一、判断题（以下论述正确的打√，错误的打×）（每题2分，共20分）

不同点物质相同　　某点不同方向物质不同

1. 材料的均匀性假设与各向同性假设是两个不同含义的假设。√

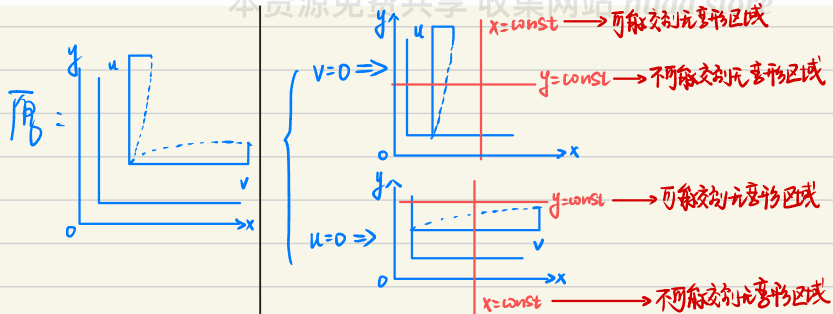
2. 对承载的弹性体而言，可能存在同时满足三类方程和两类边界条件的多个解。×

3. 在y为常数的直线上，如果v = 0，则在该线上必有$\varepsilon_y = 0$。×

4. 平面应力问题垂直平面方向的应变常常不等于零。√

5. 采用应力法求解弹性力学问题时，不需要满足变形协调方程。×

6. 伽辽金解法中假设的位移场函数需同时满足位移和应力边界条件。√



一、判断题（以下论述正确的打√，错误的打×）（每题2分，共20分）

二者具有相同形式

7. 薄板弯曲问题与平面应力问题应用的物理方程是不同的。×

8. 虚位移原理既适用于线弹性体又适用于非线性弹性体。√

容许位移

9. 若能将满足几何方程和位移边界条件的所有可能位移场假设出来，则

总势能取驻值

基于最小势能原理一定可求得真实位移。√

10. 伽辽金解法中假设的位移场函数需同时满足位移和应力边界条件。√

要同时满足几何方程和边界条件(位移+应力)

二、简答题（每题5分，共25分）

1.简述薄板弯曲经典理论的三条基本假设。

2.简述圣维南原理的基本含义。

3.简述弹性力学中应力如何表示？正负如何规定？

4.简述用应力法求解弹性力学平面问题的基本步骤。

5.简述虚位移原理，并说明其与基本方程的关系。

1、①直法线假设：变形前与中面垂直的直线，变形后仍为直线，且垂直于中曲面。

②中面中性面假设：板的中面内部不产生面内位移，始终保持为中性曲面

③ $\varepsilon_z=0$ 假设：与中面垂直的法线无伸长，其可忽略不计，近似为 $\varepsilon_z=0$

2、圣维南原理：把作用在弹性体一小部分边界上的力系，用一分布不同、静力等效的力系替代，除对边界附近的应力分布影响显著外，距该区域较远处的应力分布几乎不受影响。

3、正应力：用 σ 表示，加上一个脚标，如 σ_x 表示应力作用面与 x 轴垂直，且方向沿 x 轴

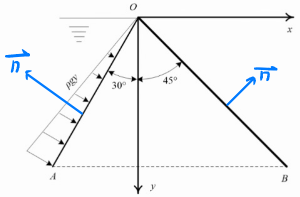
切应力：用 τ 表示，加上两个脚标，如 τ_{xy} 表示应力作用面与 x 轴垂直，且方向沿 y 轴。

正负：作用面外法线指向坐标轴正方向时，应力方向沿坐标轴正方向为正，反之为负
负方向时， 负 正

4、解 $\begin{cases}\text{平衡方程}\\ \text{变形协调方程}\end{cases}$ ⇒ 应力 ⟶ 物理方程 ⇒ 应变 ⟶ 解 $\begin{cases}\text{几何方程}\\ \text{位移边界条件}\end{cases}$ ⇒ 位移

5、虚位移原理：弹性体受外力平衡时，对于任意满足几何方程和位移边界条件的微小虚位移，外力所做虚功等于虚应变能。

三、如图所示楔形体，该楔形体左侧作用密度为ρ的液体，试写出OA、OB边的边界条件。



OA边：$l=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $m=-\frac{1}{2}$：

$(y=-\sqrt{3}x)$

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_x-\frac{1}{2}\tau_{xy}=\bar{X}=\rho g y\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\rho g y \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\tau_{yx}-\frac{1}{2}\sigma_y=\bar{Y}=\rho g y\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\rho g y \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \sqrt{3}(\sigma_x)_{y=-\sqrt{3}x}+(\tau_{xy})_{y=-\sqrt{3}x}=-\sqrt{3}\rho g y \\ \sqrt{3}(\tau_{yx})_{y=-\sqrt{3}x}+(\sigma_y)_{y=-\sqrt{3}x}=-\rho g y \end{cases}$$

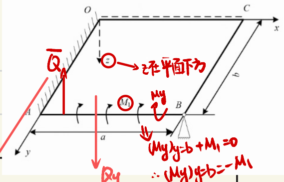
OB边

$(y=x)$ $l=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$m=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_x-\frac{\sqrt{2}}{2}\tau_{xy}=0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\tau_{yx}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_y=0 \end{cases}$$

$$\therefore (\sigma_x)_{y=x}=(\sigma_y)_{y=x}=(\tau_{xy})_{y=x}=(\tau_{yx})_{y=x}$$

四、写出图示矩形薄板弯曲问题的边界条件（四条边及角点B）。OA为固支边，OC为简支边，AB和BC为自由边，B点有支撑。（以挠度w表示）。



$(M_y)_{y=b}+M_1=0$

$\therefore (M_y)_{y=b}=-M_1$

$$\begin{cases} M_x=-D(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \\ M_y=-D(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \\ M_{xy}=M_{yx}=-D(1-\mu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_x=-D\dfrac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \\ Q_y=-D\dfrac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w \end{cases}$$

若AB上有横向载荷$\bar{Q}$则0应为$\bar{Q}$

假设有如图横向载荷$\bar{Q}$，边界条件变为：

$-D[\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\mu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}]_{y=b}=\bar{Q}$

OA边$(x=0)$： 固支 $(w)_{x=0}=0$ $\quad (\dfrac{\partial w}{\partial x})_{x=0}=0$

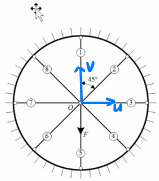
OC边$(y=0)$： 简支 $(w)_{y=0}=0$ $\quad (M_y)_{y=0}=-D(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2})=0 \Rightarrow (\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2})_{y=0}=0$

AB边$(y=b)$： 自由 $(M_y)_{y=b}=-M_1$ $\quad (Q_y+\dfrac{\partial M_{yx}}{\partial x})_{y=b}=-D[\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\mu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}]_{y=b}=0$

BC边$(x=a)$： 自由 $(M_x)_{x=a}=0$ $\quad (Q_x+\dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y})_{x=a}=-D[\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\mu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^2\partial x}]_{x=a}=0$

B点： 角点 $(M_{yx})_B+(M_{xy})_B=-2D(1-\mu)(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y})_B=0$

五、图示的桁架由8根同样尺寸的杆构成，它们连接在一刚性外环上，中间受一集中力F作用。采用最小势能原理或最小余能原理求该桁架结构中各杆的内力和节点O的位移。弹性系数为E，截面面积为f。



$\Delta_1=-v \quad \Delta_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}(u+v) \quad \Delta_3=-u \quad \Delta_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(-u+v) \quad \Delta_5=v \quad \Delta_6=\frac{\sqrt{2}}{2}(u+v)$

$\Delta_7=u \quad \Delta_8=\frac{\sqrt{2}}{2}(u-v)$

$$U=\sum_{i=1}^{8}\frac{Ef\Delta_i^2}{2l}$$

$$=\frac{Ef}{2l}\left[v^2+\frac{1}{2}(u^2+2uv+v^2)+u^2+\frac{1}{2}(u^2-2uv+v^2)+v^2+\frac{1}{2}(u^2+2uv+v^2)+u^2+\frac{1}{2}(u^2-2uv+v^2)\right]$$

$$=\frac{Ef}{2l}(4u^2+4v^2)=\frac{2Ef}{l}(u^2+v^2)$$

$V=-Fv$

$\Pi=U+V \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u}=0 \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v}=\frac{4Ef}{l}v-F=0 \Rightarrow v=\frac{Fl}{4Ef}$

$N_1=\frac{Ef\Delta_1}{l}=\frac{Ef}{l}\left(-\frac{Fl}{4Ef}\right)=-\frac{F}{4} \qquad N_4=\frac{Ef\Delta_4}{l}=\frac{Ef}{l}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{Fl}{4Ef}\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}F$

$N_2=\frac{Ef\Delta_2}{l}=\frac{Ef}{l}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{Fl}{4Ef}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{8}F \qquad N_5=\frac{Ef\Delta_5}{l}=\frac{Ef}{l}\frac{Fl}{4Ef}=F$

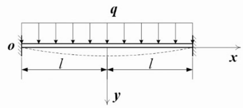
$N_3=\frac{Ef\Delta_3}{l}=\frac{Ef}{l}(-u)=0 \qquad N_6=\frac{Ef\Delta_6}{l}=\frac{Ef}{l}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{Fl}{4Ef}\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}F$

$N_7=0 \qquad N_8=\frac{Ef\Delta_8}{l}=\frac{Ef}{l}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{Fl}{4Ef}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{8}F$

六、图示长为$2l$的固支梁受分布力q作用，采用基于最小势能原理的里茨法求解时，在下列函数中选取一个合适的作为挠度函数，求出待定系数，并计算最大挠度和最大弯矩。

~~(1)~~ $w = A\cos\frac{\pi x}{l}$；　(2) $w = A\left(1+\cos\frac{\pi x}{l}\right)$；　~~(3)~~ $w = A\sin\frac{\pi x}{l}$。

注：梁的应变能为$U = \frac{EJ}{2}\int_{-l}^{l}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx$，弯矩与挠度的关系为$M(x) = -EJ\frac{d^2w}{dx^2}$。



$(w)_{x=-l}=0$

$(w)_{x=l}=0$

$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=l}=0$

$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=-l}=0$

$\Rightarrow$ (2) 为挠度函数

$w = A\left(1+\cos\frac{\pi x}{l}\right)$

$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2}A\cos\frac{\pi x}{l}$

$$U = \frac{EJ}{2}\int_{-l}^{l}\left(-\frac{\pi^2}{l^2}A\cos\frac{\pi x}{l}\right)^2 dx = \frac{EJ}{2}\frac{\pi^4}{l^4}A^2\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{\pi x}{l}dx$$
$$= \frac{EJ}{2}\frac{\pi^4}{l^4}A^2\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2\pi x}{l}\right)dx$$
$$= \frac{EJA^2\pi^4}{4l^4}\cdot 2l = \frac{EJA^2\pi^4}{2l^3}$$

$$V = -\int_{-l}^{l} q\,w(x)\,dx$$
$$= -\int_{-l}^{l} qA\left(1+\cos\frac{\pi x}{l}\right)dx = -qA\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{\pi}{l}x\right)dx$$
$$= -2qAl$$

$$\Pi = U+V = \frac{EJA^2\pi^4}{2l^3} - 2qAl$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial A} = \frac{EJ\pi^4}{l^3}A - 2ql = 0 \Rightarrow A = \frac{2ql^4}{EJ\pi^4}$$

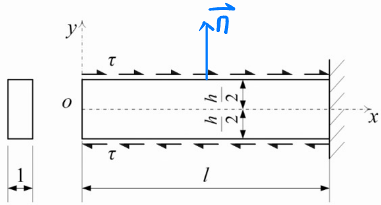
$$\therefore w(x) = \frac{2ql^4}{EJ\pi^4}\left(1+\cos\frac{\pi x}{l}\right) \qquad \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{2ql^2}{EJ\pi^2}\cos\frac{\pi x}{l}$$

$$w_{max} = w(0) = \frac{4ql^4}{EJ\pi^4}$$

$$\therefore M(x) = \frac{2ql^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{l}$$

$$M_{max} = M(0) = \frac{2ql^2}{\pi^2}$$

七、如图所示平面悬臂梁，长为l高为h厚度为1（远小于长和高），在梁的上下表面作用均布剪应力τ，不考虑体力作用，若假设梁的正应力σ_x分布形式为：$\sigma_x = Axy$，A为待定系数，试用应力函数法求解梁的应力分量σ_x、σ_y和τ_{xy}。



$\left.\begin{array}{l}\sigma_x = Axy \\ \sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\varphi = \frac{1}{6}Axy^3 + yf_1(x) + f_2(x)$

$\nabla^4\varphi = 0 \Rightarrow \frac{d^4 f_1(x)}{dx^4} = 0 \ , \ \frac{d^4 f_2(x)}{dx^4} = 0$

设 $f_1(x) = Bx^3 + Cx^2 + Dx$ $\Rightarrow \varphi = \frac{1}{6}Axy^3 + Bx^3y + Cx^2y + Dxy + Ex^3 + Fx^2$

$f_2(x) = Ex^3 + Fx^2$

$\begin{cases}\sigma_x = Axy \\ \sigma_y = 6Bxy + 2Cy + 6Ex + 2F \\ \tau_{xy} = -\frac{1}{2}Ay^2 - 3Bx^2 - 2Cx - D\end{cases}$

上边界：
$(y = \frac{h}{2})$

$l = 0, \ m = 1, \ \bar{X} = \tau, \ \bar{Y} = 0$

$\begin{cases}0 \cdot Axy - \frac{1}{2}Ay^2 - 3Bx^2 - 2Cx - D = \tau \\ 6Bxy + 2Cy + 6Ex + 2F = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{Ah^2}{8} + 3Bx^2 + 2Cx + D = -\tau \\ 3Bhx + Ch + 6Ex + 2F = 0\end{cases}$

$\begin{cases}3Bh + 6E = 0 \\ Ch + 2F = 0\end{cases}$

左边界：
$(x = 0)$

$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \, dy = 0$

$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x y \, dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Axy^2 \, dy = 0$

$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \, dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (-\frac{1}{2}Ay^2 - D) \, dy = \frac{1}{6}Ay^3 + Dy \Big|_{\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} = -\frac{Ah^3}{24} - Dh = 0$

$\frac{Ah^2}{24} + D = 0$

下边界：
$(y = -\frac{h}{2})$

$l = 0, \ m = -1, \ \bar{X} = -\tau, \ \bar{Y} = 0$

$\begin{cases}\frac{1}{2}Ay^2 + 3Bx^2 + 2Cx + D = -\tau \\ -6Bxy - 2Cy - 6Ex - 2F = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{Ah^2}{8} + 3Bx^2 + 2Cx + D = -\tau \\ -3Bhx - Ch + 6Ex + 2F = 0\end{cases}$

$\therefore B = C = E = F = 0$

$\therefore \begin{cases}\frac{Ah^2}{8} + D = -\tau \\ \frac{Ah^2}{24} + D = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A = -\frac{12\tau}{h^2} \\ D = \frac{\tau}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sigma_x = -\frac{12\tau}{h^2}xy \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \frac{6\tau}{h^2}xy^3 - \frac{\tau}{2}\end{cases}$