1. 求幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$的收敛域及其和函数.

解：因为$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2-1}}{\frac{1}{(n+1)^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-1}{n^2-1}=1$，所以收敛半径为1，考虑端点有$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$和$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}$显然收敛，即收敛域为$[-1,1]$，下面求和函数

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n-1)}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left[-x\ln(1-x)-\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x-\frac{1}{2}x^2\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-x\right)\ln(1-x)+\frac{1}{2}+\frac{x}{4},\ 0<|x|\leqslant 1\end{aligned}$$

因此有

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-x\right)\ln(1-x)+\frac{1}{2}+\frac{x}{4},\ 0<|x|\leqslant 1\\0,\ x=0\end{cases}.\square$$

注：$-\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots$.

2. (1)证明p级数在$p>1$收敛；(2)若存在另外一正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n^2}$也收敛.

(1)**证明**：对任意的$m>n$，设$2^k\leqslant n<m\leqslant 2^{k+l}$，其中$k,l\in\mathbb{N}_+$，注意到对任意的$k\in\mathbb{N}_+$，都有

$$\frac{1}{(2^k+1)^p}+\frac{1}{(2^k+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+1})^p}<\frac{2^k}{(2^k)^p}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$$

因此

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&=\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{m^p}\leqslant\frac{1}{(2^k+1)^p}+\frac{1}{(2^k+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+l})^p}\\&=\left[\frac{1}{(2^k+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+1})^p}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{(2^{k+l-1}+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+l})^p}\right]\\&<\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k+\cdots+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{k+l-1}<\frac{1}{2^{p-1}-1}\cdot\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

当$n\to\infty$时，取$k=[\log_2 n]\to\infty$，由于$p>1$时$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^{p-1}-1}\cdot\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)=0$，故$p$级数收敛.

(2)因为正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，所以有$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，注意到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{a_n}}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 0$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$显然收敛(由(1)可得)，利用比较判别法可得$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^2}$也收敛.□

(法 2)注意到$ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$，那么有$\frac{\sqrt{a_n}}{n^2} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^4}\right)$，显然不等式右边构成的正项级数收敛，因此$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^2}$也收敛.□

3. 求幂级数的$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$收敛域以及和函数.

解：因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+3}{(n+1)!} x^{2n+2}}{\frac{2n+1}{n!} x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} x^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{(2n+1)(n+1)} x^2 = 0$$

所以收敛域为$\mathbb{R}$，下面求和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{n!}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}\right)' = \left[x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!}\right]' = \left(x e^{x^2}\right)'$$
$$= e^{x^2} + x e^{x^2} \cdot 2x = (1+2x^2) e^{x^2}, \ x \in \mathbb{R}$$

因此有

$$S(x) = (1+2x^2) e^{x^2}, \ x \in \mathbb{R}.□$$

4. 设(1)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$，(2)$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n+1}$，判断(1)、(2)的敛散性.

解：(1)注意到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n(n^2+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$$

因此级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$与级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$同敛散，所以级数(1)收敛.

(2)注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n+1}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n+1}$发散，而因为$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n+1}=0$，且

$$f(x)=\frac{\ln x}{x+1}\Longrightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}-\ln x+1}{(x+1)^2}$$

因此当n充分大的时候，$\frac{\ln n}{n+1}$单调递减且极限为 0，利用莱布尼茨判别法可知级数(2)条件收敛.□

5. 判断下列级数的敛散性：(1)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$；(2)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$.

解：(1)注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{3i}{n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln\prod_{i=1}^{n}\frac{3i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{3i}{n}}=\mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{3i}{n}}=\mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\left(n\ln 3+\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}\right)}=+\infty$$

因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$发散.

注：因为$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{n}}=\mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x}=\frac{1}{\mathrm{e}}$，那么近似估计有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n n!}{n^n}=\left(\frac{3}{\mathrm{e}}\right)^n>1$$

因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$发散.

(2)注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^{\alpha}}+\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)^2+O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right]$$

所以当$\alpha\leqslant 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$发散；当$\alpha>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$收敛，而当$0<\alpha\leqslant 1$时有

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0$$

且当n充分大的时候满足

$$\sin\frac{1}{n^{\alpha}}>\sin\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}$$

所以$\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$单调递减且极限为0，利用莱布尼茨判别法可知级数(2)条件收敛.

综上可得：$\alpha\leqslant 0$时，级数(2)发散；$0<\alpha\leqslant 1$时，级数(2)条件收敛；$\alpha>1$时级数(2)绝对收敛.□

注：这里不能利用求导判断单调性，因为$f(x)=\sin\frac{1}{x}$在$x=0$处不可导，且在领域内震荡.

6. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$的收敛域及和函数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{2^n}$的值.

解：因为

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=1$$

所以收敛半径为 1，考虑端点有$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)$和$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)$显然发散，即收敛域为$(-1,1)$，下面求和函数

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n&=2x\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'+\frac{1}{1-x}=2x\left(\frac{1}{1-x}\right)'+\frac{1}{1-x}\\&=2x\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2},\ |x|<1\end{aligned}$$

因此有

$$S(x)=\frac{1+x}{(1-x)^2}，|x|<1$$

显然有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{2^n}=S\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1-\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2}{9}.\square$$

7. 判断下列级数的敛散性：(1)$\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{2}{n^2}$；(2)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

解：(1)注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=2$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{2}{n^2}$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$同敛散，所以级数(1)发散.

(2)因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)+\cdots+\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-1\right)=+\infty$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$发散，而因为$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

因为$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$单调递减且极限为 0，利用莱布尼茨判别法可知级数(2)条件收敛.□

8. 将$f(x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$展开为$(x-1)$的幂级数.

解：定义域为$(-2,2)$，变形可得

$$f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}=\ln(2+x)-\ln(2-x)=\ln[3+(x-1)]-\ln[1-(x-1)]$$
$$=\ln 3+\ln\left[1+\frac{(x-1)}{3}\right]-\ln[1-(x-1)]$$
$$=\ln 3+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1},\ |x-1|<1\text{ and }\left|\frac{x-1}{3}\right|<1$$

所以幂级数为

$$f(x)=\ln 3+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1},\ 0<x<2.\square$$

9. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n-\dfrac{1}{n}\right)x^n$的收敛域及和函数.

解：因为

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{1}{n}}{n+1-\frac{1}{n+1}}=1$$

所以收敛半径为 1，考虑端点有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n-\dfrac{1}{n}\right)$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n-\dfrac{1}{n}\right)$显然发散，即收敛域为

$(-1,1)$，下面求和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{1}{n}\right)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'-\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)\mathrm{d}x$$
$$=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'-\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=\frac{x}{(1-x)^2}+\ln(1-x),\ |x|<1$$

因此有

$$S(x)=\frac{x}{(1-x)^2}+\ln(1-x),\ |x|<1.\square$$

10. 求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+2}{2n+1}x^{2n}$的收敛域及和函数.

解：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+2}{2(n+1)+1}x^{2n+2}}{\frac{4n^2+4n+2}{2n+1}x^{2n}}=x^2<1$$

所以收敛域为$(-1,1)$，下面求和函数

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+2}{2n+1}x^{2n}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+1}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\\&=\left(x\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\right)'+\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\right)\mathrm{d}x\\&=\left(x\cdot\frac{1}{1-x^2}\right)'+\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{2x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,\ 0<|x|<1\end{aligned}$$

因此有

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{2x}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|,\ 0<|x|<1\\2,\ x=0\end{cases}.\square$$

11*. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{4n^2+4n+1}$的和.

解：注意到

$$\frac{2}{4n^2+4n+1}=\frac{(2n+2)-2n}{1+2n(2n+2)}$$

利用正切函数恒等式变换关系$\arctan\frac{x-y}{1+xy}=\arctan x-\arctan y$可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{4n^2+4n+1}&=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{(2n+2)-2n}{1+2n(2n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}[\arctan(2n+2)-\arctan(2n)]\\&=\lim_{N\to\infty}\arctan(2N+2)-\arctan 2\\&=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{2N+2}\right)-\arctan 2=\frac{\pi}{2}-\ln 2=\arctan\frac{1}{2}.\square\end{aligned}$$