=-3x-2y-5$,所求$=\frac{-3x}{2}-y-\frac{5}{2}=1$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2：行列式的展开

2、【正解】$\frac{A+E}{7}$.

【学解】由$A^2+3A+2E=7E=(A+2E)(A+E)$ $\therefore (A+2E)\left(\frac{A+E}{7}\right)=E$,

$$(A+2E)^{-1}=\frac{A+E}{7}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5：矩阵的逆

3、【正解】$9;X=0$

本资源免费共享 收集网站 ...a.store

【学解】原式$=|3A^{-1}|=3^3|A|^{-1}=3^2=9$,$A$可逆,所以$X=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1：行列式的概念及其性质

4、【正解】$a\neq 0;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

【学解】$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&1\\2&1&a\\-1&-2&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&a\\0&0&0\end{bmatrix}$,线性无关则$r(A)=3$, $\therefore a\neq 0$

一个极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 12：极大线性无关组

5、【正解】$1,-2,-2;50$

【学解】易知极小多项式$m_A(\lambda)=\lambda^2+\lambda-2$, $\therefore$特征值取值可能为1或-2

又因为$|A|=4$,所以特征值为$1,-2,-2$, $\therefore A^2+E$的特征值为$2,5,5$ $\therefore |A^2+E|=2\cdot 5\cdot 5=50$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19：特征值与特征向量

扫描全能王 创建

6、【正解】$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix} -4 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

【学解】$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{13}\begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

$$rankB = 1, B^{14} = (TrB)^{13}B = (-1)^{13}B = -B = \begin{bmatrix} -4 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 8：初等矩阵

7、【正解】$-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$；$f(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

【学解】$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{k}{2} \\ 0 & \frac{k}{2} & 1 \end{bmatrix}, 2 > 0, 2-1 > 0, 1 - \frac{k^2}{2} > 0 \therefore -\sqrt{2} < k < \sqrt{2}.$

规范形为$f(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17：非齐次线性方程组

8、【正解】$r(A) = r(A|b) < 3; 1$

【学解】$r(A) = r(A|b) < 3; n - r(A) = 3 - 2 = 1$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19：特征值与特征向量

二、计算题(每小题 8 分，共 32 分)

9、【学解】按第1行展开:$D = 160$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2：行列式的展开

10、【学解】$(A-E)X = B, \therefore X = (A-E)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4：矩阵的概念和基本运算

11、【学解】$\mathscr{A}\beta_1 = \beta_1, \mathscr{A}\beta_2 = \beta_1 + \beta_2, \mathscr{A}\beta_3 = 2\beta_3,$

扫描全能王 创建

所以$\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$即线性变换在这组基下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15：向量空间

12、【学解】(1) $\begin{vmatrix}7-\lambda&4&-1\\4&7-\lambda&-1\\-4&-4&x-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)(-\lambda^2+11\lambda+\lambda x-11x+8)\ \therefore x=4$

$\therefore \chi_A(\lambda)=-(\lambda-3)^2(\lambda-12)\ \therefore$ 另一个特征值$\lambda_2=12$;

(2)对于重根$\lambda=3$, $A-3E=\begin{bmatrix}4&4&-1\\4&4&-1\\-4&-4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&4&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\therefore rank(A-3E)=1$

$n_{代数}=2, n_{几何}=n-rank(A-3E)=3-1=2,\therefore n_{代数}=n_{几何}$,所以可以对角化.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19：特征值与特征向量

三、【学解】$(A|b)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{bmatrix}$

$\therefore a=1, b\neq-1$时,无解;$a\neq1$时,有唯一解;$a=1, b=-1$时,有无穷多解.

$(A|b)\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$,解空间维数$dimV=n-r(A)=4-2=2$,所以齐次方程通解为

$k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$,非齐次特解为$\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$,所以非齐次通解为$k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17：非齐次线性方程组

四、【学解】$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}$, $|\lambda E-A|=0=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5),\therefore\lambda=1,2,5$

扫描全能王 创建

$\lambda_1=1$时,$A-E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\therefore T_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$.

$\lambda_2=2$时,$A-2E=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{bmatrix}\therefore T_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$,$T_3=T_1\times T_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&1&-1\\1&0&0\end{vmatrix}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\end{bmatrix}\therefore T=[T_1,T_2,T_3]=\begin{bmatrix}0&1&0\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}&0&\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{-1}{\sqrt{2}}&0&\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$即为所求,$X=TY$.

标准型为$f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

本资源免费共享 收集网站 nuaa.store

【考点延伸】《考试宝典》知识点 21：实对称矩阵的对角化

五、证明题

1、【学解】若$\lambda_2\neq0$,则设$k_1\alpha_1+k_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$,即$(k_1+k_2\lambda_1)\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0$,因为互异特征值

对应的特征向量线性无关,所以$k_1+k_2\lambda_1=0,k_2\lambda_2=0$, $\because\lambda_2\neq0\therefore k_2=0,k_1=0$

所以$\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关;对于充分性,反过来易证.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19：特征值与特征向量

2、【学解】由于A,B是正交矩阵,且$|AB|=-1$,所以不妨设$|A|=1,|B|=-1$, $\therefore|A+B|=|A+AA^TB|$

$=|A|\cdot|E+A^TB|=|B^TB+A^TB|=|B|\cdot|B^T+A^T|=(-1)|(A+B)^T|=(-1)|A+B|$

所以$|A+B|=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4：矩阵的概念和基本运算