2020-2021 第一学期《高等数学 I （1）》期中考试试题

一、填空题（每空 3 分）

1、函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-|x|}$ 的定义域是________.

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n+9^n}=$______________.

3、设 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 可导且 $f(x)>0$，则 $dy=$__________ dx.

4、设 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$，则左导数 $f'_-(0)=$_________.

5、函数 $y=2-(x-1)^{\frac{1}{3}}$ 的凸区间为_____________, 拐点为_________.

6、曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})$ 的斜渐近线方程为________________.

7、函数 $y=3^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数 $a_n=$_____________.

二、选择题（每空 3 分）

1、设当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 都是等价无穷小（$\beta(x)\neq 0$），则当 $x\to x_0$ 时，下列表达式中不一定为无穷小的是（　　　）

（A） $\alpha^2(x)+\beta^2(x)\sin\dfrac{1}{x}$　　　(B) $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$

(C) $\ln(1+\alpha(x)\beta(x))$　　　(D) $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$

2、已知曲线 $y=a\sqrt{x}(a>0)$ 与 $y=\ln\sqrt{x}$ 在 $P(x,y)$ 有公共切线。则常数 a 的值与点 P 的坐标分别为（　　　　）

（A） $\dfrac{1}{e},(e^2,1)$　（B） $\dfrac{1}{e},(e,1)$　（C） $\dfrac{1}{e^2},(e,1)$　（D） $\dfrac{1}{e^2},(e^2,1)$

三、计算下列极限（每小题 6 分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(e^{\sin x}-1)}$

2、$\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

四、$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}，x>0 \\ x^2 g(x), x\le 0 \end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处极限是否存在？是否连续？是否可导？（本题 6 分）

五、求函数 $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ 的单调区间和极值.（本题 6

六、设 $y=y(x)$ 由方程 $xy=e^{x+y}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.（本题 8 分）

七、设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^2e^{t(x-2)}+ax-1}{e^{t(x-2)}+1}$，若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，求常数 a .（本题 8 分）

八、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x-3)}{\sin\pi x},x<0,\ x\neq -n\\ 1+x,x\geq 0\end{cases}$，$n$ 为正整数，试求 $f(x)$ 的间断点，并指出间断点的类型（要说明理由）.（本题 8 分）

九、求 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值点与极值.（本题 8 分）

十、当$x>0$时，试证不等式$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$成立.（本题8分）

十一、设$f(x)$在$\left[0,1\right]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(1)=0$，证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使$3f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.（本题6分）