《高等数学（上）》速成课

——框框老师

第一讲　极限与连续(一)（2种题型）

1. 函数求极限

例. 求下列函数的极限：(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ ；(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$

[分析]：函数极限7种题：$\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型，$0\cdot\infty$型，$\infty-\infty$型，1^∞型，0^0型，∞^0型.

① $\frac{0}{0}$(或$\frac{\infty}{\infty}$型)：洛必达法则：$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$

② 常见等价无穷小(8个)：

当$x\to0$时 $\begin{cases} x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x) \\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad (1+x)^k-1\sim kx \end{cases}$ （原则："乘除可用，加减不宜"）

解：(1) 第1步：先看类型：$\frac{0}{0}$型

第2步：再无穷小替换＋洛必达

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$ $\begin{cases} \overset{法1:替换}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6} \\ \overset{法2:洛}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\overset{\sim x}{\sin x}}{6x}=\dfrac{1}{6} \end{cases}$

1. 函数求极限

例. 求下列函数的极限：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ ；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$

[分析]：① $\frac{0}{0}$ (或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)：洛必达法则：$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$

② 常见等价无穷小(8个)：当 $x\to 0$ 时，

$$\begin{cases} x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x) \\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad (1+x)^k-1\sim kx \end{cases}$$

(原则："乘除可用，加减不宜")

解：(2) 第1步：先定型：$\frac{0}{0}$ 型

第2步：再无穷小替换 + 洛必达：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}\overset{\text{替换}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{\frac{1}{2}x^2}\overset{\text{洛}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}\overset{\text{洛}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+\sin x)}{1}$$

$$\sim\left[\sqrt{1-x^2}-1\right]\sim(-1)\cdot\frac{1}{2}(-x^2)=\frac{1}{2}x^2$$

$$=e^0+0=1$$

例 求下列极限：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+4}{5x^2+9}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln x$；(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$

[分析] 函数极限 7 种题：$\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型，$0\cdot\infty$型，$\infty-\infty$型，1^∞型，0^0型，∞^0型.

① $\frac{\infty}{\infty}$型：法1°：洛必达法则；法2°："抓大头"：$x\to+\infty$时，$x \ll x^2$，$\ln x \ll x^a \ll a^x$

则 $x\to+\infty$时，$x+x^2\sim x^2$，$x^2+e^x\sim e^x$ ② $0\cdot\infty$型：化为 $\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ 或 $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$，再洛必达法则.

解：(1) 先定型：$\frac{\infty}{\infty}$型，再洛必达：

法1：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+4}{5x^2+9}\overset{\text{洛必达}}{=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{10x}\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

法2：分子 $=2x^2+3x+4\sim 2x^2$；分母：$5x^2+9\sim 5x^2$ （"抹去法"）

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{5x^2}=\dfrac{2}{5}$ 改题：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3x+4}{5x^2+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{e^x}=\dfrac{1}{\infty}=0$

例 求下列极限：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+4}{5x^2+9}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x$；(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$

[分析] 函数极限7种题：$\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型，$0\cdot\infty$型，$\infty-\infty$型，1^∞型，0^0型，∞^0型.

① $\frac{\infty}{\infty}$型：法1°：洛必达法则；法2°"抓大头"：$x\to+\infty$时，$x \ll x^2$，$\ln x \ll x^a \ll a^x$

② $0\cdot\infty$型：化为 $\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ 或 $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$，再洛必达法则. ③ $\infty-\infty$型：通分，倒代换+洛必达

解：(2) 先定型：$0\cdot\infty$型，再变形+洛必达

$$原式=\lim_{x\to0^+}x\cdot\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{洛}{=\!=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

(3) 先定型：$\infty-\infty$型，再变形+洛必达

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\tfrac{1}{x})\right]\overset{令\frac{1}{x}=t}{=\!=}\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t^2}\right]=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\overset{洛}{=\!=}\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{2t(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}$$

例. 求下列极限：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$；(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

[分析]：函数极限7种题：$\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型，$0\cdot\infty$型，$\infty-\infty$型，1^∞型，0^0型，∞^0型.

① 1^∞型：万能公式法：$\lim f(x)^{g(x)} \xlongequal{1^\infty} e^{\lim(f(x)-1)\cdot g(x)}$

② 0^0型、∞^0型：指底法：$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)}$

解：(1) 先定型：因 $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right] = 2-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$，原式为$1^\infty$型，

用万能公式：原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\cdot\frac{1}{x}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}} \xlongequal[\text{洛}]{\frac{0}{0}\text{型}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}}$

$= e^{\frac{1}{2}}$

例. 求下列极限：(1) $\lim\limits_{x\to0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$；(2) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x}$；(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

[分析]：函数极限 7 种题：$\frac{0}{0}$ 型，$\frac{\infty}{\infty}$ 型，$0\cdot\infty$ 型，$\infty-\infty$ 型，1^∞ 型，0^0 型，∞^0 型.

① 1^∞ 型：万能公式法：$\lim f(x)^{g(x)} \overset{1^\infty}{=\!=} e^{\lim(f(x)-1)\cdot g(x)}$

② 0^0 型、∞^0 型：指底法：$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)}$

解：(2) 先定型：$\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x}$ 为 0^0 型，用指底法：

$$\text{原式} = \lim_{x\to0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to0^+} e^{\sin x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\underbrace{\sin x}_{\sim x}\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x}$$

$$\overset{0\cdot\infty\text{型}}{=\!=} e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \overset{\text{洛}}{=\!=} e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-x)} = e^0 = 1$$

例. 求下列极限：(1) $\lim\limits_{x\to0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$；(2) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x}$；(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

[分析]：函数极限 7 种题：$\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型，$0\cdot\infty$型，$\infty-\infty$型，1^∞型，0^0型，∞^0型.

① 1^∞型：万能公式法：$\lim f(x)^{g(x)} \xlongequal{1^\infty} e^{\lim(f(x)-1)\cdot g(x)}$

② 0^0型、∞^0型：指底法：$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)}$

解：(3) 先定型：$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$ 为 ∞^0型，用指底法：

$$\text{原式}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\underbrace{\tan x}_{\sim x}\cdot\underbrace{\ln\frac{1}{x}}_{=-\ln x}}$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot\ln x}\xlongequal{\text{上题}}e^{0}=1$$

2. 数列求极限

例. 设数列 $x_n=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

[分析]：求 n 项和的数列极限：放缩法 + 夹逼准则

准则：对于数列 $\{x_n\}$，$z_n\le x_n\le y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A\Rightarrow$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$

解：1° 先放缩：

缩小　　放大

$$\underbrace{\frac{1}{n^2+n+n}+\frac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}}_{\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}}\le x_n\le\underbrace{\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1}}_{\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}}$$

(只动分母
不动分子)

$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}\xrightarrow{n\to\infty\text{时}}\frac{1}{2}$　　　$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}\xrightarrow{n\to\infty\text{时}}\frac{1}{2}$

由夹逼准则：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$

2. 数列求极限

例. 设 $a_1=6$, $a_n=\sqrt{6+a_{n-1}}$, $n=2,3,\cdots$, (1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在；(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

[分析]：当数列由递推式给定时，一般用"单调有界原理"

原理：若数列 $\{a_n\}$ 满足：
$$\left.\begin{cases} ①\ \{a_n\}\text{单调}\uparrow;\ ②\ a_n\le M\ (\text{有上界}) \\ ①\ \{a_n\}\text{单调}\downarrow;\ ②\ a_n\ge L\ (\text{有下界}) \end{cases}\right\} \lim_{n\to\infty} a_n \exists$$

解：(1) 1°. 先看单调性：作差：$a_n-a_{n-1}=\sqrt{6+a_{n-1}}-\sqrt{6+a_{n-2}} \xlongequal{\text{分子有理化}} \dfrac{a_{n-1}-a_{n-2}}{\sqrt{6+a_{n-1}}+\sqrt{6+a_{n-2}}}$

$\Rightarrow a_n-a_{n-1}$ 的正负与 $a_{n-1}-a_{n-2}$ 的正负相同

而 $a_{n-1}-a_{n-2}$ 的正负与 $a_{n-2}-a_{n-3}$ 相同，……

$\Rightarrow a_n-a_{n-1}$ 的正负与 a_2-a_1 的正负相同，而 $a_1=6$, $a_2=\sqrt{6+a_1}<a_1$

$\Rightarrow a_2-a_1<0 \Rightarrow a_n-a_{n-1}<0 \Rightarrow \{a_n\}\downarrow$

2. 数列求极限

例. 设 $a_1=6$, $a_n=\sqrt{6+a_{n-1}}$, $n=2,3,\cdots$, (1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

[分析]：当数列由递推式给定时，一般用"单调有界原理"

原理：若数列 $\{a_n\}$ 满足：$\left\{\begin{array}{l} ①\ \{a_n\}\text{单调}\uparrow;\ ②\ a_n\le M\ (\text{有上界}) \\ ①\ \{a_n\}\text{单调}\downarrow;\ ②\ a_n\ge L\ (\text{有下界}) \end{array}\right\} \lim\limits_{n\to\infty}a_n\ \exists$

解：(1) 1°. 先看单调性：$\Rightarrow a_2-a_1<0 \Rightarrow a_n-a_{n-1}<0 \Rightarrow \{a_n\}\downarrow$

2°. 再看有界性：$a_n=\sqrt{6+a_{n-1}}>0 \Rightarrow \{a_n\}$ 有下界.

由单调有界原理：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ \exists$

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，由递推式：$a_n=\sqrt{6+a_{n-1}}$ 两边取极限 $\Rightarrow \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}_{A}=\sqrt{6+\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}}_{A}}$

$\Rightarrow A=\sqrt{6+A} \xRightarrow{\text{平方}} A^2=6+A \Rightarrow A=3$，$A=-2$ (舍) $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$

第二讲　极限与连续（二）（2种题型）

3. 函数的连续性.

例. 若 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, & x\le 0 \\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 a, b 的关系：______.

【分析】: 函数的连续性：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Longleftrightarrow$ 则 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

解：因 $f(x)$ 在分段点 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

而 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a+bx^2)=a$ ， $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin bx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{x}=b$ ， $f(0)=a$

$\therefore \quad a=b$

4. 函数的间断点：

例. 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点个数有____个.

[分析]：① 间断点：不连续点（一般为无定义点，分段点）

② 可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq f(x_0)$ ； ③ 跳跃间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$

④ 无穷间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ ； ⑤ 振荡间断点：$\sin\frac{1}{x}$，$\cos\frac{1}{x}$ 在 $x\to0$ 处

解：1° $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的无定义点：$x=0$，$x=\pm1$，$x=\pm2$，$\cdots$

2° 当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1-x^2)}{\sin\boxed{\pi x}}\overset{\sin\pi x\sim\pi x}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot(1-x^2)}{\pi x}=\dfrac{1}{\pi}\Rightarrow x=0$ 可去间断点

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\cdot(1-x^2)}{\sin\pi x}\overset{\text{非0因子}}{=}\lim\limits_{x\to1}x\cdot\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2x}{\cos\pi x\cdot\pi}=\dfrac{2}{\pi}$

要先求 1

洛

-1

$\Rightarrow x=1$ 可去

4. 函数的间断点：

例. 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点个数有____个.

② 可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq f(x_0)$ ；③ 跳跃间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$

解：1° $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的无定义点：$x=0$，$x=\pm1$，$x=\pm2$，⋯⋯

2° 当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1-x^2)}{\sin\pi x}\overset{\sin\pi x\sim\pi x}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot(1-x^2)}{\pi x}=\dfrac{1}{\pi}\Rightarrow x=0$ 可去间断点

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\cdot(1-x^2)}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to1}x\cdot\underbrace{\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}}_{洛}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2x}{\cos\pi x\cdot\pi}=\dfrac{2}{\pi}$ $\Rightarrow x=1$ 可去

当 $x=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x\cdot(1-x^2)}{\sin\pi x}\overset{非0因子先求}{=}\lim\limits_{x\to-1}x\cdot\underbrace{\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}}_{洛}=(-1)\cdot\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{-2x}{\cos\pi x\cdot\pi}=\dfrac{2}{\pi}$ $\Rightarrow x=-1$ 可去

4. 函数的间断点：

例. 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点个数有____个.

④ 无穷间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$；⑤ 振荡间断点：$\sin\frac{1}{x}$，$\cos\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 处

解：1° $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的无定义点：$x=0$，$x=\pm1$，$x=\pm2$，$\cdots$

2° $x=0$ 可去间断点；$x=1$ 可去，$x=-1$ 可去间断点

$x=2$ 时，$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(1-x^2)}{\sin \pi x}=\dfrac{2\cdot(1-4)}{0}=\infty \Rightarrow x=2$ 为无穷间断点.

同理，$x=-2$，$x=\pm3$，$\cdots$ 无定义点均为无穷间断点.

综上：可去间断点有3个.

第三讲　导数与微分（6种题型）

1. 分段函数的可导性

例. 求 a, b 的值，使 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+3, & x\le 0 \\ ax+b, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续、可导.

[分析]：分段函数在分段点处可导 $\Leftrightarrow$ 左导数 = 右导数 $\left(\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\right)$

解：1° 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+2x+3)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+b)$

$\Rightarrow 3=b$ 即 $b=3$

2° 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-\cancel{f(0)}^{\,3}}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x^2+2x+3)-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(ax+\overset{3}{b})-3}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax}{x}$

$\therefore 2=a$，即 $a=2$，$b=3$

$(C)' = 0$,

$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$,

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$,

$(\sin x)' = \cos x$,

$(\cos x)' = -\sin x$,

$(\tan x)' = \sec^2 x$,

$(\cot x)' = -\csc^2 x$,

$(\sec x)' = \sec x \tan x$,

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$,

基本求导公式

$(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$,

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. 隐函数求导

例. 已知 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 所确定，求 $y'(0)$，$y''(0)$

[分析]: 隐函数求导 —— 方程两边同时对 x 求导（注: y 是 x 的函数）

解: 1° 先在方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 两边对 x 求导:

$\Rightarrow\ e^y\cdot y'+6y+6xy'+2x=0$ (*)　　　$e^{y(0)}=1\Rightarrow y(0)=0$

令 $x=0$ 得: $e^{y(0)}\cdot y'(0)+6\cancelto{0}{y(0)}=0$ （其中: 原方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 中令 $x=0$ 得

$\Rightarrow\ y'(0)=0$

2° 在(*)式两边对 x 求导: $e^y\cdot(y')^2+e^y\cdot y''+6y'+6y'+6xy''+2=0$

令 $x=0$ 得: $e^{y(0)}\cdot\cancelto{0}{[y'(0)]^2}+e^{\cancelto{0}{y(0)}}\cdot y''(0)+\cancelto{0}{6y'(0)}+\cancelto{0}{6y'(0)}+0+2=0\Rightarrow y''(0)=-2$

3. 参数方程求导

例. 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\arctan t \\ 2y-ty^2+e^t=5 \end{cases}$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}$

[分析]：若参数方程：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{y'_t}{x'_t}$

解：由 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}$，先求 x'_t 与 y'_t

① 由 $x=\arctan t \Rightarrow x'_t=\frac{1}{1+t^2}$

② 由方程 $2y-ty^2+e^t=5$ 两边同时对 t 求导：$2y'_t-y^2-2ty\cdot y'_t+e^t=0$

得 $y'_t=\frac{y^2-e^t}{2(1-ty)}$，故 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}$

4. 利用对数法求导数

例. 求下列导数：(1) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}\cdot(3-x)^4}{(x+1)^5}$；(2) $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

[分析]：当函数为幂指函数；连乘、连除、开方乘方函数——先取对数，再求导.

解：(1) 两边取对数：$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x+2)+4\ln(3-x)-5\ln(x+1)$

$\xrightarrow[\text{求导}]{\text{两边}} \frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}-4\cdot\frac{1}{3-x}-5\cdot\frac{1}{x+1} \Rightarrow$ 则 $y'=y\cdot\left[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1}\right]$

(2) $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x \xrightarrow[\text{取对数}]{\text{幂指函数}} \ln y=x\ln\frac{x}{1+x}$

$\xrightarrow{\text{求导}} \frac{1}{y}\cdot y'=\ln\frac{x}{1+x}+x\cdot\left(\ln\frac{x}{1+x}\right)'=\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}$

$\left(\ln\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{1+x}{x}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}$

$\Rightarrow$ 则 $y'=y\cdot\left[\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right]=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\left[\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right]$

5. 函数的微分

例. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，求 (1) dy ；(2) $dy\big|_{x=0}$

[分析]：微分：$dy=y'(x)\cdot dx$ ； $dy\big|_{x=x_0}=y'(x_0)\cdot dx$

解：(1) 由 $dy=y'\cdot dx$ ，先求 y' .

在方程 $2^{xy}=x+y$ 两边对 x 求导：

$$2^{xy}\cdot\ln 2\cdot[y+xy']=1+y' \Rightarrow y'=\frac{2^{xy}\cdot\ln 2\cdot y-1}{1-2^{xy}\cdot\ln 2\cdot x}$$

$$\therefore\ dy=y'dx=\frac{2^{xy}\cdot\ln 2\cdot y-1}{1-2^{xy}\cdot\ln 2\cdot x}\,dx$$

(2) 由 $dy\big|_{x=0}=y'(0)\,dx$ ，其中

$$\left.\begin{cases} y'(0)=\dfrac{\overset{1}{2^{0}}\cdot\ln 2\cdot\overset{1}{y(0)}-1}{1-0}=\ln 2-1 \\ \text{原方程: } 2^{xy}=x+y \text{ 令 } x=0 \Rightarrow y(0)=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow dy\big|_{x=0}=(\ln 2-1)\cdot dx$$

6. 利用莱布尼兹法求高阶导数

例. 设 $f(x)=x^2\cdot e^{2x}$，求 $f^{(100)}(0)$

[分析] $(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}v^{(0)}+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+u^{(0)}v^{(n)}$ (莱布尼兹公式)

解：用莱布尼兹公式时，一般把幂函数 x^n 看成 v. $\Rightarrow f(x)=\underbrace{e^{2x}}_{u}\cdot\underbrace{x^2}_{v}$

$$\Rightarrow f^{(100)}(x)=(e^{2x})^{(100)}\cdot x^2+C_{100}^1(e^{2x})^{(99)}\cdot\overset{2x}{(x^2)'}+C_{100}^2(e^{2x})^{(98)}\cdot\overset{2}{(x^2)''}+0+0+\cdots$$

$$=(e^{2x})^{(100)}x^2+C_{100}^1(e^{2x})^{(99)}\cdot 2x+C_{100}^2(e^{2x})^{(98)}\cdot 2$$

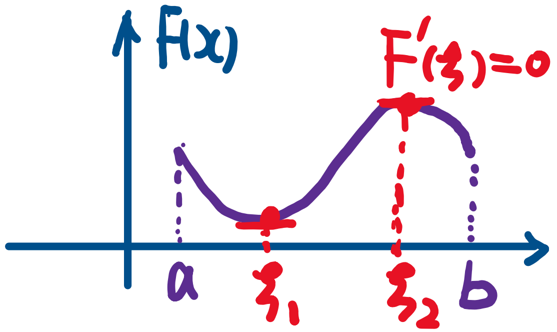
令 $x=0$

$$\Rightarrow f^{(100)}(0)=C_{100}^2\cdot(e^{2x})^{(98)}\cdot 2\Big|_{x=0}=\frac{100\times 99}{2!}\cdot\left[2^{98}\cdot e^{2x}\right]_{x=0}\cdot 2=9900\times 2^{98}$$

第四讲　微分中值定理及导数的应用（一）（2种题型）

1. 利用罗尔定理证明含 ξ 的等式.

例. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，在 $(-a,a)$ 内可导，且 $f(-a)=f(a)$，$a>0$，试证：在 $(-a,a)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$



[分析]：含有中值 ξ 的等式证明：可用罗尔中值定理.

① 罗尔定理：1° $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；2° 在 (a,b) 内可导；3° $F(a)=F(b)$

$\Rightarrow$ 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$.

② 如何构造辅助函数：(公式法) 1° 移项变形为：$f'(x)+g(x)f(x)=0$；

2° 得辅助函数：$F(x)=e^{\int g(x)dx}\cdot f(x)$ ；3° 验证三条件，用罗尔定理.

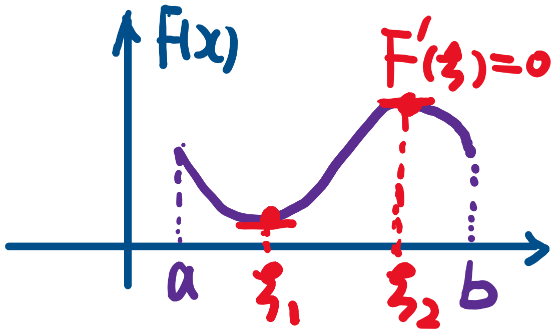
② 罗尔定理之常见辅助函数构造小结：

要证明的结论	凑成等价导数形式	辅助函数 $F(x)$
$f'(\xi)=A\xi+B$	$\left[f(x)-\frac{A}{2}x^2-Bx\right]'_{x=\xi}=0$	$F(x)=f(x)-\frac{A}{2}x^2-Bx$
$f'(\xi)g(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$	$\left[f(x)\cdot g(x)\right]'_{x=\xi}=0$	$F(x)=f(x)\cdot g(x)$
$f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$	$\left[e^{g(x)}\cdot f(x)\right]'_{x=\xi}=0$	$F(x)=e^{g(x)}f(x)$
$f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$	$\left[e^{\int g(x)dx}\cdot f(x)\right]'_{x=\xi}=0$	$F(x)=e^{\int g(x)dx}\cdot f(x)$ 公式法
$f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$	$\left[e^{\lambda x}\cdot f(x)\right]'_{x=\xi}=0$	$F(x)=e^{\lambda x}\cdot f(x)$

本题：$f'(\xi)=2\xi f(\xi)$

1. 利用罗尔定理证明含ξ的等式.

例. 设$f(x)$在$[-a,a]$上连续，在$(-a,a)$内可导，且$f(-a)=f(a)$，$a>0$，试证：在$(-a,a)$内至少存在一点ξ，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$



[分析]：含有中值ξ的等式证明：可用罗尔中值定理.

① 罗尔定理：1° $F(x)$在$[a,b]$上连续；2° 在(a,b)内可导；$F(a)=F(b)$

⇒ 则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$.

证明：先构造辅助函数 $F(x)=e^{\int -2x\,dx}\cdot f(x)=e^{-x^2}\cdot f(x)$,

显然$F(x)$在连续、可导，$\begin{cases} F(a)=e^{-a^2}\cdot f(a) \\ F(-a)=e^{-a^2}\cdot f(-a) \end{cases}$ ⇒ $F(-a)=F(a)$ ⇒ 由罗尔定理：

$\exists\,\xi\in(-a,a)$，使$F'(\xi)=0$

即：$f'(\xi)=2\xi\cdot f(\xi)$

2. 利用拉格朗日定理证明含 ξ 的等式

例. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，可导，证明：在 (a,b) 上至少存在一点 ξ，使得：

$$\xi f'(\xi)+f(\xi)=\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}$$

[分析]：含中值 ξ，且含函数值之差时 —— 用拉格朗日定理证明：

拉格朗日定理：若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得：$F(b)-F(a)=F'(\xi)\cdot(b-a)$.

证明：即要证：$bf(b)-af(a)=[\xi f'(\xi)+f(\xi)]\cdot(b-a)$，构造辅助函数：$F(x)=xf(x)$

由拉格朗日定理：$F(b)-F(a)=F'(\xi)\cdot(b-a)$，$\xi\in(a,b)$.

即：$bf(b)-af(b)=[f(\xi)+\xi f'(\xi)](b-a)$.

第五讲　微分中值定理及导数的应用（二）（2种题型）

3. 证明不等式.

例. 当 $x>0$ 时，证明：$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

[分析]：不等式的证明：法1°：利用单调性. 法2°. 利用拉格朗日定理.

法1°. 解：① 令 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$，$x\in[0,+\infty)$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}\geq 0 \Rightarrow f(x)\uparrow$ 于 $[0,+\infty)$

当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0 \Rightarrow \ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$

② 令 $g(x)=\ln(1+x)-x$，$x\in[0,+\infty)$

$\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}\leq 0 \Rightarrow g(x)\downarrow$ 于 $[0,+\infty)$

当 $x>0$ 时，$g(x)<g(0)=0 \Rightarrow \ln(1+x)<x$

3. 证明不等式.

例. 当 $x>0$ 时，证明：$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

[分析]：不等式的证明：法1°：利用单调性. 法2°. 利用拉格朗日定理.

$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a),\ a<\xi<b$

法2° 解：即要证 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)-\ln 1<x$

令 $f(x)=\ln x$，$x\in[1,1+x]$，由 $f(x)$ 在 $[1,1+x]$ 上用拉格朗日定理：

$f(1+x)-f(1)=f'(\xi)\cdot x$，$1<\xi<1+x$

$\Rightarrow \ln(1+x)-\ln 1=\frac{1}{\xi}\cdot x$，而 $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{\xi}<1$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x}\cdot x<\ln(1+x)-\ln 1<1\cdot x \quad \Rightarrow \frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

4. 函数的性态（"三点"、"两性"、"一线"：极值点、最值点、拐点；单调性、凹凸性；渐近线）

例. 设 $f(x)=\frac{x^3}{(2+x)^2}+4$，求函数的单调区间、凹凸区间、极值、拐点，及渐近线.

[分析]：1°. 单调性：$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\uparrow$；$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\downarrow$.

2°. 凹凸性：$f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 为凹函数；$f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 为凸函数.（"小凸大凹"）

3°. 极值点一般为单调区间的分界点；拐点一般为凹凸区间的分界点.

解：(1). 第1步：先求定义域：$x\neq -2$；

第2步：再求 $f'(x)$，$f''(x)$，并令 $f'(x)=0$，$f''(x)=0$ 得零点.

$$f'(x)=\frac{3x^2(2+x)^2-x^3\cdot 2(2+x)}{(2+x)^4}=\frac{x^2(6+x)}{(2+x)^3},\quad f''(x)=\frac{24x}{(2+x)^4}$$

令 $f'(x)=0$ 得驻点：$x_1=-6$，$x_2=0$；令 $f''(x)=0$ 得：$x=0$

4. 函数的性态（"三点"、"两性"、"一线"：极值点，最值点，拐点；单调性、凹凸性；渐近线）

例. 设 $f(x)=\dfrac{x^3}{(2+x)^2}+4$，求函数的单调区间，凹凸区间，极值，拐点，及渐近线.

【分析】：1° 单调性：$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\uparrow$；$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\downarrow$.

2° 凹凸性：$f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 为凹函数；$f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 为凸函数.（小凸大凹）

解：(1). 第1°步：先求定义域：$x\neq -2$；

第2°步：$f'(x)=\dfrac{x^2(6+x)}{(2+x)^3}$，$f''(x)=\dfrac{24x}{(2+x)^4}$，$x_1=-6$，$x_2=0$

第3°步：列表考查性态.

x	$(-\infty,-6)$	-6	$(-6,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	>0	0	<0	/	>0	0	>0
$f''(x)$	<0	<0	<0	/	<0	0	>0
$f(x)$	↗ 凸	极大	↘ 凸	无定义	↗ 凸	拐点	↗ 凹

4. 函数的性态（"三点"、"两性"、"一线"：极值点、最值点、拐点；单调性、凹凸性；渐近线）

例. 设 $f(x)=\frac{x^3}{(2+x)^2}+4$，求函数的单调区间，凹凸区间，极值，拐点，及渐近线.

[分析]：1° 单调性：$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\uparrow$；$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\downarrow$.

2° 凹凸性：$f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 为凹函数；$f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 为凸函数.（小凸大凹）

第3步：列表考查性态.

x	$(-\infty,-6)$	-6	$(-6,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	>0	0	<0	/	>0	0	>0
$f''(x)$	<0	<0	<0	/	<0	0	>0
$f(x)$	↗ 凸	极大	↘ 凸	无定义	↗ 凸	拐点	↗ 凹

$\Rightarrow f(-6)=-\frac{19}{2}$ 为极大值，点 $(0,4)$ 为拐点

4. 函数的性态("三点"、"两性"、"一线":极值点、最值点、拐点;单调性、凹凸性;渐近线)

例. 设 $f(x)=\dfrac{x^3}{(2+x)^2}+4$,求函数的单调区间、凹凸区间、极值、拐点,及渐近线.

[分析]: 3°. 渐近线: ① 铅直渐近线: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty \overset{x_0\text{无定义}}{\Longleftrightarrow} x=x_0$ 为铅直渐近线.

② 水平渐近线: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=C$ $(x\to-\infty)$ $\Leftrightarrow y=C$ 为 $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ 时的水平渐近线.

③ 斜渐近线: $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}\neq0$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax] \Leftrightarrow y=ax+b$ 为斜渐近线.

解:(2) 三类渐近线:

① 看铅直: 无定义点 $x=-2$, $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{x^3}{(2+x)^2}+4\right)=\infty \Rightarrow x=-2$ 为铅直渐近线

② 看水平: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{(2+x)^2}+4\right)=\infty \Rightarrow f(x)$ 无水平渐近线

4. 函数的性态（"三点"、"两性"、"一线"：极值点，最值点，拐点；单调性、凹凸性；渐近线）

例. 设 $f(x)=\frac{x^3}{(2+x)^2}+4$，求函数的单调区间，凹凸区间，极值，拐点，及渐近线.

③ 斜渐近线：$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\neq 0$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax] \Leftrightarrow y=ax+b$ 为斜渐近线.

解：(2) ① 看铅直：无定义点 $x=-2$，$\lim\limits_{x\to -2}f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{x^3}{(2+x)^2}+4\right)=\infty \Rightarrow x=-2$ 为铅直渐近线

② 看水平：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(2+x)^2}+4\right)=\infty \Rightarrow f(x)$ 无水平渐近线

③ 看斜：$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(2+x)^2}+\frac{4}{x}\right]=1$，

$\cancel{x^3}+16+16x+\cancel{4x^2}-4x-\cancel{4x^2}-\cancel{x^3}$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-\overset{1}{a}x]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x^3}{(2+x)^2}+4\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4(2+x)^2-x(2+x)^2}{(2+x)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16+12x}{(2+x)^2}=0$

$\therefore y=ax+b=x$ 为斜渐近线.

本章其它考点：

① 切线方程： 切点 $(x_0, f(x_0))$ $\xRightarrow{k_{切}=f'(x_0)}$ $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

② 法线方程： $k_{法}=-\frac{1}{f'(x_0)}$ $\Rightarrow$ $y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

③ 曲率： $k=\frac{|y''|}{[1+y'^2]^{3/2}}$

曲率半径： $R=\frac{1}{曲率}$

第六讲　不定积分（一）　（2种题型）

框框老师课堂

1. 利用凑微分法求不定积分(第一换元法)

例. 求下列不定积分：(1) $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$　(2) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$；(3) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

(1) $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C(a \neq -1)$　(2) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

(3) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$　(4) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(5) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$　(6) $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

(7) $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$　(8) $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(9) $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$　(10) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

(11) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$　(12) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

(13) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$　(14) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + C$

(15) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$　(16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

(17) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$　(18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

直接积分表

$dx = \int f(\ln x)\,d\ln x$；

$\cos x\,dx = \int f(\sin x)\,d\sin x$　"瞄准积准"

$\sec^2 x\,dx = \int f(\tan x)\,d\tan x$

$\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(x^3+1)^{1+\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C$

$+ C$

(3) 法1：原式 $= \int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx = \int 1\,dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

$= x - \int \frac{1}{1+e^x}d(e^x+1) = x - \ln(1+e^x) + C$

1. 利用凑微分法求不定积分(第一换元法)

例. 求下列不定积分：(1) $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ (2) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$; (3) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

[分析]：凑微分法(第一换元法)：① $\int f(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)\,d\ln x$;

② $\int f(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}dx=-\int f(\frac{1}{x})\,d\frac{1}{x}$; ③ $\int f(\sin x)\cos x\,dx=\int f(\sin x)\,d\sin x$ "提谁积谁"

④ $\int f(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\int f(\sqrt{x})\,d\sqrt{x}$; ⑤ $\int f(\tan x)\cdot\sec^2 x\,dx=\int f(\tan x)\,d\tan x$

(3) 法1：原式 $=\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=\int 1\,dx-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx$

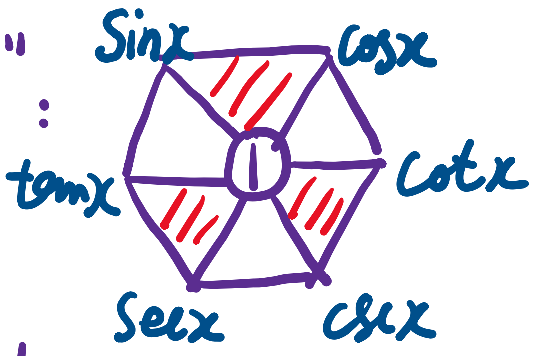
$=x-\int\frac{1}{1+e^x}d(e^x+1)=x-\ln(1+e^x)+C$

法2：原式 $=\int\frac{1}{1+e^x}dx\ \underline{\underline{同乘e^{-x}}}\ \int\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$

$=-\int\frac{1}{e^{-x}+1}d(e^{-x}+1)=-\ln|1+e^{-x}|+C.$

例. 求下列不定积分: (1) $\int \tan^3 x\, dx$; (2) $\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$

[分析]: ① 三角函数的"六边形":



3个平方关系:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$.

3个倒数关系:

$\sin x \cdot \csc x = 1$; $\tan x \cdot \cot x = 1$; $\cos x \cdot \sec x = 1$

② $\int f(\tan x) \cdot \sec^2 x\, dx = \int f(\tan x)\, d\tan x$

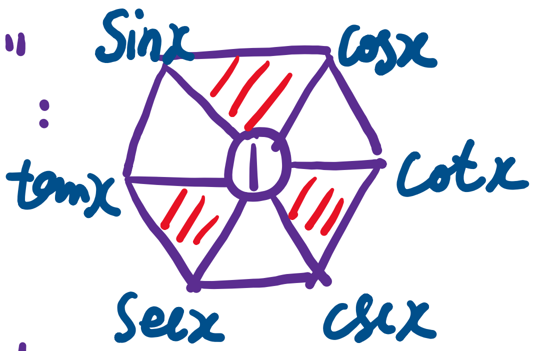
解: (1) $\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x \cdot \tan^2 x\, dx = \int \tan x (\sec^2 x - 1)\, dx$

$= \int \tan x \cdot \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx = \int \tan x\, d\tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$

例. 求下列不定积分：(1) $\int \tan^3 x\,dx$；(2) $\int \frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx$

[分析]：① 三角函数的"六边形"：



3个倒数关系：

$\sin x\cdot\csc x=1$；$\tan x\cdot\cot x=1$；$\cos x\cdot\sec x=1$

3个平方关系：

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$\tan^2 x+1=\sec^2 x$

$\cot^2 x+1=\csc^2 x$.

② $\int f(\tan x)\cdot\sec^2 x\,dx = \int f(\tan x)\,d\tan x$

解：(2) $\int \frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx \xlongequal{\text{同除}\cos^2 x} \int \frac{\overset{\to\sec^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x}}}{\tan^2 x+2}\,dx = \int \frac{1}{2+\tan^2 x}\,d\tan x$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+C$

2. 利用第二类换元法求不定积分

例. 求下列不定积分：(1) $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx$ ；(2) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx$ ；(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

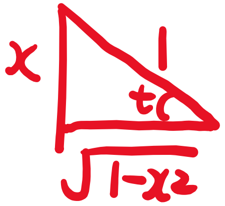
[分析]：① 当 $\int f(x)dx$ 的 $f(x)$ 中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$（令 $x=a\sin t$）；含有 $\sqrt{a^2+x^2}$（令 $x=a\tan t$）

含有 $\sqrt{x^2-a^2}$（令 $x=a\sec t$）；② 当 $\int f(x)dx$ 的 $f(x)$ 含有一次根式 $\sqrt{ax+b}$（令 $\sqrt{ax+b}=t$）

③ 当 $\int f(x)dx$ 的 $f(x)$ 含有 $\sqrt[m]{x}$ 与 $\sqrt[n]{x}$（令 $\sqrt[l]{x}=t$，$l=m$ 与 n 的最小公倍数）

解：(1) $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx \xlongequal[\sqrt{1-x^2}=\cos t]{令x=\sin t} \int \frac{1}{(1-\sin t)\cdot\cos t}d\sin t = \int \frac{1}{(1-\sin t)\cancel{\cos t}}\cdot\cancel{\cos t}\,dt$

$= \int \frac{1}{1-\sin t}dt \xlongequal[同乘1+\sin t]{“\Delta”\to“\nabla”} \int \frac{1+\sin t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{1}{\cos^2 t}dt + \int \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$



三角形法

$= \int \sec^2 t\,dt - \int \frac{1}{\cos^2 t}d\cos t = \tan t + \frac{1}{\cos t} + C \xlongequal{回代} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$

2. 利用第二类换元法求不定积分

例. 求下列不定积分：(1) $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx$ ；(2) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx$ ；(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

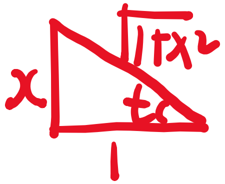
[分析]：① 当 $\int f(x)dx$ 的 $f(x)$ 中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$（令 $x=a\sin t$）；含有 $\sqrt{a^2+x^2}$（令 $x=a\tan t$）

含有 $\sqrt{x^2-a^2}$（令 $x=a\sec t$）；② 当 $\int f(x)dx$ 的 $f(x)$ 含有一次根式 $\sqrt{ax+b}$（令 $\sqrt{ax+b}=t$）

③ 当 $\int f(x)dx$ 的 $f(x)$ 含有 $\sqrt[m]{x}$ 与 $\sqrt[n]{x}$（令 $\sqrt[l]{x}=t$，$l=m$ 与 n 的最小公倍数）

解：(2) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx \xlongequal[\sqrt{x^2+1}=\sec t]{令x=\tan t} \int \frac{1}{\tan^2 t\cdot\sec t}d\tan t = \int \frac{1}{\tan^2 t\cdot\sec t}\cdot\sec^2 t\,dt$

$= \int \frac{\sec t}{\tan^2 t}dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = \int \frac{1}{\sin^2 t}d\sin t = -\frac{1}{\sin t}+C$



$\xlongequal{回代} -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$

框框老师课堂

2. 利用第二类换元法求不定积分

例. 求下列不定积分：(1) $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx$ ；(2) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx$ ；(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

[分析]：① 当 $\int f(x)dx$ 的 $f(x)$ 中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ (令 $x=a\sin t$)；含有 $\sqrt{a^2+x^2}$ (令 $x=a\tan t$)

含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ (令 $x=a\sec t$)；② 当 $\int f(x)dx$ 的 $f(x)$ 含有一次根式 $\sqrt{ax+b}$ (令 $\sqrt{ax+b}=t$)

③ 当 $\int f(x)dx$ 的 $f(x)$ 含有 $\sqrt[m]{x}$ 与 $\sqrt[n]{x}$ (令 $\sqrt[l]{x}=t$，$l=m$ 与 n 的最小公倍数)

解：(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx \xrightarrow[\sqrt{x}=t^3,\ \sqrt[3]{x}=t^2]{\text{令}\sqrt[6]{x}=t} \int \frac{1}{t^3+t^2}dt^6 = 6\int \frac{t^5}{t^2(t+1)}dt$

$$= 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}dt = 6\int \frac{\cancel{(t+1)}(t^2-t+1)}{\cancel{t+1}}dt - 6\int \frac{1}{t+1}dt$$

$$= 6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right]-6\ln|1+t|+C \xlongequal{\text{回代}} 6\left[\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-\ln(1+\sqrt[6]{x})\right]+C$$

第六讲　不定积分（二）　（2种题型）

3. 利用分部积分法求不定积分.

例. 求下列不定积分：(1) $\int x^2 \cdot e^x dx$ ；(2) $\int x^2 \cos x\, dx$ ；(3) $\int e^{2x} \cos x\, dx$

[分析]：① 当被积函数为两类不同函数相乘(复合)时，用分部法：$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

② 口诀："反对幂三指". 如 $\int x e^x dx$ ，$\int x^2 \cdot \ln x\, dx$ ，$\int x \arctan x\, dx$

解：(1) $\int \underset{幂\cdot指}{x^2 e^x} dx = \int \underbrace{x^2}_{u} d\underbrace{e^x}_{v} = x^2 e^x - \int e^x dx^2 = x^2 e^x - 2\int \underset{幂\ 指}{x e^x} dx$

$= x^2 e^x - 2\int \underbrace{x}_{u}\, d\underbrace{e^x}_{v} = x^2 e^x - 2[x e^x - \int e^x dx]$

$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

[小结]：秒杀：$\int x^2 e^x dx = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + C$ ；$\int x^3 e^x dx$ ；$\int x^2 e^{2x} dx$.

导，导，正负相间

3. 利用分部积分法求不定积分.

例. 求下列不定积分：(1) $\int x^2 \cdot e^x dx$ ；(2) $\int x^2 \cos x\, dx$ ；(3) $\int e^{2x} \cos x\, dx$

[分析]：① 当被积函数为两类不同函数相乘(复合)时，用分部法：$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

② 口诀："反对幂三指"．如 $\int x e^x dx$ ，$\int x^2 \cdot \ln x\, dx$ ，$\int x \arctan x\, dx$

解：(1) $\int x^2 e^x dx$ $= \int \underbrace{x^2}_{u} d\underbrace{e^x}_{v} = x^2 e^x - \int e^x dx^2 = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$

幂·指　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　幂指

[小结]：秒杀：$\int x^2 e^x dx = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + C$ ；$\int x^3 e^x dx$ ；$\int x^2 e^{2x} dx$.

导，导，正负相间

3. 利用分部积分法求不定积分.

例. 求下列不定积分：(1) $\int x^2 \cdot e^x\,dx$；(2) $\int x^2\cos x\,dx$；(3) $\int e^{2x}\cos x\,dx$

[分析]：① 当被积函数为两类不同函数相乘(复合)时，用分部法：$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

② 口诀："反对幂三指". 如 $\int x e^x\,dx$，$\int x^2 \cdot \ln x\,dx$，$\int x\arctan x\,dx$

解：(2) $\int x^2\cos x\,dx = \int \underset{u}{\underline{x^2}}\, d\,\underset{v}{\underline{\sin x}} = x^2\cdot\sin x - \int \sin x\, dx^2$

幂·三

$= x^2\sin x - 2\int \sin x\cdot x\,dx = x^2\cdot\sin x + 2\int \underset{u}{\underline{x}}\, d\,\underset{v}{\underline{\cos x}}$

三·幂

$= x^2\sin x + 2[x\cos x - \int \cos x\,dx] = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

[小结]：秒杀：$\int x^2\cos x\,dx = \int \underset{u}{x^2}\, d\,\underset{v}{\sin x} = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$；$\int x^3\cos x\,dx$；$\int x\sin x\,dx$

$u\cdot v + u'\cdot v' + u''\cdot v''$

3. 利用分部积分法求不定积分.

例. 求下列不定积分：(1) $\int x^2 \cdot e^x \, dx$ ；(2) $\int x^2 \cos x \, dx$ ；(3) $\int e^{2x} \cos x \, dx$

[分析]：① 当被积函数为两类不同函数相乘(复合)时，用分部法：$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

② 口决："反对幂三指"．如 $\int x e^x \, dx$ ，$\int x^2 \cdot \ln x \, dx$ ，$\int x \arctan x \, dx$

解：(2) $\int \underset{幂 \cdot 三}{x^2 \cos x} \, dx = \int \underset{u}{x^2} \, d \underset{v}{\sin x} = x^2 \cdot \sin x - \int \sin x \, d x^2$

[小结]：秒杀：$\int x^2 \cos x \, dx = \int \underset{u}{x^2} \, d \underset{v}{\sin x} = \underset{u \cdot v \; + \; u' \cdot v' \; + \; u'' \cdot v''}{x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C}$ ；$\int x^3 \cos x \, dx$ ；$\int x \sin x \, dx$

3. 利用分部积分法求不定积分.

例. 求下列不定积分：(1) $\int x^2 \cdot e^x dx$ ；(2) $\int x^2 \cos x\, dx$ ；(3) $\int e^{2x} \cos x\, dx$

[分析]：① 当被积函数为两类不同函数相乘(复合)时，用分部法：$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

② 口诀："反对幂三指"．如 $\int x e^x dx$，$\int x^2 \cdot \ln x\, dx$，$\int x \arctan x\, dx$

解：(3) 设 $I = \int \underset{指}{e^{2x}} \cdot \underset{三}{\cos x}\, dx = \int \underbrace{e^{2x}}_{u} d \underbrace{\sin x}_{v} = e^{2x} \cdot \sin x - \int \sin x\, d e^{2x}$

$= e^{2x} \cdot \sin x - 2 \int \underset{指}{e^{2x}} \cdot \underset{三}{\sin x}\, dx = e^{2x} \cdot \sin x + 2 \int \underbrace{e^{2x}}_{u} d \underbrace{\cos x}_{v}$

$= e^{2x} \sin x + 2 e^{2x} \cos x - 2 \int \cos x\, d e^{2x}$

$= e^{2x} \cdot \sin x + 2 e^{2x} \cdot \cos x - 4 \underbrace{\int e^{2x} \cdot \cos x\, dx}_{I}$

$\Rightarrow 5I = e^{2x} \sin x + 2 e^{2x} \cdot \cos x \Rightarrow I = \frac{1}{5}\left[e^{2x} \sin x + 2 e^{2x} \cos x\right] + C$

3. 利用分部积分法求不定积分.

例. 求下列不定积分：(1) $\int x^2 \cdot e^x \, dx$ ；(2) $\int x^2 \cos x \, dx$ ；(3) $\int e^{2x} \cos x \, dx$

解：(3) 设 $I = \int \underset{\text{指}}{e^{2x}} \cdot \underset{\text{三}}{\cos x} \, dx = \int \underset{u}{\underline{e^{2x}}} \, d \underset{v}{\underline{\sin x}} = e^{2x} \cdot \sin x - \int \sin x \, d e^{2x}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{5}\left[e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x\right] + C$

[小结]：秒杀： $\int e^{Ax} \cdot \underbrace{\cos Bx}_{\sin Bx} \, dx = \frac{\begin{vmatrix} (e^{Ax})' & e^{Ax} \\ (\cos Bx)' & \cos Bx \end{vmatrix}}{A^2 + B^2} + C$

如： $\int e^x \cdot \sin 2x \, dx$ ， $\int e^{3x} \cos 2x \, dx$.

4. 求分式函数的不定积分

例：求下列不定积分：(1) $\int \frac{1}{x^2-x-12}dx$；(2) $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}dx$；(3) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

[分析]：$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$：① 当分母 $Q(x)$ 可因式分解 $(\Delta>0)$ 时 —— 用裂项法

② 当分母 $Q(x)$ 不能因式分解 $(\Delta<0)$ 时 —— 配方法 + $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$ 或 $\int \frac{(分母)'}{分母}dx$

解：(1) 分式 $= \frac{1}{x^2-x-12} = \frac{1}{(x-4)(x+3)} \overset{裂项}{=} \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3}$

$\Rightarrow$ 比较分子得：$A(x+3)+B(x-4)=1 \Rightarrow \begin{cases} 令x=4 \Rightarrow A=\frac{1}{7} \\ 令x=-3 \Rightarrow B=-\frac{1}{7} \end{cases}$

$\therefore$ 原式 $= \int \frac{1}{x^2-x-12}dx = \int \frac{\frac{1}{7}}{x-4} + \frac{-\frac{1}{7}}{x+3}dx$

$= \frac{1}{7}\ln|x-4| - \frac{1}{7}\ln|x+3| + C$

4. 求分式函数的不定积分

例：求下列不定积分：(1) $\int \frac{1}{x^2-x-12}dx$；(2) $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}dx$；(3) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

[分析]：$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$：① 当分母 $Q(x)$ 可因式分解 ($\Delta>0$) 时 —— 用裂项法

② 当分母 $Q(x)$ 不能因式分解 ($\Delta<0$) 时 —— 配方法 + $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$ 或 $\int \frac{(分母)'}{分母}dx$

解：(2) 分式 $= \frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{5x-1}{(x-2)(x+1)} \overset{裂项}{=} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$

$\Rightarrow$ 比较分子得：$A(x+1)+B(x-2)=5x-1 \Rightarrow \begin{cases} 令\ x=2 \Rightarrow A=3 \\ 令\ x=-1 \Rightarrow B=2 \end{cases}$

$\therefore$ 原式 $= \int \frac{5x-1}{x^2-x-2}dx = \int \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1}dx = 3\ln|x-2| + 2\ln|x+1| + C$

4. 求分式函数的不定积分

例：求下列不定积分：(1) $\int \frac{1}{x^2-x-12}dx$；(2) $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}dx$；(3) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

[分析]：$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$：① 当分母 $Q(x)$ 可因式分解 $(\Delta>0)$ 时 —— 用裂项法

② 当分母 $Q(x)$ 不能因式分解 $(\Delta<0)$ 时 —— 配方法 + $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$ 或 $\int \frac{(分母)'}{分母}dx$

解：(3) 原式 $= \int \frac{1}{x^2+x+1}dx \overset{\Delta<0}{\underset{配方}{=\!=}} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C$

(改题)：$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$，$\Delta<0$，$(分母)'=(x^2+x+1)'=2x+1$

$\xrightarrow[(分母)']{分子变为}$ 分子 $= x+1 = \frac{1}{2}(2x+2) = \frac{1}{2}(2x+1+1) = \frac{1}{2}(分母'+1)$

4. 求分式函数的不定积分

例：求下列不定积分：(1) $\int \frac{1}{x^2-x-12}dx$；(2) $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}dx$；(3) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

解：(3) 原式 $= \int \frac{1}{x^2+x+1}dx \overset{\Delta<0}{\underset{配方}{=\!=}} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C$

(改题)：$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$，$\Delta<0$，$\underline{(分母)'=(x^2+x+1)'=2x+1}$

$\xrightarrow[分母']{分子变为}$ 分子 $= x+1 = \frac{1}{2}(2x+2) = \frac{1}{2}(\boxed{2x+1}+1) = \frac{1}{2}(分母'+1)$

$\therefore$ 原式 $= \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}[(x^2+x+1)'+1]}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2}$(第(3)题) $+ C$

例. 求不定积分：$\int \frac{1}{1+\sin x}dx$

[分析]：当分式为三角函数相除时 —— 可用万能公式法：

令 $\tan\frac{x}{2}=t \Rightarrow x=2\arctan t$，$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

解：法1：万能公式法：令 $\tan\frac{x}{2}=t \Rightarrow x=2\arctan t \Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

$$\text{原式}=\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}d\,2\arctan t=2\int \frac{1+t^2}{1+t^2+2t}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=2\int\frac{1}{(1+t)^2}dt$$

$$=-2\cdot\frac{1}{1+t}+C \xlongequal{\text{回代}} -2\cdot\frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}}+C$$

例. 求不定积分：$\int \frac{1}{1+\sin x}dx$

解：法1：万能公式法：令 $\tan\frac{x}{2}=t \Rightarrow x=2\arctan t \Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

$$\text{原式}=\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\,d\,2\arctan t=2\int \frac{1+t^2}{1+t^2+2t}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=2\int\frac{1}{(1+t)^2}dt$$

$$=-2\cdot\frac{1}{1+t}+C \overset{\text{回代}}{=\!=} -2\cdot\frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}}+C$$

法2："△"→"▽"

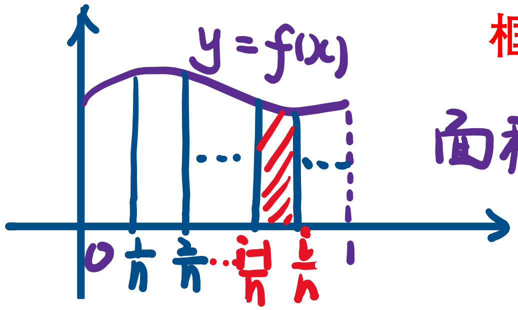
$$\text{原式}=\int\frac{1}{1+\sin x}dx \overset{\text{同乘}}{\underset{1-\sin x}{=\!=}} \int\frac{1-\sin x}{\underbrace{1-\sin^2 x}_{\cos^2 x}}dx=\int \frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int \sec^2 x\,dx-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$$

第七讲　定积分及其应用（一）（3种题型）

1. 利用定积分求极限

例. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]$



面积 $=\int_0^1 f(x)\,dx$

直接积分表

$(1)\ \int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C(a\neq-1)$ $\quad(2)\ \int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

$(3)\ \int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ $\quad(4)\ \int\sin x\,dx=-\cos x+C$

$(5)\ \int\cos x\,dx=\sin x+C$ $\quad(6)\ \int\tan x\,dx=-\ln|\cos x|+C$

$(7)\ \int\cot x\,dx=\ln|\sin x|+C$ $\quad(8)\ \int\sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$

$(9)\ \int\csc x\,dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$ $\quad(10)\ \int\sec^2 x\,dx=\tan x+C$

$(11)\ \int\csc^2 x\,dx=-\cot x+C$ $\quad(12)\ \int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$

$(13)\ \int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$ $\quad(14)\ \int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right|+C$

$(15)\ \int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$ $\quad(16)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$

$(17)\ \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$ $\quad(18)\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$

定积分定义

$\frac{1}{n}\cdot f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)\,dx$

令 $\frac{i}{n}=x$ 得 $f(x)$, 用公式.

$\frac{1}{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\to f(\frac{i}{n})$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1$

$=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$

例. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\int_0^x\sqrt{1+t^2}\,dt}{x}+\dfrac{\int_0^x \sin t\,dt}{x^2}\right]$

[分析]：① $\frac{0}{0}$ 型极限：洛必达法则；

② 变上限积分求导：$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$；$\left(\int_a^{u(x)} f(t)\,dt\right)'=f(u(x))\cdot u'(x)$

解：原式 $\overset{拆}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sqrt{1+t^2}\,dt}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\,dt}{x^2}$

$\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^{\sim x}}{2x}$

$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

2. 利用换元法求定积分

例. 求定积分：$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

[分析]：① 积分区间对称时，常用"偶倍奇0"化简：$\int_{-a}^{a}奇\,dx=0$；$\int_{-a}^{a}偶\,dx=2\int_{0}^{a}偶\,dx$

② 华里氏公式：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}，当n为偶数\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1，当n为奇数\end{cases}$

如：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$；$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\,dx=\frac{2}{3}\cdot 1$

解：原式 $=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}}_{偶}dx+\int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}}_{奇}dx$

$=2\int_0^1\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+0\ \overset{令x=\sin t}{=\!=\!=}\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2t}{1+\cos t}d\sin t$

$x=0$时，$t=0$
$x=1$时，$t=\pi/2$

$1-\cos^2t=(1+\cos t)(1-\cos t)$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2t}{1+\cos t}\cdot\cos t\,dt$

2. 利用换元法求定积分

例. 求定积分: $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

[分析]: ① 积分区间对称时,常用"偶倍奇0"化简: $\int_{-a}^{a}奇dx=0$; $\int_{-a}^{a}偶dx=2\int_{0}^{a}偶dx$

② 华里氏公式: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & 当n为偶数\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1, & 当n为奇数\end{cases}$

如: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\frac{2}{3}\cdot 1$

解: 原式 $=2\int_0^1\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+0\xlongequal{令x=\sin t}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{1+\cos t}d\sin t$

$1-\cos^2 t=\cancel{(1+\cos t)}(1-\cos t)$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\cancel{1+\cos t}}\cdot\cos t\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos t)\cos t\,dt$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t-\cos^2 t\,dt\xlongequal{华里氏}4\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]=4-\pi$

3. 利用分部积分法求定积分

例. (1) $\int_1^2 x\cdot\ln\sqrt{x}\,dx$; (2) $\int_0^1 x\cdot\arctan x\,dx$; (3) $\int_0^{\pi}(x\cdot\sin x)^2\,dx$

[分析]: ① $\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$ 如: $\int_a^b xe^x\,dx$, $\int_a^b x\ln x\,dx$

② 当被积函数为两类不同函数相乘时 —— 用分部积分法.

("反对幂三指": $\int_a^b x\cdot\cos x\,dx$; $\int_a^b x^2\ln x\,dx$) "提准积准"

解: (1) 原式 $=\int_1^2 x\cdot\ln\sqrt{x}\,dx \xlongequal{\sqrt{x}=t} \int_1^{\sqrt{2}} t^2\ln t\,dt^2 = 2\int_1^{\sqrt{2}} t^3\ln t\,dt$

幂·对

$= 2\cdot\frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{2}} \underbrace{\ln t}_{u}\,d\underbrace{t^4}_{v} = \frac{1}{2}\left[t^4\cdot\ln t\Big|_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} t^4\,d\ln t\right]$

$= \frac{1}{2}\left[4\ln\sqrt{2} - \int_1^{\sqrt{2}} t^3\,dt\right] = 2\ln\sqrt{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}t^4\Big|_1^{\sqrt{2}} = \ln 2 - \frac{3}{8}$

3. 利用分部积分法求定积分

例. (1) $\int_1^2 x\cdot\ln\sqrt{x}\,dx$; (2) $\int_0^1 x\cdot\arctan x\,dx$; (3) $\int_0^{\pi}(x\cdot\sin x)^2\,dx$

[分析]: ① $\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$ 如: $\int_a^b xe^x dx$, $\int_a^b x\ln x\,dx$

② 当被积函数为两类不同函数相乘时 —— 用分部积分法.

("反对幂三指": $\int_a^b x\cdot\cos x\,dx$; $\int_a^b x^2\ln x\,dx$ "提准积准"

解: (2) 原式 $= \int_0^1 \underset{幂\cdot反}{x\cdot\arctan x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{\arctan x}_{u}\,d\underbrace{x^2}_{v}$

分部 $= \frac{1}{2}\left[\arctan x\cdot x^2\Big|_0^1 - \int_0^1 x^2\,d\arctan x\right]$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x - \arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

3. 利用分部积分法求定积分

例. (1) $\int_1^2 x\cdot\ln\sqrt{x}\,dx$ ； (2) $\int_0^1 x\cdot\arctan x\,dx$ ； (3) $\int_0^{\pi}(x\cdot\sin x)^2\,dx$

[分析]：① $\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$ 如：$\int_a^b xe^x dx$，$\int_a^b x\ln x\,dx$

② 当被积函数为两类不同函数相乘时 —— 用分部积分法.

("反对幂三指"：$\int_a^b x\cdot\cos x\,dx$；$\int_a^b x^2\ln x\,dx$ "提准积准"

解：原式 $=\int_0^{\pi}x^2\cdot\sin^2 x\,dx \xlongequal[\text{公式}]{\text{降幂}} \int_0^{\pi}x^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \int_0^{\pi}\frac{x^2}{2}dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\underset{\text{幂}}{x^2}\cdot\underset{\text{三}}{\cos 2x}\,dx$

$=\frac{x^3}{6}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\underbrace{x^2}_{u}\,d\underbrace{\sin 2x}_{v} = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\left[x^2\cdot\sin 2x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin 2x\,dx^2\right]$

$=\frac{\pi^3}{6} + \frac{1}{4}\cdot 2\int_0^{\pi}\underset{\text{幂}}{x}\cdot\underset{\text{三}}{\sin 2x}\,dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\underbrace{x}_{u}\,d\underbrace{\cos 2x}_{v}$

3. 利用分部积分法求定积分

例. (1) $\int_1^2 x\cdot\ln\sqrt{x}\,dx$; (2) $\int_0^1 x\cdot\arctan x\,dx$; (3) $\int_0^{\pi}(x\cdot\sin x)^2\,dx$

[分析]: ① $\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$ 如: $\int_a^b xe^x dx$, $\int_a^b x\ln x\,dx$

② 当被积函数为两类不同函数相乘时 —— 用分部积分法.

("反对幂三指": $\int_a^b x\cdot\cos x\,dx$; $\int_a^b x^2\ln x\,dx$ "提谁积谁"

解: 原式 $= \int_0^{\pi} x^2\cdot\sin^2 x\,dx \overset{\text{降幂}}{\underset{\text{公式}}{=\!=}} \int_0^{\pi} x^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \int_0^{\pi}\frac{x^2}{2}dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2\cdot\cos 2x\,dx$

$= \frac{\pi^3}{6} + \frac{1}{4}\cdot 2\int_0^{\pi}\underset{\text{幂}}{x}\cdot\underset{\text{三}}{\sin 2x}\,dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\underbrace{x}_{u}\,d\underbrace{\cos 2x}_{v}$

$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\left[x\cdot\cos 2x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos 2x\,dx\right] = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\sin 2x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}$

例. 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$，求 $\int_0^{\pi} f(x)dx$

[分析]：①当被积函数含有变限积分时——可用分部积分法（把变限积分看成 u）

② 定积分的积分变量与字母无关：$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx$

解：由被积函数 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt \Rightarrow f'(x)=\frac{\sin x}{\pi-x}$ （因 $(\int_a^x f(t)dt)'=f(x)$）

$$\text{原式}=\int_0^{\pi}\underbrace{f(x)}_{u}\,\underbrace{dx}_{v}\overset{\text{分部}}{=}xf(x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}x\,d\,f(x)$$

$$=\pi f(\pi)-\int_0^{\pi}x\cdot f'(x)dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi-t}dt-\int_0^{\pi}x\cdot\frac{\sin x}{\pi-x}dx$$

例. 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$，求 $\int_0^\pi f(x)dx$

[分析]：①当被积函数含有变限积分时——可用分部积分法（把变限积分看成 u）

② 定积分的积分变量与字母无关：$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx$

解：由被积函数 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt \Rightarrow f'(x)=\frac{\sin x}{\pi-x}$ （因 $(\int_a^x f(t)dt)'=f(x)$）

$$\text{原式}=\int_0^\pi \underbrace{f(x)}_{u}\,\underbrace{dx}_{v}\overset{\text{分部}}{=}xf(x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi x\,df(x)$$

$$=\pi f(\pi)-\int_0^\pi x\cdot f'(x)dx$$

$$=\pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi-x}dx-\int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{\pi-x}dx\overset{\text{合并}}{=}\int_0^\pi \cancel{(\pi-x)}\cdot\frac{\sin x}{\cancel{\pi-x}}dx$$

$$=-\cos x\Big|_0^\pi=2$$

第七讲　定积分及其应用（二）
(3种题型)

1. 反常积分的敛散性

例. 判别下列反常积分敛散性：(1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x+x^2}dx$；(2) $\int_0^1\frac{1}{x+x^2}dx$；(3) $\int_0^1\frac{1}{x-\sin x}dx$

[分析]：① 两个经典结论：（口诀："限大p大，限小p小"）

1° $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\boxed{\text{收敛}}\Leftrightarrow\boxed{p>1}\\ \text{发散}\Leftrightarrow p\le 1\end{cases}$；2°. $\int_0^1\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\boxed{\text{收敛}}\Leftrightarrow\boxed{p<1}\\ \text{发散}\Leftrightarrow p\ge 1\end{cases}$

② $x\to+\infty$ 时，$x+x^2\sim x^2$；$x\to0$ 时，$x+x^2\sim x$；$x\to0$ 时，$x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$

解：(1) 原式 $=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x+x^2}dx$，当 $x\to+\infty$ 时，$x+x^2\sim x^2$，

则 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x+x^2}dx$ 与 $\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx}_{p=2>1\text{收敛（限大p大）}}$ 同敛散性 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{1}{x+x^2}dx$ 也收敛

1. 反常积分的敛散性

例. 判别下列反常积分敛散性：(1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x+x^2}dx$；(2) $\int_0^1\frac{1}{x+x^2}dx$；(3) $\int_0^1\frac{1}{x-\sin x}dx$

[分析]：① 两个经典结论：（口诀："限大p大，限小p小"）

1° $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\boxed{\text{收敛}}\Leftrightarrow\boxed{p>1}\\ \text{发散}\Leftrightarrow p\le 1\end{cases}$；2°. $\int_0^1\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\boxed{\text{收敛}}\Leftrightarrow\boxed{p<1}\\ \text{发散}\Leftrightarrow p\ge 1\end{cases}$

② $x\to+\infty$时，$x+x^2\sim x^2$；$x\to0$时，$x+x^2\sim x$；$x\to0$时，$x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$

解：(2) $\int_0^1\frac{1}{x+x^2}dx$，瑕点为0，当$x\to0$时，$x+x^2\sim x$，

则 $\int_0^1\frac{1}{x+x^2}dx$ 与 $\underbrace{\int_0^1\frac{1}{x}dx}_{p=1,\text{发散}}$ 同敛散性 $\Rightarrow\int_0^1\frac{1}{x+x^2}dx$ 发散

1. 反常积分的敛散性

例. 判别下列反常积分敛散性：(1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x+x^2}dx$；(2) $\int_0^1\frac{1}{x+x^2}dx$；(3) $\int_0^1\frac{1}{x-\sin x}dx$

[分析]：① 两个经典结论：（口诀："限大p大，限小p小"）

1° $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx = \begin{cases}\boxed{\text{收敛}} \Leftrightarrow \boxed{p>1} \\ \text{发散} \Leftrightarrow p\leq 1\end{cases}$；2°. $\int_0^1\frac{1}{x^p}dx = \begin{cases}\boxed{\text{收敛}} \Leftrightarrow \boxed{p<1} \\ \text{发散} \Leftrightarrow p\geq 1\end{cases}$

② $x\to+\infty$时，$x+x^2\sim x^2$；$x\to 0$时，$x+x^2\sim x$；$x\to 0$时，$x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$

解：(3) 原式 $=\int_0^1\frac{1}{x-\sin x}dx$，瑕点为 $x=0$，当 $x\to 0$时，$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$

$\Rightarrow \int_0^1\frac{1}{x-\sin x}dx$ 与 $\underline{\int_0^1\frac{1}{\frac{1}{6}x^3}dx}$ 同敛散性 $\Rightarrow \int_0^1\frac{1}{x-\sin x}dx$ 发散

$p=3>1$ 发散（限小p小）

例. 判断 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}dx$ 的敛散性.

[分析]: ① 两个经典结论: (口诀:"限大P大, 限小P小")

1° $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\boxed{收敛}\Leftrightarrow\boxed{p>1}\\ 发散\Leftrightarrow p\leq 1\end{cases}$; 2°. $\int_0^1\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\boxed{收敛}\Leftrightarrow\boxed{p<1}\\ 发散\Leftrightarrow p\geq 1\end{cases}$

② $x\to+\infty$ 时, $x+x^2\sim x^2$; $x\to 0$ 时, $x+x^2\sim x$; $x\to 0$ 时, $x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$

解: 原式 $=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x\cdot(x+1)^3}}dx$ 属于"混合型": ① 无穷区间反常积分; ② 瑕积分

$\xRightarrow{\text{“拆积”}}$ 原式 $=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x\cdot(x+1)^3}}dx$

① 当 $x\to 0$ 时, $\sqrt{x(x+1)^3}\sim\sqrt{x\cdot 1}=x^{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1+x)^3}}dx$ 与 $\underbrace{\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx}_{p=\frac{1}{2}<1\ (限小p小)}$ 同收敛

例. 判断 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}dx$ 的敛散性.

[分析]: ① 两个经典结论: (口诀:"限大p大, 限小p小")

1° $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\boxed{收敛}\Leftrightarrow\boxed{p>1}\\ 发散\Leftrightarrow p\le 1\end{cases}$; 2°. $\int_0^1\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\boxed{收敛}\Leftrightarrow\boxed{p<1}\\ 发散\Leftrightarrow p\ge 1\end{cases}$

② $x\to+\infty$时, $x+x^2\sim x^2$; $x\to0$时, $x+x^2\sim x$; $x\to0$时, $x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$

解: 原式 $=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x\cdot(x+1)^3}}dx$ 属于"混合型": ①无穷区间反常积分; ②瑕积分

$\xRightarrow{\text{"拆和"}}$ 原式 $=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x\cdot(x+1)^3}}dx$ $\Rightarrow$ ①收 + ②收 $\Rightarrow$ 原式收敛

① 收敛

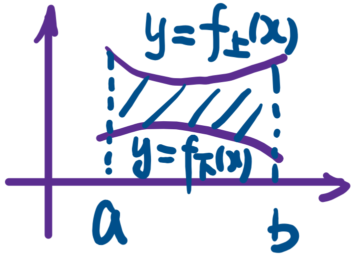
② $x\to+\infty$时, $\sqrt{x\cdot(x+1)^3}\sim\sqrt{x\cdot x^3}=\sqrt{x^4}=x^2\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛

$p=2>1$ (限大p大)

2. 利用定积分求平面图形的面积

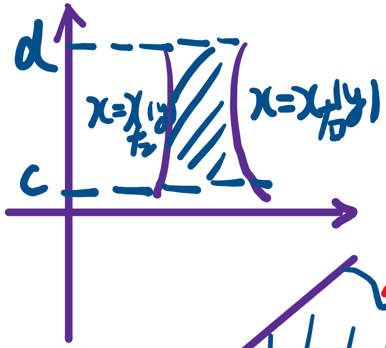
例. 求由曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 与 x轴、y轴所围成图形的面积

[分析]: 平面图形求法: ①



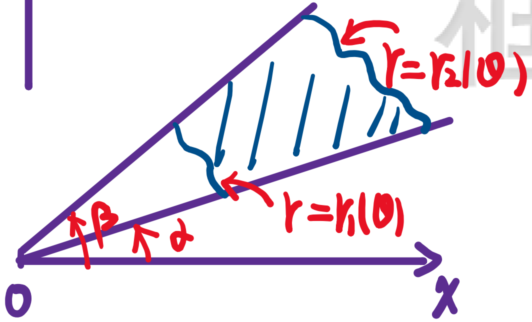
$$S=\int_a^b f_{上}(x)-f_{下}(x)\,dx$$ (X-型区域)

②



$$S=\int_c^d x_{右}(y)-x_{左}(y)\,dy$$ (Y-型区域)

③

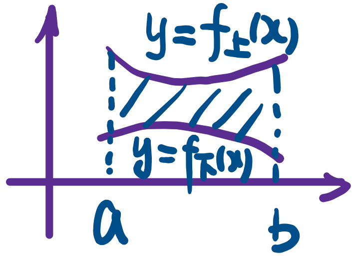


$$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r_2^2(\theta)-\frac{1}{2}r_1^2(\theta)\,d\theta$$ (极坐标区域)

2. 利用定积分求平面图形的面积

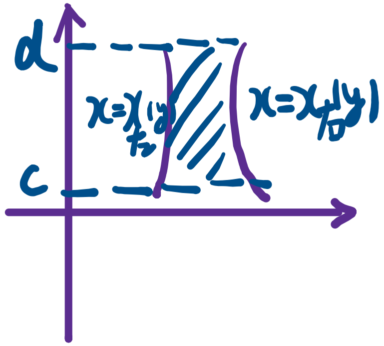
例. 求由曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 与 x轴、y轴所围成图形的面积

[分析]：平面图形求法：①

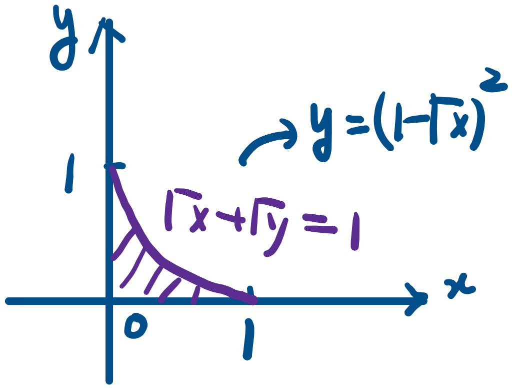


$S=\int_a^b f_{上}(x)-f_{下}(x)\,dx$ （X-型区域）

②



$S=\int_c^d x_{右}(y)-x_{左}(y)\,dy$ （Y-型区域）



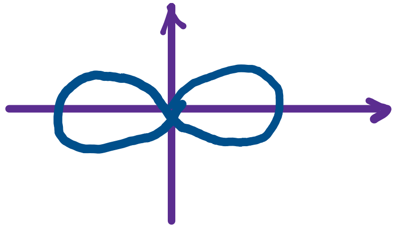
解：图形如右：

法1 X-型：$S=\int_0^1 y(x)\,dx=\int_0^1(1-\sqrt{x})^2\,dx=\int_0^1 1-2\sqrt{x}+x\,dx=\left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{6}$

法2 Y-型：$S=\int_0^1 x(y)\,dy=\int_0^1(1-\sqrt{y})^2\,dy=\frac{1}{6}$

例. 求双纽线 $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ 所围成图形的面积

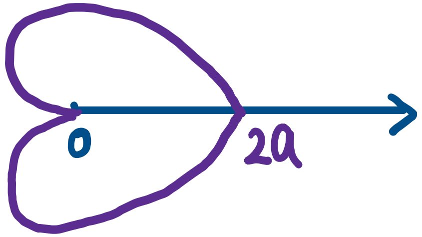
[分析]: 几种特殊曲线方程: ① 双纽线:



直角方程: $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

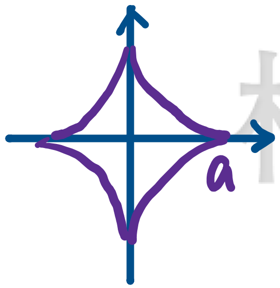
极坐标方程: $r^2=a^2\cos 2\theta$

② 心形线:



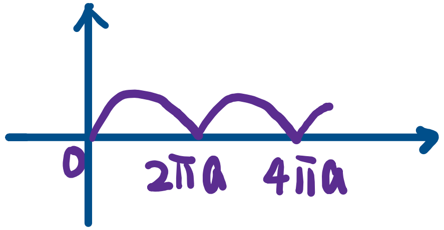
方程: $r=a(1+\cos\theta)$

③ 星形线:



直角方程: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \Longleftrightarrow$ 参数方程 $\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}$

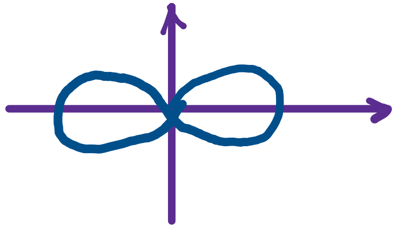
④ 摆线:



参数方程: $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$

例. 求双纽线 $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ 所围成图形的面积

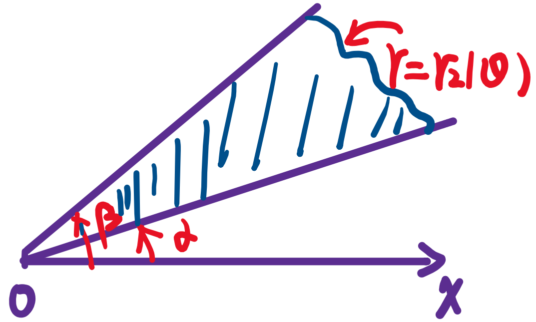
[分析]: n 种特殊曲线方程：① 双纽线：



直角方程：$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

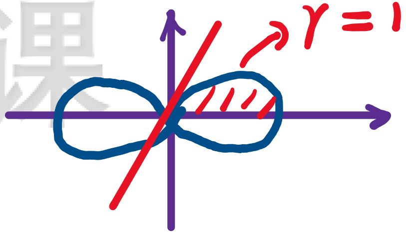
极坐标方程：$r^2 = a^2\cos 2\theta$

⑤



$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r_2^2(\theta)\, d\theta$$ （极坐标区域）

解：草图如右：



$r^2 = 1\cdot\cos 2\theta$

$\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$

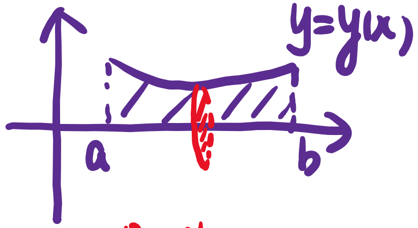
$$S = 4S_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2(\theta)\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

3. 利用定积分求体积

例. 求由曲线 $y=2\sin x$, $(0\le x\le \pi)$ 分别绕 x 轴、y 轴旋转而成的立体体积.

[分析]: ①



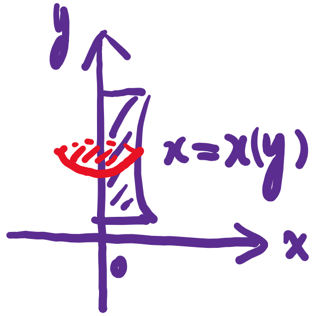
X-型图形绕 x 轴旋转而成的立体: $V_x=\int_a^b \underline{\pi y^2(x)}\,dx$

截面面积

解释: 元素法: 1° 选 x 为积分变量, $x\in[a,b]$; 2° 在 $[a,b]$ 上取小区间 $[x,x+dx]$,

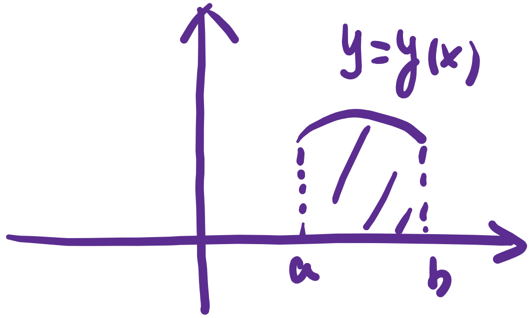
得体积元 $dV=$ ▭ $=$ 底面积·高 $=\pi y^2\cdot dx$; 3° 积分得 $V=\int_a^b dV=\int_a^b \pi y^2 dx$

②



Y-型图形绕 y 轴旋转体: $V_y=\int_c^d \pi x^2(y)\,dy$

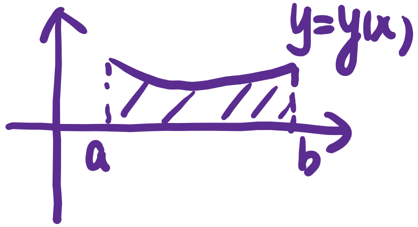
③



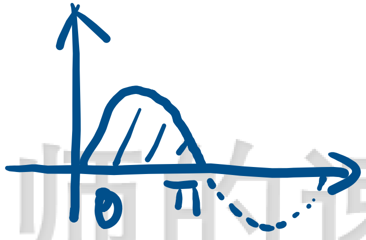
X-型图形绕 y 轴旋转体: $V_y=\int_a^b 2\pi x\cdot|y(x)|\,dx$

3. 利用定积分求体积

例. 求由曲线 $y=2\sin x$，$(0\le x\le \pi)$ 分别绕 x 轴、y 轴旋转而成的立体体积.

[分析]：① 

x-型图形绕 x 轴旋转而成的立体：$V_x=\int_a^b \pi y^2(x)\,dx$

解：(1) $y=2\sin x$ 图形如右：

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

$$V_x=\int_0^{\pi}\pi y^2(x)\,dx=\int_0^{\pi}\pi(2\sin x)^2\,dx=4\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$$

$$\overset{\text{法1}}{=\!=}\ 2\pi\int_0^{\pi}1-\cos 2x\,dx=2\pi^2$$

$$\overset{\text{法2}}{=\!=}\ 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx\ \overset{\text{华里氏}}{=\!=}\ 8\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=2\pi^2$$

经典公式：

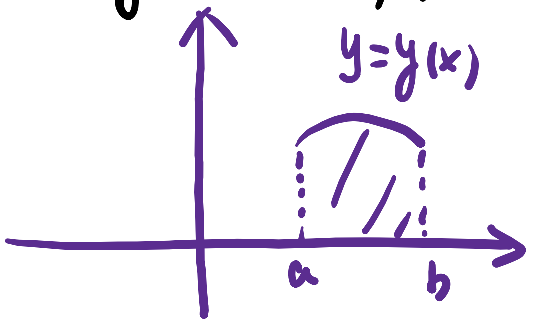
$$\int_0^{\pi}f(\sin x)\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\,dx$$

华里斯公式：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$

3. 利用定积分求体积

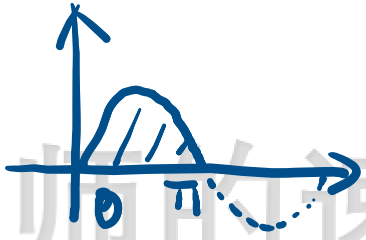
例. 求由曲线 $y=2\sin x$，$(0\le x\le \pi)$ 分别绕 x 轴、y 轴旋转而成的立体体积.

[分析]：③



x-型图形绕y轴旋转体：$V_y=\int_a^b 2\pi x\cdot|y(x)|\,dx$

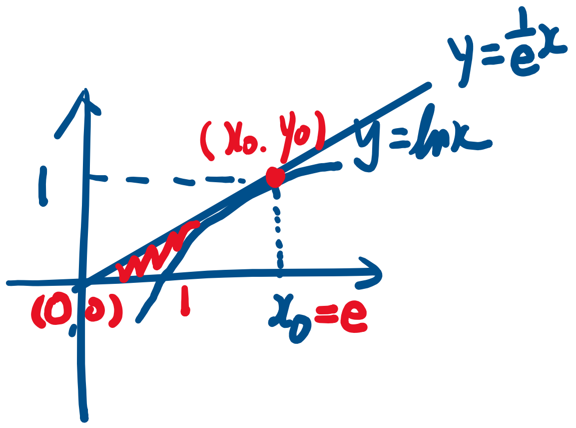
解：(1) $y=2\sin x$ 图形如右：



(2) 绕y轴：$V_y \xlongequal[\text{图形}]{\text{x-型}} \int_0^{\pi} 2\pi x\cdot \overset{2\sin x}{y(x)}\,dx = 4\pi\int_0^{\pi} x\cdot\sin x\,dx \xlongequal{\text{分部}} 4\pi\left[-x\cos x+\sin x\right]_0^{\pi}$

$= 4\pi^2$

例. 过原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与 $y=\ln x$ 及 x 轴围成图形绕直线 $x=e$ 旋转一周所得立体体积.

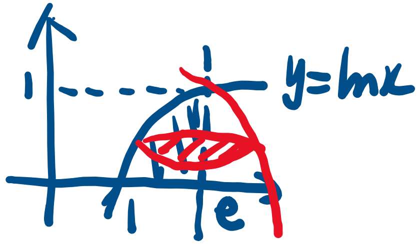


解: 图形如右.

(1) 设切点 $(x_0, y_0)=(x_0, \ln x_0)$ ，则 $k_{切}=\dfrac{\ln x_0-0}{x_0-0}=\dfrac{1}{x_0}$

$\Rightarrow x_0=e \Rightarrow$ 切点为 $(e,1)$ $\Rightarrow$ 切线: $y=\frac{1}{e}x$

(2) $V=V_{外}-V_{内}$ ，其中 $V_{外} \overset{圆锥}{=} \frac{1}{3}\cdot$底面积$\cdot$高 $=\frac{1}{3}\times(\pi e^2)\cdot 1=\frac{\pi}{3}e^2$

$V_{内}=$ 

$=\int_0^1$ 截面面积 $dy=\int_0^1 \pi(\text{半径})^2 dy=\int_0^1 \pi(e-e^y)^2 dy$

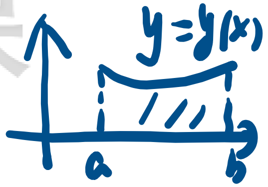
$\therefore V=V_{外}-V_{内}=\frac{\pi}{3}e^2-\int_0^1 \pi(e-e^y)^2 dy=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$

本章其他知识点

1. 求弧长：① $l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$，其中 l 的方程为直角坐标方程 $y=y(x)$，$a\le x\le b$

② $l=\int_\alpha^\beta\sqrt{x_t^2+y_t^2}\,dx$，其中 l 为参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，$\alpha\le t\le\beta$

③ $l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$，其中 l 为极坐标方程：$r=r(\theta)$，$\alpha\le\theta\le\beta$

2. 求旋转体侧面积：① $S_{侧}=\int_a^b 2\pi y(x)\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx$，其中 

② $S_{侧}=\int_\alpha^\beta 2\pi y(t)\cdot\sqrt{x_t^2+y_t^2}\,dt$. 其中曲线为参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$

③ $S_{侧}=\int_\alpha^\beta 2\pi r(\theta)\cdot\sin\theta\cdot\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$，其中曲线为极坐标方程：$r=r(\theta)$

第八讲 微分方程（三种题型）

1. 一阶微分方程的求解（可分离变量方程；齐次方程；一阶线性方程）

例. 求下列方程通解：(1) $y\,dx+(x^2-4x)dy=0$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}$

[分析]：(1) 可分离变量方程：$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y) \xRightarrow{\text{分离x与y}} \frac{dy}{g(y)}=f(x)\,dx$ 两边积分

(2) 齐次方程：$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x}) \xRightarrow{\text{换元}}$ 令 $\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ 代入求解

解：(1) 由 $y\,dx+x(x-4)\,dy=0$ 变形：$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x(x-4)}$

$\xRightarrow{\text{分离x与y}} -\frac{1}{y}dy=\frac{1}{x(x-4)}dx \xRightarrow{\text{两边积分}} -\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{x(x-4)}dx$

裂项 $\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-4}-\frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow -\ln y=\frac{1}{4}[\ln(x-4)-\ln x]+C$. $C \to \frac{1}{4}\ln C$ $\Rightarrow -4\ln y=\ln[C\cdot\frac{x-4}{x}]$

$\Rightarrow y^{-4}=C\cdot\frac{x-4}{x} \Rightarrow (x-4)y^4=\frac{1}{C}\cdot x \triangleq C\cdot x$ 为通解.

1. 一阶微分方程的求解（可分离变量方程；齐次方程；一阶线性方程）

例. 求下列方程通解：(1) $y\,dx+(x^2-4x)dy=0$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}$

[分析]：(1) 可分离变量方程：$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y) \xRightarrow{\text{分离}x与y} \frac{dy}{g(y)}=f(x)\,dx$ 两边积分

(2) 齐次方程：$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x}) \xRightarrow{\text{换元}}$ 令 $\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ 代入求解

解：(2) 方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}$ 变形 $\xRightarrow[\text{同除以}x^2]{\text{分子分母}} \frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{y/x}$

令 $\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=x\cdot u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ 代入原方程：

$\Rightarrow u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{u}=\frac{1}{u}+u \Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}$

$\xRightarrow{\text{分离}u与x} u\,du=\frac{1}{x}dx \xRightarrow{\text{积分}} \frac{1}{2}u^2=\ln x+C \xRightarrow[\text{回代}]{u=\frac{y}{x}} \frac{y^2}{2x^2}=\ln x+C$

例. 求 $xy'+y=x^2+3x+2$ 的通解.

[分析]：一阶线性方程：$y'+p(x)y=q(x)$ 的解法（公式法）

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\cdot\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$$

解释：方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 两边同乘以因子：$e^{\int p(x)dx}$ 得：

$$\Rightarrow \underbrace{e^{\int p(x)dx}}_{u}\cdot\underbrace{y'}_{v'}+\underbrace{e^{\int p(x)dx}\cdot p(x)}_{u'}\cdot\underbrace{y}_{v}=e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)$$

$$\Rightarrow \left[e^{\int p(x)dx}\cdot y\right]'=q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\xRightarrow{\text{移项}}e^{\int p(x)dx}\cdot y=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$$

$$\therefore\ y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$$

例. 求 $xy'+y=x^2+3x+2$ 的通解.

[分析]：一阶线性方程：$y'+p(x)y=q(x)$ 的解法（公式法）

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\cdot\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$$

解：原方程化为标准一阶线性方程：$y'+\underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)}y=\underbrace{x+3+\frac{2}{x}}_{q(x)}$

由公式法：通解 $y(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\left(x+3+\frac{2}{x}\right)e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$

$$\Rightarrow y(x)=e^{-\ln x}\left[\int\left(x+3+\frac{2}{x}\right)\cdot e^{\ln x}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int x^2+3x+2\,dx+C\right]=\frac{x^2}{3}+\frac{3x}{2}+2+\frac{C}{x}$$

2. 二阶常系数齐次线性方程

例. 求下列方程通解：(1) $y''-3y'+2y=0$. (2) $4y''-4y'+y=0$. (3) $y''+2y'+10y=0$

[分析]：二阶常系数齐次线性方程：$y''+py'+qy=0$ —— 特征方程法

第1步：写出特征方程 $r^2+pr+q=0$；第2步：当 $\Delta>0$ 时，$r_1\neq r_2$，$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

当 $\Delta=0$，$r_1=r_2$，$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$；当 $\Delta<0$ 时，$r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

解：(1) $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程：$r^2-3r+2=0 \Rightarrow r_1=1, r_2=2$. 则

通解：$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$

(2) $4y''-4y'+y=0$ 的特征方程：$4r^2-4r+1=0 \xRightarrow{\Delta=0} (2r-1)^2=0 \Rightarrow r_1=r_2=\frac{1}{2}$

通解 $y=(C_1+C_2x)e^{\frac{1}{2}x}$

2. 二阶常系数齐次线性方程

例. 求下列方程通解：(1) $y''-3y'+2y=0$. (2) $4y''-4y'+y=0$. (3) $y''+2y'+10y=0$

【分析】：二阶常系数齐次线性方程：$y''+py'+qy=0$ —— 特征方程法

第1°步：写出特征方程 $r^2+pr+q=0$；第2°步：当 $\Delta>0$ 时，$r_1\neq r_2$，$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

当 $\Delta=0$，$r_1=r_2$，$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$. 第3°步：当 $\Delta<0$ 时，$r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，$y=e^{\alpha x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

解：(1) $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程：$r^2-3r+2=0 \Rightarrow r_1=1, r_2=2$. 则

通解：$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

(3) $y''+2y'+10y=0$ 的特征方程：$r^2+2r+10=0 \xRightarrow{\Delta<0} (r+1)^2=-9=(\pm 3i)^2$

$\therefore r=-1\pm 3i \Rightarrow$ 通解：$y=e^{-x}[C_1\cos 3x+C_2\sin 3x]$

3. 二阶常系数非齐次线性微分方程

例. 求下列方程通解：(1) $y''+y'-6y=e^{x}\cdot(3x+2)$

(2) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cdot\sin x$

[分析]：二阶常系数非齐次线性方程：$y''+py'+qy=f(x) \Rightarrow$ 通解 $y=\underbrace{\bar{y}}_{\text{齐通}}+\underbrace{y^*}_{\text{非齐特}}$

① 当右端函数 $f(x)=e^{\lambda x}\cdot P_n(x) \xrightarrow{\text{指数·多项式}} y^*=\begin{cases} x^0\cdot e^{\lambda x}\cdot Q_n(x), & \text{当}\lambda\text{不是特征根} \\ x^1\cdot e^{\lambda x}\cdot Q_n(x), & \text{当}\lambda\text{是单根} \\ x^2\cdot e^{\lambda x}\cdot Q_n(x), & \text{当}\lambda\text{是重根} \end{cases}$

② 当右端函数 $f(x)=e^{\lambda x}\cdot\sin\beta x$ 或 $e^{\lambda x}\cdot\cos\beta x$

$\xrightarrow{\text{指数·三角}} y^*=\begin{cases} x^0 e^{\lambda x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x], & \text{当}\lambda\pm\beta i\text{不是特征根} \\ x^1 e^{\lambda x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x], & \text{当}\lambda\pm\beta i\text{是特征根} \end{cases}$

3. 二阶常系数非齐次线性微分方程

例. 求下列方程通解：(1) $y''+y'-6y=e^{x}\cdot(3x+2)$

(2) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cdot\sin x$

[分析]：二阶常系数非齐次线性方程：$y''+py'+qy=f(x)\Rightarrow$ 通解 $y=\underset{\text{齐通}}{\tilde{y}}+\underset{\text{非齐特}}{y^*}$

① 当右端函数 $f(x)=e^{\lambda x}\cdot P_n(x)\xrightarrow{\text{指数·多项式}}y^*=\begin{cases}x^0\cdot e^{\lambda x}\cdot Q_n(x), & \text{当}\lambda\text{不是特征根}\\ x^1\cdot e^{\lambda x}\cdot Q_n(x), & \text{当}\lambda\text{是单根}\\ x^2\cdot e^{\lambda x}\cdot Q_n(x), & \text{当}\lambda\text{是重根}\end{cases}$

② 当右端函数 $f(x)=e^{\lambda x}\cdot\sin\beta x$ 或 $e^{\lambda x}\cdot\cos\beta x\xrightarrow{\text{指数·三角}}y^*=\begin{cases}x^0 e^{\lambda x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x]\\ x^1 e^{\lambda x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x]\end{cases}$

解：(1) 1°. 先求齐通：$r^2+r-6=0\Rightarrow r_1=-3,\ r_2=2\Rightarrow$ 齐通：$\tilde{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$

2°. 再求非齐特：由 $f(x)=e^{x}\cdot(3x+2)\Rightarrow\lambda=1$ 不是特征根，则 $y^*=x^0e^{x}\cdot[Ax+B]$

3. 二阶常系数非齐次线性微分方程

例. 求下列方程通解: (1) $y''+y'-6y=e^{x}\cdot(3x+2)$

(2) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cdot\sin x$

齐通　非齐特

[分析]: 二阶常系数非齐次线性方程: $y''+py'+qy=f(x) \Rightarrow$ 通解 $y=\tilde{y}+y^*$

② 当右端函数 $f(x)=e^{\lambda x}\cdot\sin\beta x$ 或 $e^{\lambda x}\cdot\cos\beta x \xRightarrow{\text{指数·三角}} y^*=\begin{cases} x^{0}\,e^{\lambda x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x] \\ x^{1}\,e^{\lambda x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x] \end{cases}$

解: (1) 1°. 先求齐通. $r^2+r-6=0 \Rightarrow r_1=-3,\ r_2=2 \Rightarrow$ 齐通: $\tilde{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$

2°. 再求非齐特: 由 $f(x)=e^{x}\cdot(3x+2) \Rightarrow \lambda=1$ 不是特征根, 则 $y^*=x^{0}e^{x}\cdot[Ax+B]$

把 $y^*=e^{x}(Ax+B)$ 代入原方程: $(y^*)'=e^{x}(Ax+A+B)$, $(y^*)''=e^{x}(Ax+2A+B)$

$\Rightarrow (y^*)''+(y^*)'-6y^*=-4Axe^{x}+(3A-4B)e^{x}=e^{x}(3x+2) \Rightarrow \begin{cases}-4A=3\\ 3A-4B=2\end{cases}$

3. 二阶常系数非齐次线性微分方程

例. 求下列方程通解：(1) $y''+y'-6y=e^{x}\cdot(3x+2)$

(2) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cdot\sin x$

齐通　非齐特

【分析】：二阶常系数非齐次线性方程：$y''+py'+qy=f(x) \Rightarrow$ 通解 $y=\tilde{y}+y^*$

解：(1) 1°. 先求齐通．$r^2+r-6=0 \Rightarrow r_1=-3,\ r_2=2 \Rightarrow$ 齐通：$\tilde{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$

2°. 再求非齐特：由 $f(x)=e^{x}\cdot(3x+2) \Rightarrow \lambda=1$ 不是特征根，则 $y^*=x^0e^{x}\cdot[Ax+B]$

把 $y^*=e^{x}(Ax+B)$ 代入原方程：$(y^*)'=e^{x}(Ax+A+B)$，$(y^*)''=e^{x}(Ax+2A+B)$

$\Rightarrow (y^*)''+(y^*)'-6y^*=-4Axe^{x}+(3A-4B)e^{x}=e^{x}(3x+2) \Rightarrow \begin{cases}-4A=3\\3A-4B=2\end{cases}$

$\therefore A=-\frac{3}{4},\ B=-\frac{17}{16} \Rightarrow y^*=e^{x}(-\frac{3}{4}x-\frac{17}{16})$　故非齐通 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}+y^*$

3. 二阶常系数非齐次线性微分方程

例. 求下列方程通解：(1) $y''+y'-6y=e^{x}\cdot(3x+2)$

(2) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cdot \sin x$

齐通

非齐特

[分析]：二阶常系数非齐次线性方程：$y''+py'+qy=f(x) \Rightarrow$ 通解 $y=\hat{y}+y^*$

② 当右端函数 $f(x)=e^{\lambda x}\cdot \sin\beta x$ 或 $e^{\lambda x}\cdot\cos\beta x$

撤.消 $\Longrightarrow y^*=\begin{cases} x^{0}e^{\lambda x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x], & \text{当 } \lambda\pm\beta i \text{ 不是特征根} \\ x^{1}e^{\lambda x}[A\cos\beta x+B\sin\beta x], & \text{当 } \lambda\pm\beta i \text{ 是特征根} \end{cases}$

解：(2) 1° 先齐通 $r^2+2r+2=0 \overset{\Delta<0}{\Longrightarrow} (r+1)^2=-1=(\pm i)^2 \Rightarrow r_{1,2}=-1\pm i \Rightarrow \hat{y}=e^{-x}[C_1\cos x+C_2\sin x]$

2° 非齐特：由 $f(x)=e^{-x}\cdot\sin x \Rightarrow \lambda\pm\beta i=-1\pm i$ 是特征根 $\Rightarrow y^*=x^{1}e^{-x}[A\cos x+B\sin x]$

$\Rightarrow y^*=e^{-x}[Ax\cos x+Bx\sin x]$ 把 $(y^*)'$，$(y^*)''$，y^* 代入原方程得 $A=-\frac{1}{2}$，$B=0$

3. 二阶常系数非齐次线性微分方程

例. 求下列方程通解：(1) $y''+y'-6y=e^{x}\cdot(3x+2)$

(2) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cdot\sin x$

齐通　非齐特

[分析]：二阶常系数非齐次线性方程：$y''+py'+qy=f(x)\Rightarrow$ 通解 $y=\hat{y}+y^*$

解：(2) 1° 先齐通 $r^2+2r+2=0\xRightarrow{\Delta<0}(r+1)^2=-1=(\pm i)^2\Rightarrow r_{1,2}=-1\pm i\Rightarrow\hat{y}=e^{-x}[C_1\cos x+C_2\sin x]$

2°. 非齐特：由 $f(x)=e^{-x}\cdot\sin x\Rightarrow\lambda\pm\beta i=-1\pm i$ 是特征根 $\Rightarrow y^*=x^1e^{-x}[A\cos x+B\sin x]$

$\Rightarrow y^*=e^{-x}[Ax\cos x+Bx\sin x]$ 把 $(y^*)'$，$(y^*)''$，y^* 代入原方程得 $A=-\frac{1}{2}$，$B=0$

$\therefore y^*=-\frac{1}{2}x\cos x\cdot e^{-x}\Rightarrow$ 非齐通：$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+y^*$

A，B 详细过程如下：

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cdot\sin x$$

而 $y^* = e^{-x}[Ax\cos x + Bx\sin x] \Rightarrow y^{*\prime} = e^{-x}\cdot\{[(-A+B)x+A]\cos x + [(-A-B)x+B]\sin x\}$

$$\Rightarrow y^{*\prime\prime} = e^{-x}\cdot\{[-2Bx-2A+2B]\cos x + (2Ax-2A-2B)\sin x\}$$

$$\Rightarrow y^{*\prime\prime} + 2y^{*\prime} + 2y^* = e^{-x}\cdot\{2B\cos x - 2A\sin x\}$$

$$\therefore \begin{cases} 2B = 0 \\ -2A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2},\ B = 0$$

微分算子法求特解.

祝同学们考试成功，学业有成！

框框老师.