wulin0919@nuaa.edu.cn

《概率论与数理统计》

习题解答

编者：伍霖

南京航空航天大学

目录

第一章 概率论的基本概念

1.1. **解**：(1)$S=\{1,2,3,4,5,6\}$；$A=\{1,3,5\}$；

(2)假设第n次第一次击中目标，则$S=\{1,2,3,\dots,n\}$；$A=\{1,2,3\}$；

(3)假设三段细棒的长度分别为x,y,z，则$S=\{x,y,z|x+y+z=1,x,y,z>0\}$，有

$$A=\{x,y,z|x+y+z=1,x+y>z,x+z>y,y+z>x,x,y,z>0\}.\square$$

1.2. **解**：(1)$P\left(A\bar{B}\bar{C}\right)$；(2)$P\left(AB\bar{C}\right)$；(3)$P(A\cup B\cup C)$；(4)$P(ABC)$；(5)$P\left(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\right)$；

(6)$P\left(\bar{A}\bar{B}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{B}\bar{C}\right)$；(7)$P\left(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}\right)=P\left(\overline{A\cap B\cap C}\right)$；(8)$P(AB\cup AC\cup BC).\square$

注：德摩根定律：$\overline{\bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n}=\bigcap\limits_{n\geqslant 1}\overline{A_n}$；$\overline{\bigcap\limits_{n\geqslant 1} A_n}=\bigcup\limits_{n\geqslant 1}\overline{A_n}$.

1.3. **解**：(1)$AB\cup A\bar{B}=A$；(2)$(A\cup B)\cup\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)=S$；

(3)$\left(\overline{A\cup B}\right)\cap\left(A-\bar{B}\right)=\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)\cap\left(A-\bar{B}\right)=\varnothing.\square$

1.4. **解**：注意到$A=A_1\cup A_2\cup(A_3-A_2)=A_1\cup A_3$，其中$A_2\subseteq A_3.\square$

1.5. **解**：A，B，C 至少发生一个的概率为$P(A\cup B\cup C)$，那么有

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-0-\frac{1}{8}+0=\frac{5}{8}.\square\end{aligned}$$

注：A 与 B 不能同时发生，B 与 C 不能同时发生，由此可得 A、B 和 C 均不能同时发生，

即$P(ABC)=0$；或因为$ABC\subseteq AB$，那么有$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0\Longleftrightarrow P(ABC)=0$.

1.6. **解**：注意到$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.5+0.7-0.8=0.4$，那么有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.4=0.1$$
$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.7-0.4=0.3.\square$$

1.7. **解**：(1)设 4 处错误发生在最后一题为 A 事件，则有

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{1}{6\times 6\times 6\times 6}=\frac{1}{1296}$$

(2)设 4 处错误发生在不同题上为 B 事件，则有

$$P(B)=\frac{k}{n}=\frac{6\times 5\times 4\times 3}{6\times 6\times 6\times 6}=\frac{5}{18}$$

(3)设至少有 3 道题目全对为 C 事件，其对立事件为只有 2 道题全对，即事件 B，则有

$$P(\mathrm{C})=P\left(\overline{\mathrm{B}}\right)=1-P(\mathrm{B})=1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}.\square$$

1.8. **解**：注意到

$$P\left(\mathrm{B}|\mathrm{A}\cup\overline{\mathrm{B}}\right)=\frac{P\left[\mathrm{B}\cap\left(\mathrm{A}\cup\overline{\mathrm{B}}\right)\right]}{P\left(\mathrm{A}\cup\overline{\mathrm{B}}\right)}=\frac{P(\mathrm{AB})}{P(\mathrm{A})+P\left(\overline{\mathrm{B}}\right)-P\left(\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\right)}=\frac{P(\mathrm{A})-P\left(\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\right)}{\left[1-P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)\right]+[1-P(\mathrm{B})]-P\left(\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\right)}$$

$$=\frac{\left[1-P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)\right]-P\left(\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\right)}{\left[1-P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)\right]+[1-P(\mathrm{B})]-P\left(\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\right)}=\frac{(1-0.3)-0.5}{(1-0.3)+(1-0.4)-0.5}=\frac{1}{4}=0.25.\square$$

1.9. **解**：因为

$$P(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{AB})}{P(\mathrm{A})}=\frac{P(\mathrm{AB})}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\Longrightarrow P(\mathrm{AB})=\frac{1}{12}$$

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\frac{P(\mathrm{AB})}{P(\mathrm{B})}=\frac{\frac{1}{12}}{P(\mathrm{B})}=\frac{1}{2}\Longrightarrow P(\mathrm{B})=\frac{1}{6}$$

所以有

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{AB})=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.\square$$

1.10. **解**：(1)设抽出两件都是正品为 A 事件，则有

$$P(\mathrm{A})=\frac{k}{n}=\frac{8\times7}{10\times9}=\frac{28}{45}$$

(2)设抽出两件都是次品为 B 事件，则有

$$P(\mathrm{B})=\frac{k}{n}=\frac{2\times1}{10\times9}=\frac{1}{45}$$

(3)设抽出一件次品，一件正品为 C 事件，则有

$$P(\mathrm{C})=\frac{k}{n}=\frac{8\times2+2\times8}{10\times9}=\frac{16}{45}$$

(法二)

$$P(\mathrm{C})=1-P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=1-P(\mathrm{A})-P(\mathrm{B})=1-\frac{28}{45}-\frac{1}{45}=\frac{16}{45}$$

(4)设第二次取出的是次品为 D 事件，则有

$$P(\mathrm{D})=\frac{k}{n}=\frac{8\times2+2\times1}{10\times9}=\frac{1}{5}.\square$$

1.11. **解**：设取到白球为 A 事件，则有

$$P(\mathrm{A})=\frac{n}{m+n}\cdot\frac{N+1}{(N+1)+M}+\frac{m}{m+n}\cdot\frac{N}{N+(M+1)}=\frac{n(N+1)+mN}{(m+n)(N+M+1)}.\square$$

1.12. **解**：(1)设随机抽取到甲班为 A 事件，随机抽取到乙班为 B 事件，随机抽取到丙班为 C 事件，随机抽取一人为集邮者为 D 事件，则有

$$P(\mathrm{D})=P(\mathrm{AD})+P(\mathrm{BD})+P(\mathrm{CD})=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{5}=\frac{7}{24}$$

(2)即要求

$$P(\mathrm{B}|\mathrm{D})=\frac{P(\mathrm{BD})}{P(\mathrm{D})}=\frac{P(\mathrm{D}|\mathrm{B})P(\mathrm{B})}{P(\mathrm{D})}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{7}{24}}=\frac{2}{7}.\square$$

1.13. **解**：(1)设第一次及格为 A 事件，第二次及格为 B 事件，至少有一次及格为 C 事件，则有

$$P(\mathrm{A})=p\text{；}P(\mathrm{B}|\mathrm{A})=p\text{；}P\left(\mathrm{B}|\overline{\mathrm{A}}\right)=\frac{p}{2}$$

那么可以得到

$$P(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{AB})}{P(\mathrm{A})}\Longrightarrow P(\mathrm{AB})=P(\mathrm{B}|\mathrm{A})P(\mathrm{A})=p\cdot p=p^2$$

$$P\left(\mathrm{B}|\overline{\mathrm{A}}\right)=\frac{P\left(\overline{\mathrm{A}}\mathrm{B}\right)}{P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)}=\frac{P(\mathrm{B})-P(\mathrm{AB})}{1-P(\mathrm{A})}\Longrightarrow P(\mathrm{B})=[1-P(\mathrm{A})]P\left(\mathrm{B}|\overline{\mathrm{A}}\right)+P(\mathrm{AB})$$

$$=(1-p)\cdot\frac{p}{2}+p^2=\frac{1}{2}p(p+1)$$

$$P(\mathrm{C})=P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{AB})=p+\frac{1}{2}p(p+1)-p^2=\frac{1}{2}p(3-p)$$

(2)即要求

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\frac{P(\mathrm{AB})}{P(\mathrm{B})}=\frac{p^2}{\frac{1}{2}p(p+1)}=\frac{2p}{p+1}.\square$$

1.14. **解**：(1)设第一次取出的球全是新球为A_1事件，一新一旧为A_2事件，全是旧球为A_3事件，第二次取出的球全是新球为 B 事件，则有

$$P(\mathrm{B})=P(\mathrm{B}|\mathrm{A}_1)P(\mathrm{A}_1)+P(\mathrm{B}|\mathrm{A}_2)P(\mathrm{A}_2)+P(\mathrm{B}|\mathrm{A}_3)P(\mathrm{A}_3)$$
$$=\frac{\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_6^2}\cdot\frac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_6^2}+\frac{\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_6^2}\cdot\frac{\mathrm{C}_4^1\cdot\mathrm{C}_2^1}{\mathrm{C}_6^2}+\frac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_6^2}\cdot\frac{\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_6^2}=\frac{1}{15}\cdot\frac{6}{15}+\frac{3}{15}\cdot\frac{4\cdot 2}{15}+\frac{6}{15}\cdot\frac{1}{15}=\frac{4}{25}$$

(2)即要求

$$P(\mathrm{A}_2|\mathrm{B})=\frac{P(\mathrm{A}_2\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}=\frac{P(\mathrm{B}|\mathrm{A}_2)\cdot P(\mathrm{A}_2)}{P(\mathrm{B})}=\frac{\frac{3}{15}\cdot\frac{4\cdot 2}{15}}{\frac{4}{25}}=\frac{2}{3}.\square$$

1.15. **解**：设硬币是正品为 A 事件，硬币是次品为 B 事件，投掷r次每次都得到国徽为 C 事件，即要求

$$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(C|A)P(A)}{P(C|A)P(A)+P(C|B)P(B)}$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot\frac{m}{m+n}}{\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot\frac{m}{m+n}+1\cdot\frac{n}{m+n}}=\frac{m}{2^r\cdot n+m}.\square$$

1.16. **解**：设甲已丙三人分别命中目标为 A，B，C 事件，目标被击中为 D 事件，且甲已丙三人是否射中目标的事件相互独立，则有

$$P(D)=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$$

即要求

$$P(B|D)=\frac{P(BD)}{P(D)}=\frac{P(B)}{P(D)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{8}{9}}=\frac{9}{16}.\square$$

1.17. **解**：(1)运输的物品分成三部分：A_1为一部分里面的物品损坏了 2%；A_2为一部分里面的物品损坏了 10%；A_3为一部分里面的物品损坏了 90%，从这三部分中抽取，利用全概率公式有

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$$
$$=0.98^3\cdot 0.8+0.9^3\cdot 0.15+0.1^3\cdot 0.05=0.862354$$

因此有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{0.98^3\cdot 0.8}{0.862354}=0.873138$$
$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{0.9^3\cdot 0.15}{0.862354}=0.126804$$
$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B)}=\frac{0.1^3\cdot 0.05}{0.862354}=5.79809\times 10^{-5}$$

(2)运输的物品分成四部分：A_1为一部分里面的物品损坏了 2%；A_2为一部分里面的物品损坏了 10%；A_3为一部分里面的物品损坏了 90%；B_0为一部分里面的物品完好，从这四部分中抽取，因为

$$P(B_0)=1-[P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)]=0.1$$

利用全概率公式有

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)+P(B|B_0)P(B_0)$$
$$=0.98^3\cdot 0.7+0.9^3\cdot 0.15+0.1^3\cdot 0.05+1^3\cdot 0.1=0.868234$$

因此有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{0.98^3\cdot 0.7}{0.868234}=0.758821$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{0.9^3\cdot 0.15}{0.868234}=0.125945$$

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B)}=\frac{0.1^3\cdot 0.05}{0.868234}=5.75881\times 10^{-5}.\square$$

1.18. **解**：(1)事件 A 与 B 互不相容，即$P(AB)=0$，则有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0$$

$$P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{1-[P(A)+P(B)-P(AB)]}{1-P(B)}$$

$$=\frac{1-(0.3+0.6-0)}{1-0.6}=0.25$$

$$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)=1-P(A)+P(B)-[P(B)-P(AB)]$$

$$=1-P(A)+P(AB)=1-0.3+0=0.7$$

(2)事件 A 与 B 有包含关系，即$P(AB)=P(A)$，则有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{0.3}{0.6}=0.5$$

$$P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{1-[P(A)+P(B)-P(AB)]}{1-P(B)}=\frac{1-[P(A)+P(B)-P(A)]}{1-P(B)}=1$$

$$P(\overline{A}\cup B)=1-P(A)+P(AB)=1-P(A)+P(A)=1$$

(3)事件 A 与 B 相互独立，即$P(AB)=P(A)P(B)$，则有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)=0.3$$

$$P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{1-[P(A)+P(B)-P(AB)]}{1-P(B)}=\frac{1-[P(A)+P(B)-P(A)P(B)]}{1-P(B)}$$

$$=\frac{[1-P(A)][1-P(B)]}{1-P(B)}=1-P(A)=1-0.3=0.7$$

$$P(\overline{A}\cup B)=1-P(A)+P(AB)=1-P(A)+P(A)P(B)=1-0.3+0.3\cdot 0.6=0.88.\square$$

1.19. **解**：设第i名情报员能破译一份密码为A_i事件，破译一份密码为 B 事件，假设至少需要n名情报员才能使破译一份密码的概率大于 0.95，即要求$P(B)>0.95$，因为每名情报员破译一份密码相互独立，则有

$$P(B)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})=1-\prod_{i=1}^{n}[1-P(A_i)]=1-(1-0.6)^n>0.95$$

即

$$0.4^n < 0.05 \Longleftrightarrow n\ln(0.4) < \ln(0.05) \Longleftrightarrow n > \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.4)} = 3.27 \Longleftrightarrow n_{\min} = 4$$

即至少需要 4 名情报员才能使破译一份密码的概率大于 0.95.□

1.20. **解**：(1)设第i台钢琴能出厂为A_i事件，所有钢琴能出厂为 B 事件，且各钢琴质量相互独立，则有

$$P(B) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = (0.7 + 0.3 \cdot 0.8)^n = 0.94^n$$

(2)设恰有两架钢琴不能出厂为 C 事件，则

$$\begin{aligned} P(C) &= C_n^2 P^2\left(\overline{A_i}\right) P^{n-2}(A_i) = C_n^2 [1 - P(A_i)]^2 P^{n-2}(A_i) \\ &= \frac{n(n-1)}{2}(1-0.94)^2 0.94^{n-2} = \frac{0.06^2 \cdot 0.94^{n-2} \cdot n(n-1)}{2}.□ \end{aligned}$$

第二章 随机变量及其分布

2.1. **解**：随机变量 X 可能的取值为 0，1，2，则有

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

.□

2.2. **解**：(1)由题意可得

$$P(X=1)=\frac{1}{3},\ P(X=2)=\frac{1}{3^2},\ \cdots,\ P(X=k)=\frac{1}{3^k}$$

那么有

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\neq 1$$

即不是随机变量的分布律.

(2)由题意可得

$$P(X=1)=\frac{a}{N},\ P(X=2)=\frac{a}{N},\ \cdots,\ P(X=k)=\frac{a}{N}$$

那么有

$$\sum_{k=1}^{N}P(X=k)=\sum_{k=1}^{N}\frac{a}{N}=\frac{a}{N}\cdot N=a=1\Longrightarrow a=1.\square$$

2.3. **解**：方案一：以 X 记第 1 个人维护的 30 台中同时发生故障的台数，以 $\mathrm{A}_i\,(i=1,2,3)$ 表示事件第 i 个人维护 30 台中发生故障不能及时维修，则知 90 台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\mathrm{A}_3)=1-P\left(\overline{\mathrm{A}_1}\,\overline{\mathrm{A}_2}\,\overline{\mathrm{A}_3}\right)=1-P^3(X<2)=1-\left[\sum_{k=0}^{1}P(X=k)\right]^3$$

因为 $X\sim\mathrm{B}(30,0.01)$，所以可得

$$P(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\mathrm{A}_3)=1-[\mathrm{C}_{30}^0\cdot(0.01)^0\cdot(0.99)^{30}+\mathrm{C}_{30}^1\cdot(0.01)^1\cdot(0.99)^{29}]^3=0.104571$$

方案二：以 Y 记 90 台中同一时刻发生故障的台数，此时 $Y\sim\mathrm{B}(90,0.01)$，故 90 台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P(Y\geqslant 4)=1-\sum_{k=0}^{3}\mathrm{C}_{90}^k\cdot(0.01)^k\cdot(0.99)^{90-k}=0.0383203.\square$$

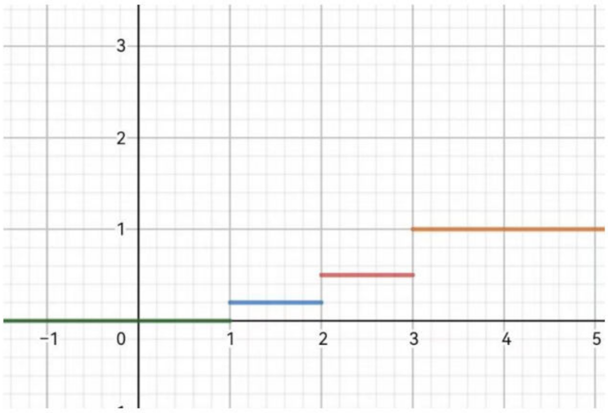
2.4. **解**：随机变量 X 对应的分布律为

X	1	2	3
$P(X)$	0.2	0.3	0.5

那么随机变量X的分布函数$F(x)$为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.2, & 1\leqslant x<2\\ 0.5, & 2\leqslant x<3\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}.\square$$

其函数图像如下



2.5. **解**：随机变量X的分布函数$F(x)$为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.4, & -1\leqslant x<1\\ 0.8, & 1\leqslant x<3\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}$$

随机变量X对应的分布律为

X	-1	1	3
$P(X)$	0.4	0.4	0.2

.□

2.6. **解**：随机变量X的概率密度$f(x)$为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 0<x<1\\ \frac{2}{9}, & 3<x<6\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

而

$$P(X>k)=1-P(X\leqslant k)=\frac{2}{3}\Longrightarrow P(X\leqslant k)=\frac{1}{3}$$

结合随机变量X的概率密度图形可得$1\leqslant k\leqslant 3$.□

2.7. **解**：设随机变量X的分布函数分别为$F(x)$，那么有

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x^2, & 0<x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

所以$P\left(X<\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，可知$Y\sim B\left(3,\frac{1}{4}\right)$，即随机变量$Y$对应的分布律为

Y	0	1	2	3
$P(Y)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

.□

2.8. **解**：(1)因为$F(\mathrm{e}-0)=F(\mathrm{e})=a=1$，即连续型随机变量$X$的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \ln x, & 1<x<\mathrm{e}\\ 1, & x\geqslant \mathrm{e}\end{cases}$$

(2)概率密度为

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 1<x<\mathrm{e}\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

(3)利用分布函数定义有

$$P(X<2)=F(2)=\ln 2;\ P(0<X\leqslant 3)=F(3)-F(0)=1-0=1$$

$$P(2<X<2.5)=F(2.5)-F(2)=\ln(2.5)-\ln 2=\ln\left(\frac{5}{4}\right).□$$

2.9. **解**：(1)因为$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{4}\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}\frac{a}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{a+1}{2}$，即$a=1$.

(2)随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2\\ \frac{1}{x^2}, & x\geqslant 2\end{cases}$$

随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x<0\\ \int_0^x\frac{1}{4}\mathrm{d}x,\ 0\leqslant x<2\\ \int_0^2\frac{1}{4}\mathrm{d}x+\int_2^x\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x,\ x\geqslant 2\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{4}x, & 0\leqslant x<2\\ 1-\frac{1}{x}, & x\geqslant 2\end{cases}.□$$

2.10. **解**：由题意可得$X\sim U(a,b),(a>0)$，则

(1)因为$P(3\leqslant X\leqslant 4)=P(X>4)-P(0<X<3)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，所以概率密度

$$f(x)=\frac{P(3\leqslant X\leqslant 4)}{4-3}=\frac{1}{4}\Longrightarrow b-a=4\cdots①$$

又因为

$$P(X>4)=\frac{1}{2}\Longrightarrow\frac{a+b}{2}=4\cdots②$$

由此可得$a=2$，$b=6$，即$X\sim U(2,6)$.

(2)显然有$P(1<X<5)=P(2\leqslant X<5)=(5-2)\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.□

2.11. **解**：随机变量X的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}, & x>0\end{cases}$$

随机变量X的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}, & x>0\end{cases}$$

则

$$P(X>10)=1-P(X\leqslant 10)=1-F_X(10)=1-\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{10}{5}}\right)=\mathrm{e}^{-2}$$

因此有$Y\sim B(5,\mathrm{e}^{-2})$，即随机变量$Y$对应的分布律为

Y	0	1	2	3	4	5
$P(Y)$	$(1-\mathrm{e}^{-2})^5$	$5\mathrm{e}^{-2}(1-\mathrm{e}^{-2})^4$	$10\mathrm{e}^{-4}(1-\mathrm{e}^{-2})^3$	$10\mathrm{e}^{-6}(1-\mathrm{e}^{-2})^2$	$5\mathrm{e}^{-8}(1-\mathrm{e}^{-2})$	e^{-10}

于是

$$P(Y\geqslant 1)=1-P(Y=0)=1-(1-\mathrm{e}^{-2})^5.\square$$

2.12. **解**：因为$X\sim N(3,4)$，于是有$\mu=3$，$\sigma=2$.

(1)利用标准正态分布函数可得

$$P(2<X<5)=P\left(\frac{2-3}{2}<\frac{X-3}{2}<\frac{5-3}{2}\right)=P\left(-\frac{1}{2}<\frac{X-3}{2}<1\right)$$
$$=\Phi(1)-\Phi\left(-\frac{1}{2}\right)=\Phi(1)-\left[1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\Phi(1)+\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-1=0.5328$$

$$P(-4<X<10)=P\left(\frac{-4-3}{2}<\frac{X-3}{2}<\frac{10-3}{2}\right)=P\left(-\frac{7}{2}<\frac{X-3}{2}<\frac{7}{2}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{7}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{7}{2}\right)=\Phi\left(\frac{7}{2}\right)-\left[1-\Phi\left(\frac{7}{2}\right)\right]=2\Phi\left(\frac{7}{2}\right)-1=0.9995$$

$$P(|X|>2)=1-P(|X|\leqslant 2)=1-P(-2\leqslant X\leqslant 2)=1-P\left(\frac{-2-3}{2}\leqslant\frac{X-3}{2}\leqslant\frac{2-3}{2}\right)$$
$$=1-P\left(-\frac{5}{2}\leqslant\frac{X-3}{2}\leqslant-\frac{1}{2}\right)=1-\Phi\left(-\frac{1}{2}\right)+\Phi\left(-\frac{5}{2}\right)$$
$$=1-\left[1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\left[1-\Phi\left(\frac{5}{2}\right)\right]=1+\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{5}{2}\right)=0.6977$$

$$P(X>3)=P\left(\frac{X-3}{2}>\frac{3-3}{2}\right)=P\left(\frac{X-3}{2}>0\right)=\frac{1}{2}$$

(2)因为$P(X>\mathrm{C})=P\left(\frac{X-3}{2}>\frac{\mathrm{C}-3}{2}\right)=P(X<\mathrm{C})=P\left(\frac{X-3}{2}<\frac{\mathrm{C}-3}{2}\right)$，于是$\frac{\mathrm{C}-3}{2}$是$Z=\frac{X-3}{2}\sim N(0,1)$的对称轴，即$\frac{\mathrm{C}-3}{2}=0\Longleftrightarrow\mathrm{C}=3$.□

2.13. 解：二次方程$y^2+4y+X=0$无实根，即$\Delta=4^2-4\cdot1\cdot X=16-4X<0\Longleftrightarrow X>4$，于是有$P(X>4)=\dfrac{1}{2}$.

(1)$X\sim N(\mu,\sigma^2)$和$P(X>4)=P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}>\dfrac{4-\mu}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{4-\mu}{\sigma}$是$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$的对称轴，即$\dfrac{4-\mu}{\sigma}=0\Longleftrightarrow\mu=4$.

(2)因为$P(4<X<8)=P\left(\dfrac{4-4}{\sigma}<\dfrac{X-4}{\sigma}<\dfrac{8-4}{\sigma}\right)=P\left(0<\dfrac{X-4}{\sigma}<\dfrac{4}{\sigma}\right)=0.3$，有

$$\begin{aligned}P(X<0)&=P\left(\frac{X-4}{\sigma}<\frac{0-4}{\sigma}\right)=P\left(\frac{X-4}{\sigma}<-\frac{4}{\sigma}\right)=P\left(\frac{X-4}{\sigma}>\frac{4}{\sigma}\right)\\&=P\left(\frac{X-4}{\sigma}>0\right)-P\left(\frac{4}{\sigma}>\frac{X-4}{\sigma}>0\right)=\frac{1}{2}-0.3=0.2.\square\end{aligned}$$

2.14. 解：(1)因为

$$\begin{aligned}1&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{c}{x}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x)^2}{2}}\mathrm{d}x=c\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x)^2}{2}}\mathrm{d}(\ln x)\xlongequal{t=\ln x}c\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\\&=2c\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=2c\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sqrt{2\pi}\,c\end{aligned}$$

于是可得$c=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

注：高斯积分$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$计算过程如下

$$\begin{aligned}I^2&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\xlongequal{\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\rho\,\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}}\mathrm{d}\rho\\&=2\pi\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\xlongequal{u=\frac{\rho^2}{2}}2\pi\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=2\pi\end{aligned}$$

于是有$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}$.

(2)设随机变量X的分布函数为$F_X(x)$，即因为

$$G(y)=P(Y\leqslant y)=P(\ln X\leqslant y)=P(X\leqslant \mathrm{e}^y)=F_X(\mathrm{e}^y)$$

且有$\mathrm{e}^y>0$，于是

$$G'(y)=g(y)=F'_X(\mathrm{e}^y)\cdot(\mathrm{e}^y)'=f(\mathrm{e}^y)\cdot\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^y\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^y}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(\ln\mathrm{e}^y)^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$$

即$g(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$，$y\in\mathbb{R}$.

(3)因为$Y=\ln X$，$X>0$，$Y\in\mathbb{R}$，于是$G(Y)\in[0,1]$，设$Z=G(Y)$，由于Z在$(-\infty,0)$和$(1,+\infty)$上的概率密度为0，又因为$G(Y)$是单调函数，因此$G(Y)$必存在反函数$G^{-1}(Y)$，所以当$Z\in[0,1]$时有

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P\{G(Y)\leqslant z\}=P\{Y\leqslant G^{-1}(z)\}=G(G^{-1}(z))=z$$

可得

$$F'_Z(z)=f_Z(z)=\begin{cases}1, & z\in[0,1]\\0, & \text{else}\end{cases}.\square$$

2.15. **解**：随机变量X的分布律为

X	-2	-1	0	1	3
$P(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

随机变量$Y=X^2$可能的取值为0，1，4，9，于是有

$$P(Y=0)=P(X=0)=\frac{1}{5};\ P(Y=1)=P(X=-1)+P(X=1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{15}=\frac{7}{30}$$

$$P(Y=4)=P(X=-2)=\frac{1}{5};\ P(Y=9)=P(X=3)=\frac{11}{30}$$

即随机变量Y的分布律为

Y	0	1	4	9
$P(Y)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

2.16. **解**：因为随机变量$X\sim N(0,1)$，于是$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$x\in\mathbb{R}$，设随机变量$X$，$Y$，$Z$对应的分布函数分别为$F_X(x)$，$F_Y(y)$，$F_Z(z)$，则

(1)当$y\leqslant-1$时，$f_Y(y)=0$；当$y>-1$时有

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(2X^2-1\leqslant y)=P\left(|X|\leqslant\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)=F_X\left(\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)-F_X\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)$$

于是有

$$F'_Y(y)=f_Y(y)=F'_X\left(\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)'-F'_X\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)\cdot\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)'$$

$$=f_X\left(\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{y+1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}+f_X\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{y+1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{y+1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)^2}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y+1)}}e^{-\frac{y+1}{4}}$$

即随机变量 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y+1)}}e^{-\frac{y+1}{4}}, & y>-1\\ 0, & y\leqslant -1\end{cases}$$

(2)当 $z<0$ 时，$f_Z(z)=0$；当 $z\geqslant 0$ 时有

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P\left(\frac{1}{2}|X|\leqslant z\right)=P(|X|\leqslant 2z)=F_X(2z)-F_X(-2z)$$

于是有

$$F'_Z(z)=f_Z(z)=F'_X(2z)\cdot(2z)'-F'_X(-2z)\cdot(-2z)'$$

$$=2f_X(2z)+2f_X(-2z)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(2z)^2}{2}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-2z)^2}{2}}=\sqrt{\frac{8}{\pi}}e^{-2z^2}$$

即随机变量 Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{8}{\pi}}e^{-2z^2}, & z\geqslant 0\\ 0, & z<0\end{cases}.\square$$

2.17. **解**：由题意可得 $X\sim U(1,2)$，即 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，于是设随机变量 X，Y 对应的分布函数分别为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，则当 $y\leqslant 0$ 时，$f_Y(y)=0$；当 $y>0$ 时有

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(e^{2X}\leqslant y)=P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\ln y\right)=F_X\left(\frac{1}{2}\ln y\right)$$

于是有

$$F'_Y(y)=f_Y(y)=F'_X\left(\frac{1}{2}\ln y\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\ln y\right)'=f_X\left(\frac{1}{2}\ln y\right)\cdot\frac{1}{2y}=\frac{1}{2y}$$

即随机变量 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2y}, & e^2\leqslant y\leqslant e^4\\ 0, & \text{else}\end{cases}.\square$$

注：y 的取值由 $1\leqslant\frac{1}{2}\ln y\leqslant 2$ 可得 $e^2\leqslant y\leqslant e^4$.

2.18. **解**：随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi \\ 0, & \text{else}\end{cases}$，于是设随机变量 X，Y 对应的分布函数分别为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，则当 $y\leqslant 0$ 时，$f_Y(y)=0$；当 $y>0$ 时有

$$\begin{aligned} F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\sin X\leqslant y)&=P\{0\leqslant X\leqslant \arcsin y\}\cup\{\pi-\arcsin y\leqslant X\leqslant \pi\} \\ &=P\{0\leqslant X\leqslant \arcsin y\}+P\{\pi-\arcsin y\leqslant X\leqslant \pi\} \\ &=F_X(\arcsin y)-F_X(0)+F_X(\pi)-F_X(\pi-\arcsin y) \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} F_Y'(y)=f_Y(y)&=F_X'(\arcsin y)\cdot(\arcsin y)'-F_X'(\pi-\arcsin y)\cdot(\pi-\arcsin y)' \\ &=\frac{2}{\pi^2}\cdot\arcsin y\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{2}{\pi^2}\cdot(\pi-\arcsin y)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} \end{aligned}$$

即随机变量 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1 \\ 0, & \text{else}\end{cases}.\square$$

第三章 多维随机变量及其分布

3.1. **解**：显然有 $X+Y=4$，那么有

$$P(X=2,Y=2)=\frac{C_3^2\cdot C_2^2}{C_5^4}=\frac{3}{5},\ P(X=1,Y=3)=\frac{C_3^3\cdot C_2^1}{C_5^4}=\frac{2}{5}$$

即 X 和 Y 的联合分布律为

Y/X	1	2	$P(Y=j)$
2	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
3	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
$P(X=i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

.□

3.2. **解**：X 可能的取值为 0，1，2，3；Y 可能的取值为 1，3；则 X 和 Y 的联合分布律和边缘分布律为

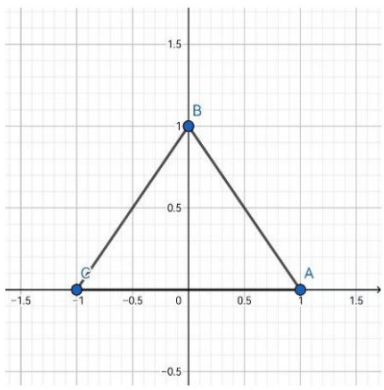
Y/X	0	1	2	3	$P(Y=j)$
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$P(X=i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

.□

3.3. **解**：(1)设三角形区域为 S，因为二维随机变量 (X,Y) 服从均匀分布，则 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in S\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

其图像如下



(2)设 X 和 Y 各自的边缘概率密度函数为 $f_X(x)$，$f_Y(y)$. 则当 $|x|>1$ 时，$f_X(x)=0$；当 $-1\leq x<0$ 时有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(x,y)\in S}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{x+1}\mathrm{d}y=x+1$$

当$0\leqslant x\leqslant 1$时有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(x,y)\in S}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{-x+1}\mathrm{d}y=-x+1$$

即X的边缘概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0\\ -x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

当$y<0$，$y>1$时，$f_Y(y)=0$；当$0\leqslant y\leqslant 1$时有

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{(x,y)\in S}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{y-1}^{1-y}\mathrm{d}x=(1-y)-(y-1)=2-2y$$

即Y的边缘概率密度函数为

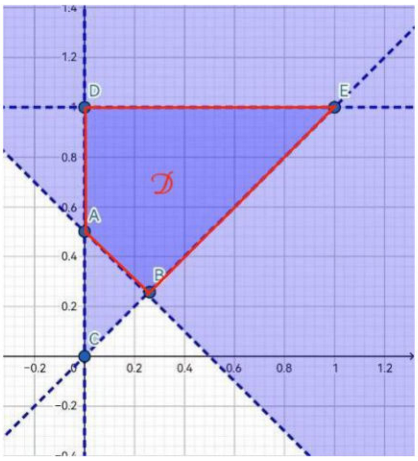
$$f_Y(y)=\begin{cases}2-2y, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}.\square$$

3.4. **解**：(1)因为$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y kxy\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{2}ky^3\mathrm{d}y=\frac{1}{8}k$，即$k=8$.

(2)注意到

$$P\left(X+Y>\frac{1}{2}\right)=P\{(x,y)\in \mathrm{D}\}=1-\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_0^y 8xy\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{1}{2}-y}8xy\,\mathrm{d}x$$

$$=1-\frac{1}{256}-\frac{5}{768}=\frac{95}{96}$$



(3)设X和Y各自的边缘概率密度函数为$f_X(x)$，$f_Y(y)$. 则当$x<0$，$x>1$时，$f_X(x)=0$；

当$0\leqslant x\leqslant 1$时有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(x,y)\in S}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_x^1 8xy\,\mathrm{d}y=4x(1-x^2)$$

即X的边缘概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, \quad\quad\quad\quad \text{else}\end{cases}$$

当$y<0$，$y>1$时，$f_Y(y)=0$；当$0\leqslant y\leqslant 1$时有

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{(x,y)\in S}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^y 8xy\,\mathrm{d}x=4y^3$$

即 Y 的边缘概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, \quad\quad \text{else}\end{cases}$$

(4)当$0\leqslant y\leqslant 1$时有

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{8xy}{4y^3}=\frac{2x}{y^2}$$

即条件概率密度函数$f_{X|Y}(x|y)$为

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2x}{y^2}, 0\leqslant x\leqslant y\\ 0, \quad\quad \text{else}\end{cases}$$

当$0\leqslant x\leqslant 1$时有

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{8xy}{4x(1-x^2)}=\frac{2y}{1-x^2}$$

即条件概率密度函数$f_{Y|X}(y|x)$为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^2}, x\leqslant y\leqslant 1\\ 0, \quad\quad\quad \text{else}\end{cases}$$

(5)因为$f(x,y)=8xy$，而$f_X(x)f_Y(y)=4x(1-x^2)\cdot 4y^3=16x(1-x^2)y^3$，因此不独立.□

3.5. **解**：二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为$f(x,y)=\mathrm{A}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}$，注意到

$$\begin{aligned}1&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y=\mathrm{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2-x^2}\mathrm{d}y\\&=-\mathrm{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}(x-y)\xlongequal{t=x-y}\mathrm{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\mathrm{A}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

即$\mathrm{A}=\dfrac{1}{\pi}$，那么联合概率密度函数为$f(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}$，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$. 而

$$\begin{aligned}f_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2-x^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}y\\&=-\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}(x-y)\xlongequal{t=x-y}\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}\end{aligned}$$

因此有

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2}，(x,y)\in\mathbb{R}^2.\square$$

3.6. **解**：(1)设 X 和 Y 各自的边缘概率密度函数为 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，则

$$f_X(x)=\begin{cases}1, x\in[0，1]\\0, \quad \text{else}\end{cases}；f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, y>0\\0, \quad \text{else}\end{cases}$$

因为随机变量 X 和 Y 相互独立，则 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}},$$

即

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, 0\leqslant x\leqslant 1，y>0\\0, \quad \text{else}\end{cases}$$

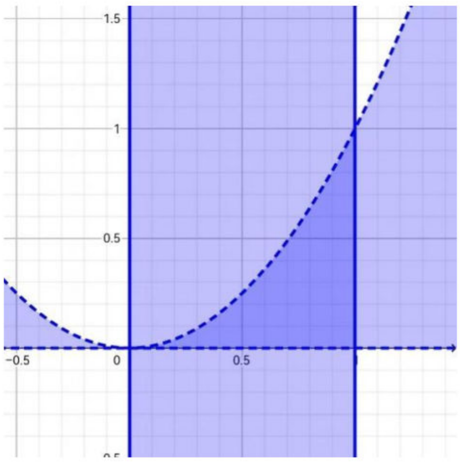
(2)方程 $a^2+2aX+Y=0$ 有实根，即 $\Delta=(2X)^2-4\cdot1\cdot Y=4X^2-4Y\geqslant0\Longleftrightarrow X^2\geqslant Y$，于是

有

$$P(X^2\geqslant Y)=P\{(x,y)\in D\}=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy=\int_0^1\left(1-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx=1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=1-\sqrt{2\pi}[\Phi(1)-\Phi(0)]=1-\sqrt{2\pi}(0.8413-0.5)=0.1445.\square$$

其图像如下



3.7. **解**：由题意可列联合分布律为

P	0.2	0.3	0.1	0.1	0	0.3
(X,Y)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
$Z_1=X+Y$	1	2	3	2	3	4
$Z_2=XY$	0	0	0	1	2	3
$Z_3=\max\{X,Y\}$	1	2	3	1	2	3
$Z_4=\min\{X,Y\}$	0	0	0	1	1	1

所以有

$Z_1=X+Y$	1	2	3	4
P	0.2	0.4	0.1	0.3

;

$Z_2=XY$	0	1	3
P	0.6	0.1	0.3

$Z_3=\max\{X,Y\}$	1	2	3
P	0.3	0.3	0.4

;

$Z_4=\min\{X,Y\}$	0	1
P	0.6	0.4

3.8. **解**：(1)假设随机变量 X 和 Y 相互独立，则

$$\begin{aligned}P(X^2=Y^2)&=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=-1)\\&=P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1)+P(X=1)P(Y=-1)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}\neq 1\end{aligned}$$

因此随机变量 X 和 Y 不独立. 由题意可列(X,Y)的联合分布律

X/Y	-1	0	1	$P(Y=j)$
0	$P(X=0,Y=-1)$	$P(X=0,Y=0)$	$P(X=0,Y=1)$	$\frac{1}{3}$
1	$P(X=1,Y=-1)$	$P(X=1,Y=0)$	$P(X=1,Y=1)$	$\frac{2}{3}$
$P(X=i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

解方程可得

$$\begin{cases}P(X=0,Y=-1)=0\ ;\ P(X=0,Y=0)=\frac{1}{3};\ P(X=0,Y=1)=0\\P(X=1,Y=-1)=\frac{1}{3}\ ;\ P(X=1,Y=0)=0;\ P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}\end{cases}$$

即(X,Y)的联合分布律为

X/Y	-1	0	1	$P(Y=j)$
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$P(X=i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

(2)由(1)可列联合分布律

P	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
(X,Y)	$(0,-1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$Z=XY$	0	0	0	-1	0	1

所以$Z=XY$的分布律为

$Z=XY$	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

.□

3.9. **解**：随机变量 X 和 Y 各个值的概率分别为

$$P(X=k)=\frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!},\ P(Y=k)=\frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!},\ k=0,1,2,\cdots$$

所以$Z=X+Y$，所以有

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}$$

$$=\lambda_2^k e^{-\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i=0}^{k}\frac{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^i}{i!\,(k-i)!}=\frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^i\cdot\frac{k!}{i!\,(k-i)!}$$

$$=\frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^i\cdot C_k^i=\frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}\cdot\left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)+1\right]^k=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}$$

(2)注意到

$$P(X=k|Z=m)=\frac{P(X=k,Z=m)}{P(Z=m)}=\frac{P(X=k,Y=m-k)}{P(Z=m)}$$

$$=\frac{P(X=k)P(Y=m-k)}{P(Z=m)}=\frac{\frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!}\cdot\frac{\lambda_2^{(m-k)}e^{-\lambda_2}}{(m-k)!}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{m!}}$$

$$=\frac{\lambda_2^m\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!\,(m-k)!}\cdot\frac{m!}{(\lambda_1+\lambda_2)^m e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}$$

$$=\frac{m!}{k!\,(m-k)!}\cdot\frac{\lambda_2^m}{(\lambda_1+\lambda_2)^m}\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k=\frac{\lambda_1^k\cdot\lambda_2^{m-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^m}C_m^k,\ k\leqslant m.\square$$

3.10. **解**：注意到

$$F_Z=P(Z\leqslant z)=\iint_{x+y\leqslant z}f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)\,dx\right]dy$$

$$\overset{x=u-y}{=\!=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z}f(u-y,y)\,du\right]dy=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u-y,y)\,dy\right]du$$

即随机变量Z的概率密度函数

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,dx$$

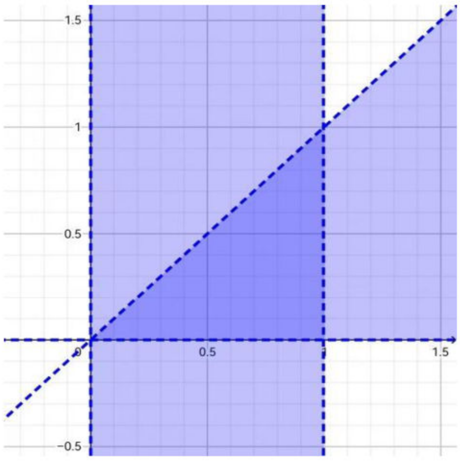
则当$z\leqslant 0$，$z\geqslant 1$时，$f_Z(z)=0$；当$0<z<1$时有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,dx=\int_0^z 24x(z-x)\,dx=24z\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^z-24\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^z=4z^3$$

即随机变量Z的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}4z^3, & 0<z<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}.\square$$

注：$0<x<1$，$0<y<1-x\Longrightarrow 0<z-x<1-x\Longrightarrow 0<x<z<1$. 其图像如下



3.11. **解**：(1)设 X 和 Y 各自的边缘概率密度函数为 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，则

$$f_X(x)=\begin{cases}1, 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, \quad \text{else}\end{cases};\ f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, y>0\\ 0, \quad \text{else}\end{cases}$$

由于 X 和 Y 相互独立，则随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度函数

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

则当 $z\leqslant 0$ 时，$f_Z(z)=0$；当 $0<z<1$ 时有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^z e^{-y}\mathrm{d}y=1-e^{-z}$$

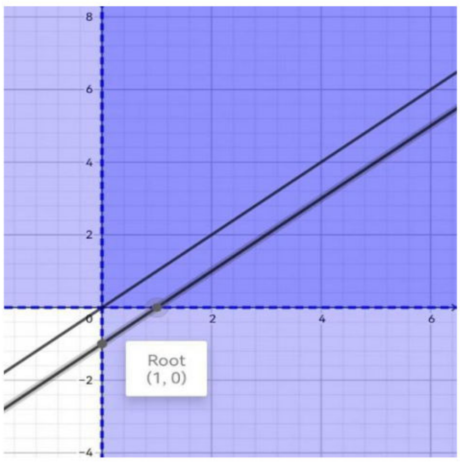
当 $z\geqslant 1$ 时有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{z-1}^z e^{-y}\mathrm{d}y=e^{1-z}-e^{-z}$$

即随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, 0<z<1\\ e^{1-z}-e^{-z}, z\geqslant 1\\ 0, \quad \text{else}\end{cases}$$

其图像如下



(2)注意到

$$F_Z=P(Z\leqslant z)=\iint_{2x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\frac{z-y}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{2x=u-y}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z}f\left(\frac{z-y}{2},y\right)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{z-y}{2},y\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u$$

即随机变量$Z=2X+Y$的概率密度函数

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{z-y}{2},y\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X\left(\frac{z-y}{2}\right)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

则当$z\leqslant 0$时，$f_Z(z)=0$；当$0<z<2$时有

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X\left(\frac{z-y}{2}\right)f_Y(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{0}^{z}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-z})$$

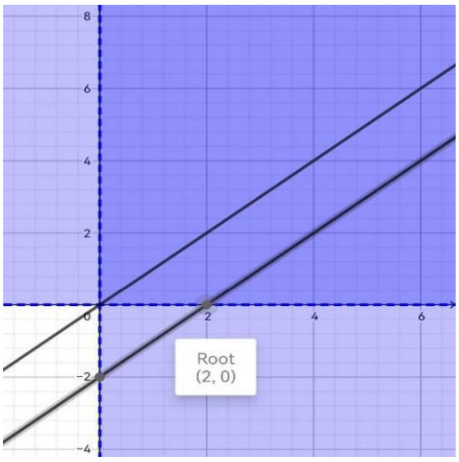
当$z\geqslant 2$时有

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X\left(\frac{z-y}{2}\right)f_Y(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{z-2}^{z}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2-z}-\mathrm{e}^{-z})$$

即随机变量$Z=2X+Y$的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-z}), 0<z<2\\ \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2-z}-\mathrm{e}^{-z}), z\geqslant 2\\ 0, \qquad \text{else}\end{cases}.\square$$

注：$0\leqslant x\leqslant 1, y>0\Longrightarrow 0\leqslant\frac{z-y}{2}\leqslant 1\Longrightarrow z-2\leqslant y\leqslant z$. 其图像如下



3.12. **解**：(X,Y)的联合概率密度函数为$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)}$，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$，注意到

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}=f_X(x)f_Y(y)$$

有$\rho=0$，即随机变量X和Y相互独立. 又因为$X\sim N(0,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(0,\sigma_2^2)$，所以

$$Z=X-Y\sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

因此有

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}},\ z\in\mathbb{R}.\square$$

(法二)

注意到

$$F_Z=P(Z\leqslant z)=\iint_{x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z+y}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{x=u+y}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z}f(u+y,y)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u+y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u$$

即随机变量$Z=X-Y$的概率密度函数

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z+y,y)\mathrm{d}y$$

因此有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z+y,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(z+y)^2}{\sigma_1^2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[(\sigma_1^2+\sigma_2^2)y^2+2z\sigma_2^2y+\sigma_2^2z^2\right]}\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[y^2+2\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}y+\frac{\sigma_2^2z^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left\{y^2+2\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}y+\left[\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]^2-\left[\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]^2+\frac{\sigma_2^2z^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left\{\left[y+\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]^2+\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2z^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}\right\}}\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[y+\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]^2-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[y+\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]^2}\mathrm{d}\left[y+\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]$$

$$\xlongequal{t=y+\frac{z\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}t^2}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{u=\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2}t}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\cdot\frac{\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\cdot\frac{\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\left(\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2}}$$

于是可得$Z=X-Y\sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$，因此有

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}},\ z\in\mathbb{R}.\square$$

3.13. **解**：相互独立的随机变量X_i的概率密度函数为$f_{X_i}(x)=\begin{cases}\theta\mathrm{e}^{-\theta x},x>0\\0,\quad\text{else}\end{cases}$；随机变量$X_i$的

概率分布函数为$F_{X_i}(x)=\begin{cases}1-e^{-\theta x}, x>0\\0, \quad\quad \text{else}\end{cases}$，于是有

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\leqslant y)=P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}\leqslant y\right)=P(X_1\leqslant y, X_2\leqslant y, \cdots, X_n\leqslant y)\\&=P(X_1\leqslant y)P(X_2\leqslant y)\cdots P(X_n\leqslant y)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leqslant y)\\&=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(y)=\prod_{i=1}^{n}(1-e^{-\theta y})=(1-e^{-\theta y})^n\end{aligned}$$

即随机变量Y的概率密度函数为

$$f_Y(y)=[F_Y(y)]'=\begin{cases}n\theta e^{-\theta y}(1-e^{-\theta y})^{n-1}, y>0\\0, \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \text{else}\end{cases}$$

而又有

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)=P\left(\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}\leqslant z\right)=1-P\left(\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}>z\right)\\&=1-P(X_1>z, X_2>z, \cdots, X_n>z)=1-P(X_1>z)P(X_2>z)\cdots P(X_n>z)\\&=1-[1-P(X_1\leqslant z)][1-P(X_1\leqslant z)]\cdots[1-P(X_1\leqslant z)]\\&=1-\prod_{i=1}^{n}[1-P(X_i\leqslant z)]=1-\prod_{i=1}^{n}[1-F_{X_i}(z)]=1-\prod_{i=1}^{n}e^{-\theta z}=1-(e^{-\theta z})^n\end{aligned}$$

即随机变量Z的概率密度函数为

$$f_Z(z)=[F_Z(z)]'=\begin{cases}n\theta e^{-n\theta z}, z>0\\0, \quad\quad\quad \text{else}\end{cases}.\square$$

第四章 随机变量的数字特征

4.1. **解**：由题目可得

P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
X	-1	0	1	2
X^2	1	0	1	4
$2X^2+3$	5	3	5	11

于是有

$$E(X)=\sum_{i=1}^{N}P_i x_i=\frac{1}{5}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{1}{10}\cdot 2=0.2$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{N}P_i x_i=\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{1}{10}\cdot 4=0.8$$

$$E(2X^2+3)=\sum_{i=1}^{N}P_i x_i=\frac{1}{5}\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{5}\cdot 5+\frac{1}{10}\cdot 11=4.6.\square$$

注：$E(2X^2+3)=2E(X^2)+3=2\cdot 0.8+3=4.6.$

4.2. **解**：随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$x\in\mathbb{R}$，于是有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-|x|}dx=0$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-|x|}dx=\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-x}dx=\int_{0}^{+\infty}x^{3-1}e^{-x}dx=\Gamma(3)=2!=2$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=2.\square$$

4.3. **解**：随机变量 X 服从几何分布，其分布律为

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\cdots,\quad 0<p<1$$

于是有

$$E(X)=\sum_{k=1}^{N}P_k x_k=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p(1-p)^{k-1}=\frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^k=\frac{p}{1-p}\sum_{k=0}^{\infty}k(1-p)^k$$

考虑级数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n$，注意到

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=x\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'$$

$$=x\cdot\frac{(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=x\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{x}{(1-x)^2},\ x\in(-1,1)$$

于是有$\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k = S(1-p) = \frac{1-p}{(1-1+p)^2} = \frac{1-p}{p^2}$，因此可得

$$E(X) = \frac{p}{1-p}\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k = \frac{p}{1-p}\cdot\frac{1-p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{N} P_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^k = \frac{p}{1-p}\sum_{k=0}^{\infty} k^2(1-p)^k$$

考虑级数$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$，注意到

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n(x^n)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} nx^n\right)' = \left(x\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}\right)' = \left(x\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'\right)'$$

$$= \left(x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'\right)' = \left(x\left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{(1-x)^2 - x\cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4} = \frac{x+1}{(1-x)^3}$$

于是有$S(x) = x\cdot\frac{x+1}{(1-x)^3} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1)$，因此可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2(1-p)^k = S(1-p) = \frac{(1-p)(1-p+1)}{(1-1+p)^3} = \frac{(1-p)(2-p)}{p^3}$$

即有

$$E(X^2) = \frac{p}{1-p}\sum_{k=0}^{\infty} k^2(1-p)^k = \frac{p}{1-p}\cdot\frac{(1-p)(2-p)}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\mathrm{D}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.\square$$

4.4. **解**：随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,1)$，且X和Y相互独立.

(1)设$Z = X-\mu\sim N(0,\sigma^2)$，于是有

$$E(|Z|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} |z|\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\left(\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

(2)注意到

$$E(\mathrm{e}^X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+(x-\mu)+\mu}\mathrm{d}(x-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+(x-\mu)}\mathrm{d}(x-\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}+t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{\mu}\cdot\sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma}-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{\sigma^2}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma}-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\cdot\sqrt{\pi}=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

(3)设$Z=X-Y\sim N(0,\sigma^2+1)$，于是有

$$E(|Z|)=\sqrt{\sigma^2+1}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\sqrt{\frac{2(\sigma^2+1)}{\pi}}$$

(4)注意到

$$\begin{aligned}
E(|Z|^2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|^2f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+1)}}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}}\mathrm{d}z\\
&=\frac{2}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+1)}}\int_0^{+\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}}\mathrm{d}z=-\frac{2}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+1)}}\cdot(\sigma^2+1)\int_0^{+\infty}z\,\mathrm{d}\left(e^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}}\right)\\
&=-\frac{2}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+1)}}\cdot(\sigma^2+1)\cdot\left[ze^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}}\mathrm{d}z\right]\\
&=\sqrt{\frac{2(\sigma^2+1)}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}}\mathrm{d}z\\
&=\sqrt{\frac{2(\sigma^2+1)}{\pi}}\cdot\sqrt{2(\sigma^2+1)}\int_0^{+\infty}e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2(\sigma^2+1)}}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{z}{\sqrt{2(\sigma^2+1)}}\right)\\
&=\frac{2(\sigma^2+1)}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{2(\sigma^2+1)}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sigma^2+1
\end{aligned}$$

于是有

$$\mathrm{D}(|Z|)=E(|Z|^2)-E^2(|Z|)=(\sigma^2+1)-\frac{2(\sigma^2+1)}{\pi}=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)(\sigma^2+1).\square$$

(法二)

注意到

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(|X-Y|)&=\mathrm{D}(|Z|)=E(|Z|^2)-E^2(|Z|)=E(Z^2)-E^2(|Z|)=\mathrm{D}(Z)+E^2(Z)-E^2(|Z|)\\
&=(\sigma^2+1)+0-\frac{2(\sigma^2+1)}{\pi}=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)(\sigma^2+1).\square
\end{aligned}$$

4.5. **解**：直接利用定义可得

$$\begin{aligned}
E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\int_0^1x\,\mathrm{d}x\int_0^xy^2\mathrm{d}y=\frac{4}{5}\\
E(Y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^xy^3\mathrm{d}y=\frac{3}{5}\\
E(XY)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\int_0^1x\,\mathrm{d}x\int_0^xy^3\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\\
E(X^2+Y^2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x^2+y^2)y^2\mathrm{d}y=\frac{16}{15}.\square
\end{aligned}$$

(法二)

注意到

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^x 12y^2\mathrm{d}y=4x^3；f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_y^1 12y^2\mathrm{d}x=12y^2(1-y)$$

于是有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 4x^4\mathrm{d}x=\frac{4}{5}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 12y^3(1-y)\mathrm{d}y=\frac{3}{5}.\square$$

4.6. **解**：设若第 i 号球放入第 i 号盒子中 $X_i=1$；若第 i 号球未放入第 i 号盒子中 $X_i=0$，

则总的配对数 X 可表示成 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，则有 $P(X_i=1)=\frac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$，于是有

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\frac{1}{n}=n\cdot\frac{1}{n}=1.\square$$

4.7. **解**：设 Y 表示检验 1 次需要调整设备的次数，于是有

$$P(Y=0)=\mathrm{C}_{10}^{1}0.9^9\cdot0.1+0.9^{10}=0.736099$$

$$P(Y=1)=1-P(Y=0)=0.263901$$

则随机变量 Y 的分布律为

Y	0	1
P	0.736099	0.263901

因此有

$$E(Y)=0\cdot0.736099+1\cdot0.263901=0.263901$$

$$E(X)=4E(Y)=4\cdot0.263901=1.0556.\square$$

4.8. **解**：设出售一台设备净盈利为 Y，则 Y 可能的取值为 100，-200，于是有

$$P(Y=100)=P(X>1)=1-P(X\leqslant1)=1-\int_{-\infty}^{1}f(x)\mathrm{d}x=1-\int_0^1\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}x$$

$$=1-\int_0^1\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{4}\right)=1-\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1-(-\mathrm{e}^{-t})\Big|_0^{\frac{1}{4}}=1-\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$$

$$P(Y=-200)=P(X\leqslant1)=\int_{-\infty}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$$

则随机变量 Y 的分布律为

Y	100	-200
P	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$	$1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$

因此有

$$E(Y)=100\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}-200\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\right)=300\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}-200=33.6(\text{元}).\square$$

4.9. **证明**：注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(X)&=E(X^2)-E^2(X)=E\{(X-\mathrm{C})^2+2\mathrm{C}X-\mathrm{C}^2\}-E^2(X)\\&=E\{(X-\mathrm{C})^2\}+2\mathrm{C}E(X)-E^2(X)-\mathrm{C}^2=E\{(X-\mathrm{C})^2\}-\{E(X)-\mathrm{C}\}^2\end{aligned}$$

因为$\mathrm{C}\neq E(X)\Longleftrightarrow\{E(X)-\mathrm{C}\}^2>0$，于是

$$\mathrm{D}(X)=E\{(X-\mathrm{C})^2\}-\{E(X)-\mathrm{C}\}^2<E\{(X-\mathrm{C})^2\}.\square$$

4.10. **解**：直接利用定义可得

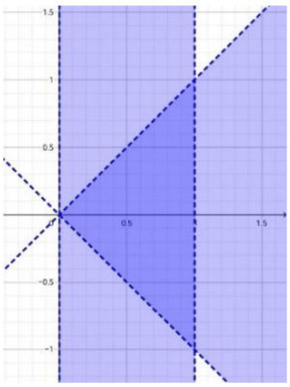
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_{-x}^{x}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_{-x}^{x}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_{-x}^{x}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.\square$$

其图像如下



4.11. **解**：(1)X和Y相互独立，于是有$E(XY)=E(X)E(Y)$；$\mathrm{D}(X+Y)=\mathrm{D}(X)+\mathrm{D}(Y)$，可得

$$E(Z)=E(5X-Y+15)=5E(X)-E(Y)+15=5\cdot 3-1+15=29$$

$$\mathrm{D}(Z)=\mathrm{D}(5X-Y+15)=5^2\mathrm{D}(X)+\mathrm{D}(Y)=5^2\cdot 4+9=109$$

(2)X和Y不相关，于是有$E(XY)=E(X)E(Y)$；$\mathrm{D}(X+Y)=\mathrm{D}(X)+\mathrm{D}(Y)$，可得

$$E(Z)=E(5X-Y+15)=5E(X)-E(Y)+15=5\cdot 3-1+15=29$$

$$\mathrm{D}(Z)=\mathrm{D}(5X-Y+15)=5^2\mathrm{D}(X)+\mathrm{D}(Y)=5^2\cdot 4+9=109$$

(3)X 和 Y 相关系数为 0.25，于是有$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{\mathrm{D}(X)}\sqrt{\mathrm{D}(Y)}=0.25\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=1.5$，可得

$$E(Z)=E(5X-Y+15)=5E(X)-E(Y)+15=5\cdot 3-1+15=29$$
$$\mathrm{D}(Z)=\mathrm{D}(5X-Y+15)=5^2\mathrm{D}(X)+\mathrm{D}(Y)-2\cdot 5\mathrm{Cov}(X,Y)=5^2\cdot 4+9-2\cdot 5\cdot 1.5=94.\square$$

4.12. **解**：直接利用定义可得

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1]$$
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},\ y\in[-1,1]$$

而

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}=\frac{4}{\pi^2}\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)},\ x^2+y^2\leqslant 1$$

于是 X 和 Y 不独立，因此有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=0$$
$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}y\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y=0$$
$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

而

$$E(XY)=E(X)E(Y)=0\Longleftrightarrow\rho_{XY}=0$$

因此 X 和 Y 不相关.□

4.13. **解**：因为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 X 和 Y 相互独立，由此可得 X 和 Y 不相关，即有$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，亦即$\rho_{XY}=0$，那么有

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)&=\mathrm{Cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)=\mathrm{Cov}(\alpha X,\alpha X-\beta Y)+\mathrm{Cov}(\beta Y,\alpha X-\beta Y)\\&=\mathrm{Cov}(\alpha X,\alpha X)-\mathrm{Cov}(\alpha X,\beta Y)+\mathrm{Cov}(\beta Y,\alpha X)-\mathrm{Cov}(\beta Y,\beta Y)\\&=\alpha^2\mathrm{Cov}(X,X)-\alpha\beta\mathrm{Cov}(X,Y)+\beta\alpha\mathrm{Cov}(Y,X)-\beta^2\mathrm{Cov}(Y,Y)\\&=\alpha^2\mathrm{Cov}(X,X)-\beta^2\mathrm{Cov}(Y,Y)=\alpha^2\mathrm{D}(X)-\beta^2\mathrm{D}(Y)\\&=\alpha^2\cdot\sigma^2-\beta^2\cdot\sigma^2=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2\end{aligned}$$

于是有

$$\mathrm{D}(Z_1)=\mathrm{D}(\alpha X+\beta Y)=\alpha^2\mathrm{D}(X)+\beta^2\mathrm{D}(Y)=\alpha^2\cdot\sigma^2+\beta^2\cdot\sigma^2=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$$
$$\mathrm{D}(Z_2)=\mathrm{D}(\alpha X-\beta Y)=\alpha^2\mathrm{D}(X)+\beta^2\mathrm{D}(Y)=\alpha^2\cdot\sigma^2+\beta^2\cdot\sigma^2=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$$
$$\rho_{Z_1Z_2}=\frac{\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)}{\sqrt{\mathrm{D}(Z_1)}\cdot\sqrt{\mathrm{D}(Z_2)}}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}\cdot\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.\square$$

注：二维正态随机变量(X,Y)，X 和 Y 相互独立的充要条件是参数$\rho_{XY}=0$.

4.14. **解**：随机变量 X 和 Y 的分布律分别为

$$\begin{array}{c|c|c} X & 0 & 1 \\ \hline P & 1-P(\mathrm{A}) & P(\mathrm{A}) \end{array}\ ;\ \begin{array}{c|c|c} Y & 0 & 1 \\ \hline P & 1-P(\mathrm{B}) & P(\mathrm{B}) \end{array}$$

即二维随机变量(X,Y)的混合分布律为

Y/X	0	1	$P(Y=j)$
0	$P\left(\overline{\mathrm{AB}}\right)$	$P\left(\mathrm{A}\bar{\mathrm{B}}\right)$	$1-P(\mathrm{B})$
1	$P\left(\bar{\mathrm{A}}\mathrm{B}\right)$	$P(\mathrm{AB})$	$P(\mathrm{B})$
$P(X=i)$	$1-P(\mathrm{A})$	$P(\mathrm{A})$	1

那么随机变量$Z=XY$分布律为

$Z=XY$	0	1
P	$P\left(\overline{\mathrm{AB}}\right)+P\left(\mathrm{A}\bar{\mathrm{B}}\right)+P\left(\bar{\mathrm{A}}\mathrm{B}\right)$	$P(\mathrm{AB})$

于是有

$$E(X)=P(\mathrm{A})；E(Y)=P(\mathrm{B})；E(XY)=P(\mathrm{AB})$$
$$\mathrm{D}(X)=P(\mathrm{A})[1-P(\mathrm{A})]；\mathrm{D}(Y)=P(\mathrm{B})[1-P(\mathrm{B})]$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=P(\mathrm{AB})-P(\mathrm{A})P(\mathrm{B})$$

则 X 和 Y 的相关系数为

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}\cdot\sqrt{\mathrm{D}(Y)}}=\frac{P(\mathrm{AB})-P(\mathrm{A})P(\mathrm{B})}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}\cdot\sqrt{\mathrm{D}(Y)}}=0$$

由此我们可以得到

$$P(\mathrm{AB})=P(\mathrm{A})P(\mathrm{B})$$

即事件 A 和事件 B 相互独立，即 X 和 Y 相互独立.□

补充题目 4.1. 若$X\sim N(0,\sigma^2)$，求$|X|$，X^2的期望.

解：因为$X\sim N(0,\sigma^2)$，于是随机变量 X 的概率密度函数为

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$，$x\in\mathbb{R}$，那么有

$$E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$
$$=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$
$$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\overset{u=t^2}{=\!=}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_0^{+\infty}u^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_0^{+\infty}u^{\frac{3}{2}-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\cdot\sqrt{\pi}=\sigma^2.\square$$

注： $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$，$x\in(0,1)\Longrightarrow\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\pi}$.

补充题目 4.2. 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $(X-\mu)$，$|X-\mu|$，$\mathrm{e}^{X-\mu}$，$(X-\mu)^2$ 的期望.

解： 随机变量 $Y=X-\mu\sim N(0,\sigma^2)$ 的概率密度函数为 $f(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$，$y\in\mathbb{R}$，即有

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}y\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y=0$$
$$E(|Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}y\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y$$
$$=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\left(\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E(\mathrm{e}^Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^y f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{\sigma^2}{2}}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)\overset{t=\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}\cdot\sqrt{\pi}=\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}$$
$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\mathrm{e}^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$
$$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\overset{u=t^2}{=\!=}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_0^{+\infty}u^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_0^{+\infty}u^{\frac{3}{2}-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\cdot\sqrt{\pi}=\sigma^2.\square$$

补充题目 4.3. 若 X，$Y\sim N(0,1)$，求 $\sqrt{X^2+Y^2}$ 的期望.

解： 因为 X，$Y\sim N(0,1)$，有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

于是有

$$E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\,dy \xlongequal[y=\rho\sin\theta]{x=\rho\cos\theta} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\rho^2\cdot e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\rho\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\square$$

注： $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\sqrt{2\pi}\sigma^3 \Longleftrightarrow \int_0^{+\infty}x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma^3.$

补充题目 4.4. 若 $X\sim N(\mu,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma_2^2)$，且 X 和 Y 相互独立，求 $D(|X-\mu|)$ 以及 $D(|X-Y|)$.

解： 因为 $X\sim N(\mu,\sigma_1^2)$，有 $Z=X-\mu\sim N(0,\sigma_1^2)$，于是有

$$E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f(z)dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}|z|e^{-\frac{z^2}{2\sigma_1^2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_0^{+\infty}z\,e^{-\frac{z^2}{2\sigma_1^2}}dz$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\cdot\sigma_1^2\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2\sigma_1^2}}d\left(\frac{z^2}{2\sigma_1^2}\right)=\frac{2\sigma_1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=\sigma_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E(|Z|^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}z^2f(z)dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2\sigma_1^2}}dz=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sigma_1^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma_1}\right)^2e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma_1}\right)^2}d\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma_1}\right)$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sigma_1^2\int_0^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt \xlongequal{u=t^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma_1^2\int_0^{+\infty}u^{\frac{1}{2}}e^{-u}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma_1^2\int_0^{+\infty}u^{\frac{3}{2}-1}e^{-u}du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma_1^2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma_1^2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma_1^2\cdot\sqrt{\pi}=\sigma_1^2$$

$$D(|Z|)=E(|Z|^2)-E^2(|Z|)=\sigma_1^2-\frac{2}{\pi}\sigma_1^2=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\sigma_1^2$$

又因为 $X\sim N(\mu,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma_2^2)$ 且 X 和 Y 相互独立，有 $Z=X-Y\sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$，于是有

$$E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f(z)dz=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E(|Z|^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|^2f(z)dz=\sigma_1^2+\sigma_2^2$$

$$D(|Z|)=E(|Z|^2)-E^2(|Z|)=\sigma_1^2+\sigma_2^2-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\frac{2}{\pi}=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)(\sigma_1^2+\sigma_2^2).\square$$

第五章 大数定律及中心极限定理

5.1. **解**：(1)设设随机变量 X 表示误差，则 $X\sim U(-0.5,0.5)$，于是有

$$E(X)=0;\ \mathrm{D}(X)=\frac{(0.5+0.5)^2}{12}=\frac{1}{12}$$

由题目可知每个误差之间相互独立且同分布，由中心极限定理可得

$$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}{\sqrt{\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-nE(X)}{\sqrt{n\mathrm{D}(X)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\sim N(0,1)$$

当 n 充分大的时候有

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}X_k\right|>15\right)=1-P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}X_k\right|\leqslant 15\right)=1-P\left(\frac{-15}{\sqrt{\frac{1500}{12}}}\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{1500}X_k}{\sqrt{\frac{1500}{12}}}\leqslant\frac{15}{\sqrt{\frac{1500}{12}}}\right)$$

$$=1-P\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{1500}X_k}{\sqrt{\frac{1500}{12}}}\leqslant\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\approx 1-\left[\Phi\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)-\Phi\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\right]$$

$$=2-2\Phi(1.34)=2-2\cdot 0.9099=0.1802$$

(2)即要求满足 $P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}X_k\right|<10\right)>0.9$ 条件下 n 的最大值，则

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}X_k\right|<10\right)=P\left(-10<\sum_{k=1}^{n}X_k<10\right)=P\left(-\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}<\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k}{\sqrt{\frac{n}{12}}}<\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)$$

$$\approx\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)-\Phi\left(-\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)=2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)-1>0.9$$

于是有

$$\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)>0.95=\Phi(1.645)\Longleftrightarrow\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}>1.645\Longleftrightarrow n<443.45$$

综上 $n_{\max}=443$，即最多可有 443 个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.9 .□

5.2. **解**：设随机变量 X 表示一个电话分机是否需要使用外线，则 $X\sim B(1,0.05)$，于是有

$$E(X)=1\cdot 0.05=0.05;\ \mathrm{D}(X)=1\cdot 0.05\cdot 0.95=0.0475$$

由题目可知每个电话分机是否需要使用外线相互独立且同分布，由中心极限定理可得

$$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}{\sqrt{\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-nE(X)}{\sqrt{n\mathrm{D}(X)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-0.05n}{\sqrt{0.0475n}}\sim N(0,1)$$

当 n 充分大的时候，设总机需要的外线的个数为 N，则要求满足 $P\left(\sum_{k=1}^{n}X_k<N\right)\geqslant 0.9$ 条件下 N 的最小值，则

$$\begin{aligned}P\left(\sum_{k=1}^{n}X_k<N\right)&=P\left(\frac{\sum_{k=1}^{200}X_k-0.05\cdot 200}{\sqrt{0.0475\cdot 200}}<\frac{N-0.05\cdot 200}{\sqrt{0.0475\cdot 200}}\right)\\&=P\left(\frac{\sum_{k=1}^{200}X_k-10}{\sqrt{9.5}}<\frac{N-10}{\sqrt{9.5}}\right)\approx\Phi\left(\frac{N-10}{\sqrt{9.5}}\right)\geqslant 0.9\end{aligned}$$

于是有

$$\Phi\left(\frac{N-10}{\sqrt{9.5}}\right)\geqslant 0.9=\Phi(1.28)\Longleftrightarrow\frac{N-10}{\sqrt{9.5}}\geqslant 1.28\Longleftrightarrow N\geqslant 13.945$$

综上 $N_{\min}=14$，即总机需要 14 条外线才能以不低于 90%的概率保证每个分机要使用外线时可供使用.□

5.3. **解**：因为

$$Y=X_1\cdot X_2\cdot\cdots\cdots X_{100}\Longleftrightarrow \ln Y=\ln X_1+\ln X_2+\cdots\cdots+\ln X_{100}$$

于是随机变量 $\ln X_1$，$\ln X_2$，$\cdots$，$\ln X_{100}$ 相互独立且同分布，则有

$$\begin{aligned}&E(\ln X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\ln x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x=x(\ln x-1)|_0^1=-1\\&E[(\ln X)^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}\ln^2 x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln^2 x\,\mathrm{d}x=x\ln^2 x|_0^1-\int_0^1 x\,\mathrm{d}(\ln^2 x)\\&\qquad=-2\int_0^1 x\cdot\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=-2\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x=-2\cdot(-1)=2\\&\mathrm{D}(\ln X)=E[(\ln X)^2]-[E(\ln X)]^2=2-(-1)^2=1\end{aligned}$$

由中心极限定理可得

$$Z_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln X_k-E\left(\sum_{k=1}^{n}\ln X_k\right)}{\sqrt{\mathrm{D}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln X_k\right)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln X_k-nE(\ln X)}{\sqrt{n\mathrm{D}(\ln X)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln X_k+n}{\sqrt{n}}=\frac{\ln Y_n+n}{\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

当n充分大的时候有

$$P(Y<10^{-40})=P(\ln Y<\ln 10^{-40})=P(\ln Y<-40\ln 10)=P\left(\frac{\ln Y+100}{\sqrt{100}}<\frac{-40\ln 10+100}{\sqrt{100}}\right)$$

$$=P\left(\frac{\ln Y+100}{\sqrt{100}}<0.79\right)\approx\Phi(0.79)=0.7852.\square$$

5.4. **证明**：设随机变量$X\sim\pi(1)$，则有$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\pi(n)$，于是有

$$E(X)=\lambda=1;\ \mathrm{D}(X)=\lambda=1$$

由中心极限定理可得

$$Z_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{\sqrt{\mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-nE(X)}{\sqrt{n\mathrm{D}(X)}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}=\frac{Y_n-n}{\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

当n充分大的时候有

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}=P(Y_n\leqslant n)=P\left(\frac{Y_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{n-n}{\sqrt{n}}\right)=P\left(\frac{Y_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant 0\right)\approx\Phi(0)=\frac{1}{2}.\square$$

第六章 样本及抽样分布

6.1. **解**：(1)因为$X\sim N(3.4,\ 6^2)$，样本容量为n，于是有

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N\left(3.4,\ \frac{6^2}{n}\right)$$

(2)即要求$P\left(1.4<\overline{X}<5.4\right)\geqslant 0.95$，则有

$$\begin{aligned}P\left(1.4<\overline{X}<5.4\right)&=P\left(\frac{1.4-3.4}{\frac{6}{\sqrt{n}}}<\frac{\overline{X}-3.4}{\frac{6}{\sqrt{n}}}<\frac{5.4-3.4}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\right)\\&=P\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}<\frac{\overline{X}-3.4}{\frac{6}{\sqrt{n}}}<\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\approx\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\\&=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-1\geqslant 0.95\end{aligned}$$

于是有

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\geqslant 0.975=\Phi(1.96)\Longleftrightarrow\frac{\sqrt{n}}{3}\geqslant 1.96\Longleftrightarrow n\geqslant 34.5744$$

综上$n_{\min}=35$.□

6.2. **解**：(1)注意到

$$\begin{aligned}D(Y_i)&=D\left(X_i-\overline{X}\right)=D\left(X_i-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=D\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X_i-\frac{1}{n}\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n}X_k\right]\\&=D\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X_i\right]+D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n}X_k\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2D(X_i)+\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n}X_k\right)\\&=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2D(X_i)+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n}D(X_k)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2D(X_i)+\frac{1}{n^2}\cdot(n-1)D(X_i)\\&=\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\end{aligned}$$

(法二)

$$\begin{aligned}D(Y_i)&=D\left(X_i-\overline{X}\right)=D(X_i)+D\left(\overline{X}\right)-2\operatorname{Cov}\left(X_i,\overline{X}\right)\\&=D(X_i)+D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)-2\operatorname{Cov}\left(X_i,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\\&=D(X_i)+\frac{1}{n^2}\cdot nD(X_i)-2\operatorname{Cov}\left(X_i,\frac{1}{n}X_i\right)\\&=D(X_i)+\frac{1}{n}D(X_i)-\frac{2}{n}\operatorname{Cov}(X_i,X_i)=1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n}=\frac{n-1}{n}\end{aligned}$$

(2)因为$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$，于是有

$$\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right] = \mathrm{D}[(n-1)S^2] = \sigma^4 \mathrm{D}\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = \sigma^4 \cdot 2(n-1) = 2(n-1)\sigma^4 = 2(n-1)$$

(3)注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_1, Y_n) &= \mathrm{Cov}\left(X_1 - \overline{X}, X_n - \overline{X}\right) = \mathrm{Cov}(X_1, X_n) - \mathrm{Cov}\left(X_1, \overline{X}\right) - \mathrm{Cov}\left(\overline{X}, X_n\right) + \mathrm{Cov}\left(\overline{X}, \overline{X}\right) \\ &= \mathrm{Cov}\left(\overline{X}, \overline{X}\right) - \mathrm{Cov}\left(X_1, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) - \mathrm{Cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, X_n\right) \\ &= \mathrm{Cov}\left(\overline{X}, \overline{X}\right) - \mathrm{Cov}\left(X_1, \frac{1}{n}X_1\right) - \mathrm{Cov}\left(\frac{1}{n}X_n, X_n\right) \\ &= \mathrm{D}\left(\overline{X}\right) - \frac{1}{n}\mathrm{D}(X_1) - \frac{1}{n}\mathrm{D}(X_n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}.\square\end{aligned}$$

6.3. **解**：直接利用定义可得

$$E\left(\overline{X}\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$

$$\mathrm{D}\left(\overline{X}\right) = \mathrm{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E(X_i^2) = \mathrm{D}(X_i) + E^2(X_i) = \sigma^2 + \mu^2；\ E\left(\overline{X}^2\right) = \mathrm{D}\left(\overline{X}\right) + E^2\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

$$\begin{aligned}E(S^2) &= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}^2\right)\right] = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - \frac{n}{n-1}E\left(\overline{X}^2\right) = \frac{1}{n-1} \cdot n(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = \sigma^2.\square\end{aligned}$$

6.4. **解**：(1)因为$X \sim N(0,4)$，于是有$X_1 - 2X_2 \sim N(0,20)$；$3X_3 - 4X_4 \sim N(0,100)$，即可得

$$Y = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2 = 20a\left(\frac{X_1 - 2X_2}{\sqrt{20}}\right)^2 + 100b\left(\frac{3X_3 - 4X_4}{\sqrt{100}}\right)^2 \sim \chi^2(2)$$

于是利用$20a = 1$；$100b = 1$可得$a = \dfrac{1}{20}$，$b = \dfrac{1}{100}$，自由度$n = 2$.

(2)因为$X \sim N(0,4)$，于是有$\sum_{i=1}^{10}\left(\dfrac{X_i}{2}\right)^2 \sim \chi^2(10)$；$\sum_{i=11}^{15}\left(\dfrac{X_i}{2}\right)^2 \sim \chi^2(5)$，即可得

$$Y = \frac{X_1^2 + \cdots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \cdots + X_{15}^2)} = \frac{\dfrac{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10} X_i^2}{10}}{\dfrac{\frac{1}{4}\sum_{i=11}^{15} X_i^2}{5}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{10} X_i^2}{10}}{\dfrac{\sum_{i=11}^{15} X_i^2}{5}} \sim F(10,5).\square$$

(3)设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$Y_1 - Y_2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i - \frac{1}{3}\sum_{i=7}^{9} X_i \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2}\right) \Longleftrightarrow \frac{Y_1 - Y_2}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}} \sim N(0,1)$$

$$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \Longleftrightarrow \frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$$

又因为Y_1，Y_2，S^2相互独立，即

$$Z = \frac{c(Y_1 - Y_2)}{S} = \frac{c\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}} \cdot \left(\frac{Y_1 - Y_2}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2S^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{2}}} = \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\left(\frac{Y_1 - Y_2}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}}\right)}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}} \sim t(n)$$

因此有$c = \sqrt{2}$，$n = 2$.□

6.5. **解**：因为$X \sim t(n)$，设$X = \dfrac{T}{\sqrt{\frac{Z}{n}}}$，其中$T \sim N(0,1)$，$Z \sim \chi^2(n)$，于是有$T^2 \sim \chi^2(1)$，则

$$Y = X^2 = \frac{T^2}{\frac{Z}{n}} = \frac{\frac{T^2}{1}}{\frac{Z}{n}} \sim F(1,n).\square$$

6.6. **解**：因为$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，于是有

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Longleftrightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1),\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

则有

$$Y = \frac{\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2 \cdot (n-1)}}} = \frac{\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}{\frac{S}{\sigma}} = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - \mu}{S} \sim t(n-1)$$

即有

$$P\left(\overline{X} > \mu + kS\right) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{S} > k\right) = P\left(\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - \mu}{S} > \sqrt{n}\,k\right) \Longleftrightarrow P(Y > 4k) = 0.95$$

于是有

$$4k = t_{0.95}(15) \Longleftrightarrow k = \frac{1}{4}t_{0.95}(15) = -\frac{1}{4}t_{0.05}(15) = -\frac{1}{4} \cdot 1.7531 = -0.438275.\square$$

第七章 参数估计

7.1. **解**：(1)**矩估计**：注意到

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x;\ \theta)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}(\theta+1)x^{\theta+1}\mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

因此有

$$\hat{\theta}=\frac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}=\frac{1-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1}=\frac{n-2\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sum_{i=1}^{n}X_i-n}$$

(2)**最大似然估计**：注意到$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\ \theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}$，有

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

因此有

$$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1.\square$$

7.2. **解**：(1)**矩估计**：

$$E(X)=1,\ \mathrm{D}(X)=\sigma^2;\ E(X^2)=\mathrm{D}(X)+E^2(X)=\sigma^2+1$$

因此有

$$\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-1$$

(2)**最大似然估计**：注意到$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\ \sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-1)^2}{2\sigma^2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-1)^2}{2\sigma^2}}$，

有

$$\ln L(\sigma)=-n\ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left[\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-1)^2}{2\sigma^2}}\right]=-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2-n\ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\ln L(\sigma)=\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2-\frac{n}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\sqrt{2\pi}=\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2-\frac{n}{\sigma}=0$$

因此有

$$\widehat{\sigma_2}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2$$

(3)注意到

$$E\left(\widehat{\sigma_1}^2\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-1\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-1=E(X^2)-1=\sigma^2+1-1=\sigma^2$$

$$E\left(\widehat{\sigma_2}^2\right)=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[(X_i-1)^2]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2-2X_i+1)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[E(X_i^2)-2E(X_i)+1]=E(X^2)-2E(X)+1=\sigma^2+1-2\cdot1+1=\sigma^2$$

因此$\widehat{\sigma_1}^2$，$\widehat{\sigma_2}^2$均是无偏估计.□

7.3. **解**：(1)因为$X\sim\pi(\lambda)$，于是$P(X=x;\lambda)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$，注意到

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}P(X=x_i;\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}e^{-\lambda}}{x_i!}=e^{-n\lambda}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$\ln L(\lambda)=-n\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\right)=-n\lambda+\sum_{i=1}^{n}[\ln(\lambda^{x_i})-\ln(x_i!)]=-n\lambda+\ln\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)$$

即

$$\frac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda)=-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0$$

因此有

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=\frac{1}{5}(1+2+3+3+1)=2$$

(2)因为$P(X=0;\lambda)=\dfrac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}=e^{-\lambda}$，于是$\widehat{P}(X=0;\lambda)=e^{-\hat{\lambda}}=e^{-2}$.□

7.4. **解**：(1)直接计算可得

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{(\mu-\ln x)^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{(\mu-\ln x)^2}{2}}dx$$

$$\xlongequal{t=\ln x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\mu-t)^2}{2}}\cdot e^t dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\mu-t)^2}{2}+t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{[t-(\mu+1)]^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{[t-(\mu+1)]^2}{2}}d[t-(\mu+1)]\xlongequal{u=t-(\mu+1)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}d\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\xlongequal{x=\frac{u}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=e^{\mu+\frac{1}{2}}$$

(2)**矩估计**：由(1)可知$E(X)=e^{\mu+\frac{1}{2}}$，因此有

$$\hat{\mu}=\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)-\frac{1}{2}$$

(3)注意到$L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\ \mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x_i}\mathrm{e}^{-\frac{(\mu-\ln x_i)^2}{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\mathrm{e}^{-\frac{(\mu-\ln x_i)^2}{2}}$，有

$$\ln L(\mu)=-n\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left[\frac{1}{x_i}\mathrm{e}^{-\frac{(\mu-\ln x_i)^2}{2}}\right]=-n\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mu-\ln x_i)^2$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\ln L(\mu)=-\sum_{i=1}^{n}(\mu-\ln x_i)=-n\mu+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

因此有

$$\bar{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$$

(4)注意到

$$E\left(\bar{\mu}\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\ln X_i)=E(\ln X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\ln x f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{e}^{-\frac{(\mu-\ln x)^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\ln x\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(\mu-\ln x)^2}{2}}\mathrm{d}(\ln x)$$

$$\xlongequal{t=\ln x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(\mu-t)^2}{2}}\mathrm{d}t\xlongequal{u=t-\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(u+\mu)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=\mu$$

因此$\bar{\mu}$是μ的无偏估计.□

7.5. **解：(1)矩估计：**

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\theta}\frac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{6}{\theta^3}\int_{0}^{\theta}(-x^3+\theta x^2)\mathrm{d}x=\frac{\theta}{2}$$

因此有

$$\hat{\theta}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

(2)直接计算即可，因为

$$\mathrm{D}\left(\hat{\theta}\right)=\mathrm{D}\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}(X_i)=\frac{4}{n^2}\cdot n\cdot\mathrm{D}(X)=\frac{4}{n}\mathrm{D}(X)$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\theta}\frac{6x^3}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{6}{\theta^3}\int_{0}^{\theta}(-x^4+\theta x^3)\mathrm{d}x=\frac{3\theta^2}{10}$$

即

$$D(\hat{\theta})=\frac{4}{n}D(X)=\frac{4}{n}[E(X^2)-E^2(X)]=\frac{4}{n}\left(\frac{3\theta^2}{10}-\frac{\theta^2}{4}\right)=\frac{\theta^2}{5n}.\square$$

7.6. **解：(1)矩估计：**注意到

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x\xlongequal{t=\frac{x-\mu}{\theta}}\int_0^{+\infty}(\theta t+\mu)e^{-t}\mathrm{d}t$$

$$=\theta\int_0^{+\infty}te^{-t}\mathrm{d}t+\mu\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t=\theta[-(t+1)e^{-t}|_0^{+\infty}]+\mu(-e^{-t}|_0^{+\infty})=\theta+\mu$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x=-\int_{\mu}^{+\infty}x^2\mathrm{d}\left(e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\right)$$

$$=-\left(x^2e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\Big|_{\mu}^{+\infty}\right)+\int_{\mu}^{+\infty}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}(x^2)=\mu^2+2\theta\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x=\mu^2+2\theta(\theta+\mu)$$

因此有

$$\begin{cases}\overline{X}=\theta+\mu\\ \overline{X^2}=\mu^2+2\theta(\theta+\mu)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\hat{\mu}=\overline{X}-\sqrt{\overline{X^2}-\overline{X}^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}\\ \hat{\theta}=\sqrt{\overline{X^2}-\overline{X}^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}\end{cases}$$

(2)最大似然估计：注意到$L(\theta,\mu)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta,\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i-\mu}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n}e^{-\frac{x_i-\mu}{\theta}}$，有

$$\ln L(\theta,\mu)=-n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(e^{-\frac{x_i-\mu}{\theta}}\right)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\mu}{\theta}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta,\mu)=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n\mu}{\theta^2}=0$$

因此有

$$\hat{\theta}+\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

即

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\theta,\mu)=\frac{n}{\theta}>0$$

方程无解，即取

$$\begin{cases}\hat{\mu}=\min\{X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n\}\\ \hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\min\{X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n\}\end{cases}.\square$$

7.7. **解**：(1)**矩估计**：注意到

$$E(X)=1\cdot\theta^2+2\cdot 2\theta(1-\theta)+3\cdot(1-\theta)^2=3-2\theta$$

因此有

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{2}\left[3-\frac{1}{4}(1+1+3+3)\right]=\frac{1}{2}$$

最大似然估计：注意到$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(X=x_i)=\theta^2\cdot\theta^2\cdot(1-\theta)^2\cdot(1-\theta)^2=\theta^4(1-\theta)^4$，有

$$\ln L(\theta)=4\ln\theta+4\ln(1-\theta)\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=\frac{4}{\theta}-\frac{4}{1-\theta}=\frac{4(1-2\theta)}{\theta(1-\theta)}=0$$

因此有

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2}$$

(2)因为

$$\begin{aligned}E(N)=E\left(\sum_{i=1}^{3}a_iN_i\right)&=\sum_{i=1}^{3}a_iE(N_i)=a_1E(N_1)+a_2E(N_2)+a_3E(N_3)\\&=a_1\cdot 4\cdot\theta^2+a_2\cdot 4\cdot 2\theta(1-\theta)+a_3\cdot 4\cdot(1-\theta)^2\\&=4(a_1-2a_2+a_3)\theta^2+8(a_2-a_3)\theta+4a_3=\theta\end{aligned}$$

比较系数可得

$$\begin{cases}a_1-2a_2+a_3=0\\a_2-a_3=\dfrac{1}{8}\\a_3=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{4}\\a_2=\dfrac{1}{8}\\a_3=0\end{cases}.\square$$

7.8. **解**：(1)**矩估计**：注意到

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\ \theta)\mathrm{d}x=\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Big|_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}}=\theta$$

因此有

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

(2)**最大似然估计**：注意到$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\ \theta)=\prod_{i=1}^{n}1=1\equiv\text{Const}$，又因为

$$\begin{cases} x_i \geqslant \theta - \frac{1}{2} \\ x_i \leqslant \theta + \frac{1}{2} \end{cases}$$

恒成立，因此

$$\max\{X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n\}-\frac{1}{2}\leqslant\hat{\theta}\leqslant\min\{X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n\}+\frac{1}{2}$$

即

$$\hat{\theta}\in\left[\max\{X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n\}-\frac{1}{2},\ \min\{X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n\}+\frac{1}{2}\right].\square$$

7.9. **解**：(1)因为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Y=X_1-\mu\sim N(0,\sigma^2)$，于是有

$$E\left(\bar{\sigma}\right)=E\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}|X_1-\mu|\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}E(|X_1-\mu|)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}E(|Y|)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma}\int_0^{+\infty}x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\sigma\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\xlongequal{t=\frac{x^2}{2\sigma^2}}\sigma\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\sigma$$

因此$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}|X_1-\mu|$是$\sigma$的无偏估计.

(2)注意到

$$E\left(\hat{\sigma}\right)=E\left(k\sum_{i=1}^n|X_i-\mu|\right)=kE\left(\sum_{i=1}^n|X_i-\mu|\right)=k\sum_{i=1}^nE(|X_i-\mu|)=k\cdot n\cdot E(|X-\mu|)$$

$$=nk\cdot E(|X_1-\mu|)=nk\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma=\sigma$$

因此

$$k=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

下面比较$\bar{\sigma}$，$\hat{\sigma}$的有效性，即比较$\mathrm{D}\left(\bar{\sigma}\right)$，$\mathrm{D}\left(\hat{\sigma}\right)$，则

$$\mathrm{D}\left(\bar{\sigma}\right)=\mathrm{D}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}|X_1-\mu|\right)=\frac{\pi}{2}\mathrm{D}(|X_1-\mu|)=\frac{\pi}{2}\mathrm{D}(|Y|)=\frac{\pi}{2}[E(|Y|^2)-E^2(|Y|)]$$

$$=\frac{\pi}{2}[E((Y)^2)-E^2(|Y|)]=\frac{\pi}{2}[\mathrm{D}(Y)+E^2(Y)-E^2(|Y|)]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\sigma^2+0-\frac{2}{\pi}\sigma^2\right)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\sigma^2=\left(\frac{2}{\pi}-1\right)\sigma^2$$

$$\mathrm{D}\left(\hat{\sigma}\right)=\mathrm{D}\left(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^n|X_i-\mu|\right)=\frac{\pi}{2n^2}\mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^n|X_i-\mu|\right)=\frac{\pi}{2n^2}\sum_{i=1}^n\mathrm{D}(|X_i-\mu|)$$

$$=\frac{\pi}{2n^2}\cdot n\cdot\mathrm{D}(|X-\mu|)=\frac{\pi}{2n}\mathrm{D}(|X_1-\mu|)=\frac{\pi}{2n}\mathrm{D}(|Y|)=\frac{\pi}{2n}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\sigma^2=\frac{1}{n}\left(\frac{2}{\pi}-1\right)\sigma^2$$

因为$n\geqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{n}\left(\frac{2}{\pi}-1\right)\sigma^2\leqslant\left(\frac{2}{\pi}-1\right)\sigma^2 \Longleftrightarrow \mathrm{D}\left(\hat{\sigma}\right)\leqslant \mathrm{D}\left(\bar{\sigma}\right)$，即$\hat{\sigma}$比$\bar{\sigma}$更加有效.□

7.10. **解**：通过样本总体可求得

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=2.125，S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X}-X_i\right)^2}=0.01713，\alpha=0.1$$

(1)因为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，于是$Y=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$，$z_{0.05}=1.645$，$\sigma=0.01$，则有

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

μ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$，即置信区间为

$$\left(2.125-\frac{0.01}{\sqrt{16}}\cdot 1.645,2.125+\frac{0.01}{\sqrt{16}}\cdot 1.645\right)=(2.121,2.129).□$$

(2)因为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，于是$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$，$t_{0.05}(15)=1.7531$，则有

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right|<t_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

μ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}\right)$，即置信区间为

$$\left(2.125-\frac{0.01713}{\sqrt{16}}\cdot 1.7531,2.125+\frac{0.01713}{\sqrt{16}}\cdot 1.7531\right)=(2.117,2.132).□$$

7.11. **解**：通过样本总体可求得

$$\overline{X}=1003，S=10，\alpha=0.05$$

因为$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，于是$\chi^2_{0.025}(24)=39.364$，$\chi^2_{0.975}(24)=12.401$，则有

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)=1-\alpha$$

σ^2的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$，即置信区间为

$$\left(\frac{(25-1)\cdot 10^2}{39.364},\frac{(25-1)\cdot 10^2}{12.401}\right)=(60.9694,193.533).\square$$

7.12. **解**：因为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，于是有

$$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1),\ \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1),\ Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$$

则有

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)<\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}<\sigma^2<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)=1-\alpha$$

即σ^2的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$.□

第八章 假设检验

8.1. **解**：(1)因为总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，于是有$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$，则

当$\alpha=0.05$时，接受原假设H_0：$\mu=\mu_0$时有$|z|=\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}$；

当$\alpha=0.01$时，$|z|=\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{0.025}<z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.005}$，即接受原假设$H_0$.

(2)犯第一类错误(弃真)的概率为

$$P(X_1=1,X_2=2,X_3=3|\theta=0.1)=\theta\cdot 2\theta\cdot(1-3\theta)|_{\theta=0.1}=0.014$$

犯第二类错误(取伪)的概率为

$$\begin{aligned}P(X_1\neq 1\cup X_2\neq 2\cup X_3\neq 3|\theta=0.2)&=1-P(X_1=1,X_2=2,X_3=3|\theta=0.2)\\&=1-\theta\cdot 2\theta\cdot(1-3\theta)|_{\theta=0.2}=1-0.032=0.968.\square\end{aligned}$$

8.2. **解**：(1)因为总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，于是有$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$，则

当$\alpha=0.05$时，$|z|=\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right|=\left|\dfrac{\overline{X}-0}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right|=\sqrt{10}\left|\overline{X}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}$，即接受原假设$H_0$，因为拒绝域$W=\left(\left|\overline{X}\right|\geq \mathrm{C}\right)$，则

$$\mathrm{C}=\frac{z_{0.025}}{\sqrt{10}}=\frac{1.96}{\sqrt{10}}=0.619806$$

(2)$|z|=\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right|=\left|\dfrac{\overline{X}-0}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right|=\sqrt{10}\left|\overline{X}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}$接受原假设$H_0$，因为拒绝域$R=\left(\left|\overline{X}\right|\geq 1.05\right)$，则

$$\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{10}}=1.05\Longleftrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1.05\sqrt{10}=3.32\Longleftrightarrow \alpha=0.001.\square$$

8.3. **解**：通过样本总体可求得

$$\overline{X}=2.81,\ S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{99}\cdot 225}=1.508$$

(1)因为总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，于是有$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$，则

当$\alpha=0.05$时，接受原假设H_0：$\mu=0.25$时有

$$|t|=\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right|=\left|\frac{2.81-2.5}{\frac{1.508}{\sqrt{100}}}\right|=2.0557>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(99)=1.984$$

因此需要拒绝原假设H_0：$\mu=2.5$，接受备择假设H_1：$\mu\neq 2.5$.

(2)因为$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，则

当$\alpha=0.05$时，原假设为H_0'：$\sigma^2=2.35$，若想接受原假设，则有

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

$$\chi^2_{0.975}(99)<\frac{99\cdot\frac{1}{99}\cdot 225}{2.35}<\chi^2_{0.05}(99)$$

$$74.22<95.7447<129.56$$

条件成立，因此接受原假设H_0'：$\sigma^2=2.35$.□

8.4. **解**：通过样本总体可求得

$$\overline{X}=950,\ \sigma=100,\ \alpha=0.05$$

因为总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，于是有$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$，若接受原假设$H_0$：$\mu\geqslant 1000$，则有

$$z=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{950-\mu}{\frac{100}{\sqrt{25}}}=\frac{950-\mu}{20}\leqslant\frac{950-1000}{20}=-2.5<-z_\alpha=-z_{0.05}=-1.645$$

落在拒绝域内，因此需要拒绝原假设H_0：$\mu\geqslant 1000$，接受备择假设H_1：$\mu<1000$.□

8.5. **解**：通过样本总体可求得

$$S=0.007,\ \alpha=0.05$$

因为总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，于是有$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，若接受原假设$H_0$：$\sigma^2\leqslant 0.005^2$，则有

$$\chi^2(n-1)=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{8\cdot 0.007^2}{\sigma^2}\geqslant\frac{8\cdot 0.007^2}{0.005^2}=15.68>\chi^2_\alpha(n-1)=\chi^2_{0.05}(8)=15.507$$

落在拒绝域内，因此需要拒绝原假设H_0：$\sigma^2\leqslant 0.005^2$，接受备择假设$H_1$：$\sigma^2>0.005^2$.□

8.6. **解**：通过样本总体可求得

$$\overline{X}=2050,\ S=490,\ \alpha=0.01,\ n=20$$

因为总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，于是有$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$，若接受原假设$H_0$：$\mu\geqslant 2000$，则有

$$t=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{2050-\mu}{\frac{490}{\sqrt{20}}}\leqslant\frac{2050-2000}{\frac{490}{\sqrt{20}}}=0.45634>-t_{\alpha}(n-1)=-t_{0.01}(19)=-2.5395$$

落在拒绝域外，因此需要接受原假设H_0：$\mu\geqslant 2000$.□