南京航空……《概率论与数理统计II》考试试题

二〇二〇～二〇二一学年 第二学期 试卷类型：B 试卷代号：[illegible]

考试日期：2021 年 5 月 30 日 班号 学号 姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

本题分数	21
得　分	

一、填空题（每题 3 分）

1. 且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AC)=P(BC)=1/16$，$P(AB)=0$，则 $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=$ ________.

2. 随机变量 X 的密度为 $f(x)=\begin{cases}3x^2,0<x<1\\0,其它\end{cases}$，$Y$ 表示对 X 的 3 次独立重复观察中事件 $\{X>1/2\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=1\}=$ ________.

3. 设随机变量 $(X,Y)\sim N(2,2,1,4,0)$，则 $D(|X-Y|)=$ ________.

4. 已知随机变量 X 服从参数为 4 的泊松分布，Y 服从期望为 3 的指数分布，X,Y 的相关系数为 0.5，则 $D(4X-2Y+3)=$ ________.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1},\cdots X_{n+m}$ 是取自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$Y=(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)/(\sum_{i=n+1}^{n+m}X_i^2)$，则当常数 $C=$ ____ 时，CY 服从 F 分布。

6. 设总体 X 的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^\theta,0<x<1\\0,其它\end{cases}$，其中 $\theta>-1$ 为未知参数……做假设检验，$H_0:\theta=1/4$，$H_1:\theta\neq1/4$，若拒绝域为 $W=\{X\leq1/2\}$，则该检验的显著性水平为________.

7. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，$k\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|$ 是 σ 的无偏估计量，则 $k=$ ________.

本题分数	9
得　分	

二、选择题(每题3分)

1. 对事件 A,B，下列命题肯定正确的是(　　)

(A)如果 A,B 互不相容，则 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也不相容

(B)如果 A,B 相容，则 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相容

(C)如果 A,B 互不相容，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则 A,B 相互独立

(D)如果 A,B 相互独立，则 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立

2. 设随机变量 X 概率密度为 $f(x)=e^{-|x|}/2, x\in R$，则对 X 与 $|X|$，下列结论成立的是(　　)

(A)相互独立　　(B)分布相同　　(C)互不相关　　(D)相关

3. 假设检验中若在显著性水平 $\alpha=0.01$ 情况下拒绝原假设 H_0，那么在显著性水平 $\alpha=0.05$ 情况下对 H_0 的检验，有(　　)

(A)拒绝 H_0　　(B)接受 H_0

(C)可能接受 H_0，也可能拒绝 H_0　　(D)犯第一类错误概率更小

本题分数	30
得　分	

三、计算题(每题6分)

1.盒子中有6只乒乓球，其中4只新球，第一次比赛时随机取出2只球，使用后放回盒子，第二次比赛时又随机从盒子中取2只球。已知第二次取出的全是新球，求第一次比赛时取出的球恰有一个新球的概率。

设二维随机变量(X,Y)在以$(-1,0)$、$(0,-1)$、$(1,0)$为顶点的三角形区域上服从均匀分布，求其联合概率密度及$Z=X+Y$的概率密度。

3. 某人进行独立投篮，投中的概率为3/4，如果投中一次就停止，以X表示所需的投篮次数，求X的分布律及其数学期望$E(X)$。

4. 设X_1,X_2,X_3为来自总体$N(0,1)$的样本，$\overline{X}$为样本均值，随机变量Y服从期望为1的指数分布，Z服从区间(0,6)上的均匀分布，且Y、Z相互独立，求$P\{\min(Y,Z)\le D(\sum_{i=1}^{3}(X_i-\overline{X})^2)\}$。

5. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立，且都服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，又设 $Y = X_1 \cdot X_2 \cdots X_{100}$，求 $P\{Y < 10^{-40}\}$ 的近似值。

本题分数	8
得　　分	

四．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x, |x| \le \frac{\pi}{2};\\ 0,其它\end{cases}$

(1)求 X 的分布函数 $F(x)$;(2)求 $Y = F(X)$ 的概率密度。

本题分数	10
得　分	

五．某灯泡使用寿命服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均未知，要求使用寿命大于 2000 小时，随机抽取 20 只测试，得到样本均值为 $\bar{x}=2050$（小时），样本标准差 $s=490$（小时）.

(1) 问对于显著性水平 $\alpha=0.05$，能否认为这批灯泡合格？

(2) 求总体标准差的置信水平为 0.95 的置信区间.（写出具体推导过程）

本题分数	10
得　分	

六．设总体 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}x^{(1-\theta)/\theta}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，

其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的样本，求 θ 的矩估计量和最大似然估计量。

本题分数	12
得　分	

七．设随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} kxye^{-(x^2+y^2)}, & x\ge 0, y\ge 0 \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

(1)求k；(2)求Y的边缘概率密度$f_Y(y)$；

(3)求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$；(4)X,Y是否相互独立？为什么？

(5)求$P\{X+Y>1\}$(结果用Φ函数表示)。

填空

1. $\frac{3}{8}$

2. $\frac{21}{512}$

3. 10

4. 52

5. $\frac{m}{n}$

填空

6. 0.05

7. $\dfrac{1}{n}$

二

1. D

2. C

3. A

二

1.

① 第一次取两个旧球概率为 $\frac{1}{C_6^2}=\frac{1}{15}$

这种情况下第二次全为新球概率为

$\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15}$，两次总概率为 $\frac{6}{225}$

② 第一次取1旧球概率为 $\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$

第二次全是新球概率为 $\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}$

两次总概率为 $\frac{24}{225}$

③ 第一次取两新球概率为 $\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15}$

第二次全是新球概率为 $\frac{1}{C_6^2}=\frac{1}{15}$

两次总概率为 $\frac{6}{225}$

综合①、②、③有第二次取两新球

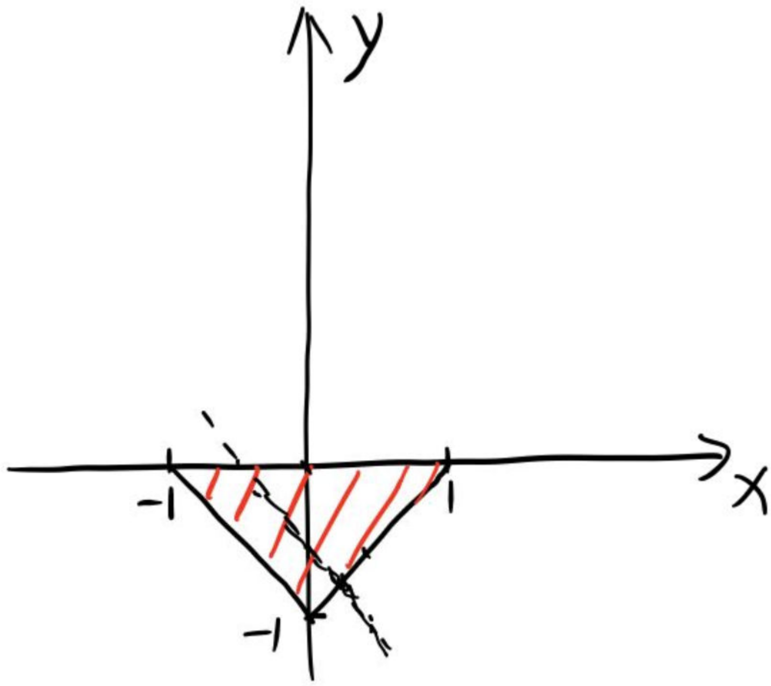
概率为 $\frac{4}{25}$

由条件知第一次恰好有一个新球概率

为 $\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$

三

2.



$$f(x,y)=\begin{cases}1, & -1<y<0,\ -y-1<x<y+1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$$

$$=\iint_{x+y\le z} 1\,dx\,dy$$

当 $-1<z<0$ 时

$$F_Z(z)=\int_0^{\frac{z+1}{2}}\int_{y-1}^{z-y} 1\,dx\,dy=\frac{1}{4}(z+1)^2$$

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}(z+1),\quad -1\le z<0$$

三

3.

由题知 X 的取值为 1, 2, 3, ⋯

当成功试验次数为 k (k=1, 2, 3, ⋯)

X 的分布律为

$$P(X=k) = \frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)^{k-1}$$

期望为 $EX = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\cdot k$

$$= \frac{3}{4}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'\Bigg|_{x=\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\Bigg|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

二

4.

$$D\left(\sum_{i=1}^{3}(X_i-\bar{X})^2\right)$$

而 $\chi^2=\frac{1}{6^2}\sum_{i=1}^{3}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2(3)$

$$D\chi^2=\frac{1}{6^4}\cdot D\left(\sum_{i=1}^{3}(X_i-\bar{X})^2\right)=6$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{3}(X_i-\bar{X})^2\right)=6\cdot 6^4=6\cdot 1=6$$

则 $P\{\min(Y,Z)\le 6\}$

$$=P(Y\le 6)+P(Z\le 6)-P(Y\le 6)\cdot P(Z\le 6)$$

$$=1+\int_0^6 1\cdot e^{-y}dy-\int_0^6 1\cdot e^{-y}dy\cdot 1$$

$$=1$$

三

5.

$$EY = EX_1 \cdot EX_2 \cdots EX_{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

$$DY = DX_1 \cdot DX_2 \cdots DX_{100} = \left(\frac{1}{12}\right)^{100}$$

则 $P(Y \leq 10^{-40})$

$$= P\left(\frac{Y - \left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{\sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^{100}}} \leq \frac{10^{-40} - \left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{\sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^{100}}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{10^{-40} - \left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{\left(\frac{1}{12}\right)^{50}}\right)$$

四

(1)

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\frac{\pi}{2} \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{2}\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2} \\ 1, & x\ge\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & x<-\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(\sin x+1), & -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2} \\ 1, & x\ge\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(2)

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F(x)\le y)$$

$$=P\left(\frac{1}{2}(\sin x+1)\le y\right)$$

$$=P(\sin x\le 2y-1)$$

$$=P(x\le \arcsin(2y-1))$$

$$=F_X(\arcsin(2y-1))$$

$$f_Y(y)=F_X'(\arcsin(2y-1))$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y-y^2}}, & 0<y<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

五

(1) 在 $\alpha=0.05$ 条件下

$H_0: \mu \geq 2000$ ， $H_1: \mu < 2000$

检验统计量

$$t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{2050-2000}{490/\sqrt{20}}=0.4563$$

拒绝域 $t \leq -t_{\alpha}(n-1) = -t_{0.05}(19) = -1.7291$

不成立，故可认为灯泡合格

五.(2) $P\left\{a < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < b\right\} = 0.95$.

$a = \chi^2_{0.975}(n-1) = 8.906$

$b = \chi^2_{0.025}(n-1) = 32.852$.

置信区间 $\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{b}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{a}}\right)$

$(372.64, 715.7)$

六

①矩估计

$$EX=\int_0^1 \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} \cdot x\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}} dx$$

$$=\frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\theta}+1} x^{\frac{1}{\theta}+1} \Big|_0^1$$

$$=\frac{\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\theta}+1}=\frac{1}{1+\theta}=\overline{X}$$

$$\hat{\theta}=\frac{1-\overline{X}}{\overline{X}}$$

② 最大似然估计

$$L(\theta)=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n \cdot (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$

$$\ln L(\theta)=n\ln\frac{1}{\theta}+\frac{1-\theta}{\theta}\cdot\sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$=-n\ln\theta+\left(\frac{1}{\theta}-1\right)\cdot\sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\frac{d}{d\theta}\{\ln L(\theta)\}=-\frac{n}{\theta}-\frac{1}{\theta^2}\cdot\sum_{i=1}^n \ln x_i=0$$

$$\hat{\theta}=-\frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n}$$

七.

(1) 由性质知

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} kxye^{-x^2-y^2} dy = 1$$

$$k\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} ye^{-y^2} dy = 1$$

$$k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad k = 4$$

(2)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} 4xye^{-x^2-y^2} dx, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2ye^{-y^2}, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

七

(3)

当 $y>0$ 时

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}2xe^{-x^2}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

(4)

由(2)知

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{+\infty}4xye^{-x^2-y^2}dy, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2xe^{-x^2}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)\Rightarrow X$ 与 Y 独立

七

(5)

$$E(X+Y)=EX+EY=\sqrt{\pi}$$

$$EX=\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}\cdot x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$EY=\int_0^{+\infty}2ye^{-x^2}\cdot y\,dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$EX^2=\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}\cdot x^2dx=1$$

$$EY^2=1 \quad \Rightarrow DX=EX^2-(EX)^2=1-\frac{\pi}{4}$$

$$D(X+Y)=DX+DY=2-\frac{\pi}{2}$$

从而 $P(X+Y>1)=1-P(X+Y\leq 1)$

$$=1-P\left(\frac{X+Y-\sqrt{\pi}}{\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}}\leq\frac{1-\sqrt{\pi}}{\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}}\right)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{1-\sqrt{\pi}}{\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}}\right)$$