复变函数

1. 已知解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 的实部 $u=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)$，且有 $f(0)=0$，求 $f(z)$.

解： 本题考察的是解析函数实部和虚部的性质以及 C-R 方程. 显然有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y+\cos y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x(x\sin y+y\cos y+\sin y)$$

因此可得

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y+\cos y),\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^x(x\sin y+y\cos y+\sin y)$$

取 $(x_0,\ y_0)=(0,\ 0)$，利用全微分可得

$$\begin{aligned} v&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+C\\ &=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\mathrm{e}^x(x\sin y+y\cos y+\sin y)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)\mathrm{d}y+C\\ &=\int_0^x 0\cdot\mathrm{d}x+\int_0^y\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)\mathrm{d}y+C\\ &=\mathrm{e}^x(x\sin y+y\cos y)+C \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} f(z)=u+\mathrm{i}v&=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+\mathrm{i}\mathrm{e}^x(x\sin y+y\cos y)+\mathrm{i}C\\ &=x\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)+y\mathrm{e}^x(-\sin y+\mathrm{i}\cos y)+\mathrm{i}C\\ &=x\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)+\mathrm{i}y\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)+\mathrm{i}C\\ &=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}(x+\mathrm{i}y)+\mathrm{i}C\\ &=z\mathrm{e}^z+\mathrm{i}C \end{aligned}$$

又因为 $f(0)=0$，因此可得 $C=0$，因此有 $f(z)=z\mathrm{e}^z$.□

2. 已知 $f(z)=\dfrac{\sqrt{z^{-1}(1-z)^3}}{z+1}$，规定在割线上岸 $\arg z=\arg(1-z)=0$，求 $f(-\mathrm{i})$.

解： 本题考察的是多值函数的支点以及单支分支函数值的求解. 多值性出现在分子根式，因此只考虑分子 $\sqrt{z^{-1}(1-z)^3}$，因此有

$$\arg z|_{z=-\mathrm{i}}=\frac{3\pi}{2},\quad \arg(1-z)|_{z=-\mathrm{i}}=\frac{\pi}{4},\quad \arg(1+z)|_{z=-\mathrm{i}}=-\frac{\pi}{4}$$

因此有 $\arg\sqrt{z^{-1}(1-z)^3}=\dfrac{1}{2}\arg[z^{-1}(1-z)^3]=\dfrac{1}{2}\left(-1\cdot\dfrac{3\pi}{2}+3\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{3\pi}{8}$

由此我们可得

$$f(-\mathrm{i})=\frac{\sqrt{|\mathrm{i}^{-1}(1-\mathrm{i})^3|}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}}{1-\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{2})^3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}=\frac{2^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}}{2^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}=2^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}.\square$$

3. 求积分 $I=\oint_C \frac{1}{z^2(z+1)(z-2)}\mathrm{d}z$ 的值，其中 C 为 $|z|=r$，$r\neq 1, 2$.

解：本题考察的是柯西积分公式以及高阶导数公式. $f(z)=\frac{1}{z^2(z+1)(z-2)}$ 有 $z=0$，$z=2$，$z=-1$ 三个奇点，显然需要分类讨论，因此有

(1)当 $0<r<1$ 时，只有 $z=0$ 在积分区域内，利用高阶导数公式可得

$$\oint_C \frac{1}{z^2(z+1)(z-2)}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{\frac{1}{(z+1)(z-2)}}{z^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot 1\cdot\left[\frac{1}{(z+1)(z-2)}\right]'\bigg|_{z=0}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{-2z+1}{(z+1)^2(z-2)^2}\bigg|_{z=0}=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$$

(2)当 $1<r<2$ 时，$z=0$，$z=-1$ 在积分区域内，利用柯西积分公式可得

$$\oint_C \frac{1}{z^2(z+1)(z-2)}\mathrm{d}z=\oint_{C_1} \frac{1}{z^2(z+1)(z-2)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2} \frac{1}{z^2(z+1)(z-2)}$$

$$=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}+\oint_{C_2}\frac{\frac{1}{z^2(z-2)}}{z+1}\mathrm{d}z=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}+2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{z^2(z-2)}\bigg|_{z=-1}=-\frac{\pi\mathrm{i}}{6}$$

(3)当 $r>2$ 时，$z=0$，$z=-1$，$z=2$ 在积分区域内，利用柯西积分公式可得

$$\oint_C \frac{1}{z^2(z+1)(z-2)}\mathrm{d}z=-\frac{\pi\mathrm{i}}{6}+\oint_{C_3}\frac{1}{z^2(z+1)(z-2)}$$

$$=-\frac{\pi\mathrm{i}}{6}+\oint_{C_3}\frac{\frac{1}{z^2(z+1)}}{z-2}\mathrm{d}z=-\frac{\pi\mathrm{i}}{6}+2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{z^2(z+1)}\bigg|_{z=2}=0.\square$$

4. 将 $f(z)=\frac{z+1}{z^2(z-1)}$ 分别在圆环域: (1) $0<|z|<1$; (2) $1<|z|<+\infty$ 内展为 Laurent 级数.

解：本题考察的是 Laurent 级数展开式的计算. 首先将 $f(z)=\frac{z+1}{z^2(z-1)}$ 因式分解可得

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)}=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+\frac{2}{z-1}$$

(1)当 $0<|z|<1$ 时

$$f(z)=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+\frac{2}{z-1}=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}-2\cdot\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}-2(1+z+z^2+\cdots)$$

$$=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}-2\sum_{k=0}^{\infty}z^k$$

(2)当 $1<|z|<+\infty$ 时

$$f(z)=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+\frac{2}{z-1}=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+\frac{2}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+2\sum_{k=3}^{\infty}z^{-k}$$

5. 设C是z平面上任意一条不经过$z=0$，$z=1$的正向(分段光滑)简单闭曲线，试就C的各种情况计算积分$I=\oint_C\frac{\cos z}{z^3(z-1)}\mathrm{d}z$.

解：本题考察的是利用留数定理计算复变积分. $f(z)=\frac{\cos z}{z^3(z-1)}$有$z=0$，$z=1$两个奇点. 显然需要分类讨论，因此有

(1)当$z=0$，$z=1$均不在C内部时，由柯西积分定理可得

$$\oint_C\frac{\cos z}{z^3(z-1)}\mathrm{d}z=0$$

(2)当$z=0$在C内部，$z=1$不在C内部时，由柯西积分定理可得

$$\oint_C\frac{\cos z}{z^3(z-1)}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^2}\left[z^3\cdot\frac{\cos z}{z^3(z-1)}\right]\right\}\Bigg|_{z=0}$$

$$=-\pi\mathrm{i}\cdot\frac{[\sin z+(z-1)\cos z-\sin z](z-1)-2[(z-1)\sin z+\cos z]}{(z-1)^3}\Bigg|_{z=0}$$

$$=-\pi\mathrm{i}$$

(3)当$z=1$在C内部，$z=0$不在C内部时，由柯西积分定理可得

$$\oint_C\frac{\cos z}{z^3(z-1)}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=2\pi\mathrm{i}\cdot\lim_{z\to1}\left[(z-1)\cdot\frac{\cos z}{z^3(z-1)}\right]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\cdot\cos1=2\cos1\,\pi\mathrm{i}$$

(4)当$z=0$，$z=1$均在C内部时，由柯西积分定理可得

$$\oint_C\frac{\cos z}{z^3(z-1)}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{\cos z}{z^3(z-1)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\cos z}{z^3(z-1)}\mathrm{d}z=-\pi\mathrm{i}+2\cos1\,\pi\mathrm{i}=(2\cos1-1)\pi\mathrm{i}.\square$$

6. 计算积分$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x$，其中$a>0$，$b>0$，$a\neq b$.

解：本题考察的是利用留数定理计算无穷积分. 首先将积分化简可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos2x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos2x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x\right]$$

对于第一个积分，取$f(z)=\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$只有$z=a\mathrm{i}$，$z=b\mathrm{i}$两个奇点在上半平面，因此有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname*{Res}_{z=a\mathrm{i}}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=b\mathrm{i}}f(z)\right]$$
$$=2\pi\mathrm{i}\left[\lim_{z=a\mathrm{i}}\frac{(z-a\mathrm{i})}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}+\lim_{z=b\mathrm{i}}\frac{(z-b\mathrm{i})}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right]$$
$$=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{2a(b^2-a^2)\mathrm{i}}+\frac{1}{2b(a^2-b^2)\mathrm{i}}\right]=\frac{\pi}{ab(a+b)}$$

对于第二个积分，取 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ 只有 $z=a\mathrm{i}$, $z=b\mathrm{i}$ 两个奇点在上半平面，因此有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x\right]$$
$$=\mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname*{Res}_{z=a\mathrm{i}}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=b\mathrm{i}}f(z)\right]\right\}$$
$$=\mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\left[\lim_{z=a\mathrm{i}}\frac{(z-a\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}+\operatorname*{Res}_{z=b\mathrm{i}}\frac{(z-b\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right]\right\}$$
$$=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^{-2a}}{2a(b^2-a^2)\mathrm{i}}+\frac{\mathrm{e}^{-2b}}{2b(a^2-b^2)\mathrm{i}}\right]$$
$$=\frac{\pi(a\,\mathrm{e}^{-2b}-b\,\mathrm{e}^{-2a})}{ab(a^2-b^2)}$$

由此我们可以得到

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{ab(a+b)}-\frac{\pi(a\,\mathrm{e}^{-2b}-b\,\mathrm{e}^{-2a})}{ab(a^2-b^2)}\right]$$
$$=\frac{\pi}{2ab(a+b)}\left(1-\frac{a\,\mathrm{e}^{-2b}-b\,\mathrm{e}^{-2a}}{a-b}\right).\square$$

7. 已知 $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$.

解：本题考察的是 Laplace 变换的反演公式.

(法一)首先将 $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)^2}$ 化简可得 $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)^2}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{1}{(p-1)^2}$，又因为

$$\mathscr{L}\{1\}=\frac{1}{p},\quad \mathscr{L}\{\mathrm{e}^t\}=\frac{1}{p-1},\quad \mathscr{L}\{t\,\mathrm{e}^t\}=\frac{1}{(p-1)^2}$$

因此可得 $F(p)=\mathscr{L}\{1-\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t\}$，即有 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=1-\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t$.□

(法二)设 $G(p)=p\cdot F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2}$，$g(t)=\mathscr{L}^{-1}\{G(p)\}$，因此有

$$F(p)=\frac{G(p)}{p}\risingdotseq\int_0^t g(t)\mathrm{d}t=f(t)$$

而因为$g(t)=\mathscr{L}^{-1}\{G(p)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^2}\right\}=t\mathrm{e}^t$，因此有

$$f(t)=\int_0^t g(t)\mathrm{d}t=\int_0^t t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=1+(t-1)\mathrm{e}^t=1-\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^t.\square$$

(法三)设$F_1(p)=\frac{1}{(p-1)^2}$，$F_2(p)=\frac{1}{p}$，由卷积公式可得

$$\frac{1}{p(p-1)^2}=F_1(p)F_2(p)\risingdotseq\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=f(t)$$

因此有$f(t)=\int_0^t\tau\mathrm{e}^\tau\mathrm{d}\tau=1-\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^t.\square$

(法四)由 Laplace 变换反演公式可得，$F(p)=\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p(p-1)^2}$有$p=0$，$p=1$两个奇点，因此有

$$f(t)=\operatorname*{Res}_{p=0}f(p)+\operatorname*{Res}_{p=1}f(p)=\lim_{p=0}\left[p\cdot\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p(p-1)^2}\right]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[(p-1)^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p(p-1)^2}\right]\Bigg|_{p=1}$$

$$=1+\left(\frac{pt\mathrm{e}^{pt}-\mathrm{e}^{pt}}{p^2}\right)\Bigg|_{p=1}=1-\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^t.\square$$